



Ηλεκτρονική

Μία εισαγωγή για Πληροφορικούς

Θωμάς Καμαλάκης

U.S.B. ENTERPRISE
STANDARD ISSUE
COMMUNICATIONS

Σημειώσεις του μαθήματος "Ηλεκτρονική"

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεματικής, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο Αθηνών
Πρώτη έκδοση, Ιούνιος 2017

1. Εισαγωγή

1.1 Σκοπιμότητα

Είναι 5η Ιουνίου του 2017 και γιορτάζουμε την γιορτή του Αγ. Πνεύματος. Το γνωστό τρίημερο λίγο πριν την εξεταστική του Ιουνίου. Σε ένα μήνα περίπου η δραστηριότητα στο Πανεπιστήμιο θα μειωθεί σημαντικά καθώς η εξεταστική θα έχει τελειώσει και οι φοιτητές μας, εσείς δηλαδή θα έχετε πάρει τον δρόμο για την παραλία για να ξεκουραστείτε από την προσπάθεια που έχετε καταβάλει μέσα στην χρονιά. Κάθε φορά που τελειώνει το εξάμηνο έχω το ίδιο πρόβλημα εδώ και δέκα χρόνια. Πιστεύω ότι δεν μπόρεσα να σας κεντρίσω αρκετά το ενδιαφέρον για την ηλεκτρονική. Από την σκέψη μου αυτή γεννήθηκαν αυτές οι σημειώσεις.

Η αλήθεια είναι ότι η ηλεκτρονική είναι ένα πολύ παλιό θέμα. Θυμάμαι ότι όταν και εγώ ήμουν φοιτητής κάποια εκατοντάδες χρόνια πριν, η ύλη που καλύπταμε ήταν πάνω κάτω η ίδια. Ο καθηγητής μας έμπαινε στην τάξη και άρχισε να γράφει στον πίνακα. Από κάτω εμείς χασμουριόμασταν. Βλέπετε ήμασταν και εμείς πληροφορηκάριοι και δεν μπορούσαμε πολύ την θεωρία, θέλαμε αυτό που λέμε στο χωριό μου hands-on εκπαίδευση. Άλλωστε, όπως έλεγε και ο καθηγητής μου που έκανα διδακτορικό μαζί του, "αν δεν το φτιάξω, δεν το πιστεύω".

Καλές λοιπόν οι εξισώσεις αλλά βαρετές. Πρέπει να συνοδεύονται και από κάτι άλλο που να είναι κοντά στην πράξη. Εδώ και χρόνια, οι ηλεκτρονικοί χρησιμοποιούν το SPICE για να δοκιμάσουν και να αναλύσουν τα κυκλώματά τους. Μάλιστα, υπάρχουν και γραφικές εκδόσεις του SPICE όπως το περίφημο LT-SPICE τα οποία είναι και δωρεάν. Σκέφτηκα επομένως γιατί να μην βασίσουμε το μάθημα σε μία τέτοια προσέγγιση; Δεν μπορούμε να ξεχάσουμε και τελείως τις εξισώσεις! Ωστόσο θα χρησιμοποιήσουμε τον υπολογιστή για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα πως λειτουργούν τα διάφορα κυκλώματα.

Το LT-SPICE όμως δεν αρκεί για το μάθημα. Μαζί με το LT-SPICE θα χρησιμοποιήσουμε και το OCTAVE. Το OCTAVE είναι λογισμικό ανοιχτού κώδικα και διατίθεται και αυτό δωρεάν όπως και το LT-SPICE. Θα μας βοηθήσει να ρίξουμε λίγο φως σε θέματα που έχουν να κάνουν με τα ηλεκτρονικά σήματα και την φυσική των ημιαγωγών στα οποία το LT-SPICE δεν μπορεί να μας βοηθήσει. Είναι στην ουσία μία γλώσσα προγραμματισμού πολύ απλή με αρκετές δυνατότητες μοντελοποίησης και αναπαράστασης των αποτελεσμάτων.

Θα μου πείτε βέβαια, τι με νοιάζει εμένα η ηλεκτρονική; Εγώ θέλω να μάθω ως απόφοιτος πληροφορικής να προγραμματίζω. Παλιά στην εποχή μου, ρώταγε ο ένας φοιτητής τον άλλο, "η σχολή σου κάνει hardware ή software;". Στην σύγχρονη εποχή ο διαχωρισμός αυτός δεν έχει και πολύ μεγάλο νόημα. Καλούμαστε πλέον να προγραμματίσουμε όχι μόνο υπολογιστές αλλά και τα λεγόμενα ενσωματωμένα συστήματα, μικρά συστήματα δηλαδή που αποτελούνται από κάποιου είδους μικρό-ελεγκτές διασυνδεδεμένους με αισθητήρες, διακόπτες κτλ. Είναι το λεγόμενο διαδίκτυο των πραγμάτων όπου το υλικό και το λογισμικό είναι πολύ στενά εξαρτώμενα. Επομένως η ηλεκτρονική σίγουρα έχει μία θέση στο σύγχρονο οικοδόμημα της πληροφορικής.

1.2 Όταν πηγαίναμε μαζί σχολείο

Ηλεκτρονική μαθαίνατε στην φυσική, σωστά; Μην ανησυχείτε αν δεν θυμάστε και πολλά. Θα τα θυμηθούμε μαζί. Ας ξεκινήσουμε με δύο πολύ βασικές έννοιες το ρεύμα και την τάση.

Το *ηλεκτρικό ρεύμα* μετράει το πόσο φορτίο περνάει από την διατομή ενός αγωγού (π.χ. καλωδίου) στην μονάδα του χρόνου.

Η *διαφορά δυναμικού* μετράει πόσο *έργο* (δηλαδή πόση ενέργεια) πρέπει να δαπανήσει ένα φορτίο για να μετακινηθεί μεταξύ δύο σημείων A και B.

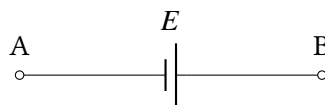
Η *ηλεκτρική τάση* η πιο απλά η *τάση* είναι η διαφορά δυναμικού ενός σημείου σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς που συχνά το ονομάζουμε *γη*.

Η ανάλυση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων στην ουσία είναι ο υπολογισμός των ρευμάτων και των τάσεων σε κάθε σημείο του κυκλώματος ή εν πάσι περιπτώσει εκεί που μας ενδιαφέρει.

Δύο ακόμα πράγματα μαθαίναμε στην φυσική: πρώτον ότι το φορτίο δεν χάνεται, δηλαδή όσο φορτίο μπαίνει σε ένα σημείο τόσο βγαίνει από αυτό. Πρόκειται για τον *πρώτο νόμο* του Kirchoff. Ο Gustav Kirchoff ήταν ένας γερμανός φυσικός που έζησε από το 1824 έως το 1887 και μεταξύ άλλων μας έδωσε τους βασικούς νόμους που διέπουν ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα. Το δεύτερο πράγμα είναι ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό, δηλαδή όταν ένα φορτίο κινείται μεταξύ δύο σημείων A και B το έργο που καταναλώνεται εξαρτάται μόνο από την θέση των σημείων και όχι από την διαδρομή. Επομένως αν ξεκινήσω από το A και ξαναγυρίσω στο A το έργο που έχω καταναλώσει είναι μηδέν. Έχουμε με τον τρόπο αυτό τον δεύτερο νόμο του Kirchoff που μας λέει ότι σε μία κλειστή διαδρομή μέσα σε ένα κύκλωμα, η διαφορά δυναμικού πρέπει να είναι μηδέν.

Πριν δούμε μία εφαρμογή για να θυμηθούμε τους νόμους του Kirchoff λίγο καλύτερα, ας γνωρίσουμε δύο από τους πρωταγωνιστές μας.

Ο πρώτος πρωταγωνιστής του μαθήματος μας είναι η πηγή τάσης που φαίνεται παρακάτω:

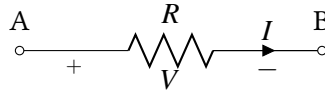


Εικόνα 1.1: Μία πηγή τάσης.

Μία πηγή τάσης είναι στην ουσία μία μπαταρία. Μεταξύ των σημείων A και B του σχήματος 1.1 η διαφορά δυναμικού είναι σταθερή σε σχέση με το χρόνο και ίση με E . Πολλές φορές χαρακτηρίζουμε την πηγή τάσης ως *ιδανική* με την έννοια ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των A και B είναι *πάντα* ίση με E ανεξαρτήτως τι συμβαίνει στο κύκλωμα. Στην πράξη βέβαια δεν υπάρχουν ιδανικές πηγές τάσης. Για παράδειγμα αν αγοράσουμε μία μπαταρία 9V από

το περίπτερο και βραχυκυκλώσουμε τα άκρα της με ένα συνδετήρα (προσοχή! μην το κάνετε) τότε αυτή θα εκραγεί. Ωστόσο στην πλειοψηφία των πρακτικών εφαρμογών η μπαταρία θα συμπεριφέρεται σχεδόν ως ιδανική πηγή, δηλαδή θα παρέχει στο κύκλωμα τάση ίση με \mathcal{E} .

Ο δεύτερος πρωταγωνιστής που έχουμε μάθει είναι η αντίσταση που συμβολίζεται όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 1.2: Μία αντίσταση.

Η αντίσταση είναι ένα ηλεκτρονικό στοιχείο που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα διάφορα κυκλώματα. Το βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι το ρεύμα I που την διαρρέει είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού στα άκρα της V , δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $I = V/R$ όπου το R είναι μία σταθερά που χαρακτηρίζει την αντίσταση και συχνά αναφέρεται ως "αντίσταση". Η αντίσταση R μετριέται σε Ω και θεωρούμε ότι παραμένει σταθερή ανεξάρτητα των συνθηκών που ισχύουν στο κύκλωμα. Πάλι βέβαια αυτό είναι μία προσέγγιση που δεν ισχύει πάντα στην πράξη. Η σχέση $I = V/R$ είναι ο νόμος του Ohm. Ο Georg Simon Ohm ήταν Γερμανός φυσικός που γεννήθηκε το 1789 (την χρονιά της Γαλλικής επανάστασης). Είναι ενδιαφέρον να τονίσει κανείς ότι πέραν από την ηλεκτρονική, ο Ohm διατύπωσε και νόμους που έχουν να κάνουν με το πως το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται την μουσική (!).

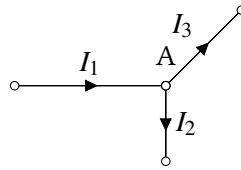
Τόσο στο σχήμα 1.1 όσο και στο σχήμα 1.2 μπορούμε να γράψουμε τι γνωρίζουμε για την διαφορά δυναμικού $V_B - V_A$ μεταξύ των δύο σημείων A και B. Στο σχήμα 1.1 είναι πολύ εύκολο, η ίδια η πηγή κρατάει την διαφορά δυναμικού σταθερή και ίση με \mathcal{E} οπότε $V_B - V_A = \mathcal{E}$. Στην περίπτωση του 1.2 η διαφορά δυναμικού δίνεται από τον νόμο του Ohm. Ωστόσο θέλει προσοχή το πρόσημο της διαφοράς δυναμικού.

Στο σχήμα 1.2 έχουμε ζωγραφίσει το ρεύμα να φεύγει από το A και να πηγαίνει προς το B. Συνήθως όταν ζωγραφίζουμε ρεύματα πάνω στα κυκλώματα θεωρούμε ότι πρόκειται για ρεύματα θετικών φορτίων. Το σημαντικό εδώ είναι να θυμόμαστε ότι το θετικό φορτίο έχει την τάση να κινείται από το συν "+" στο πλην "-" δηλαδή να αφήνει πίσω του τα υψηλά δυναμικά και να κινείται προς τα χαμηλά. Αυτό εξηγείται από την φορά που έχει το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} αλλά δεν θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ (αναζητείστε το στο αγαπημένο σας βιβλίο Φυσικής, αν υπάρχει κάτι τέτοιο). Σύμφωνα με αυτά που συζητάμε θα έχουμε $V_A - V_B = IR$ ή αν προτιμάτε καλύτερα, $V_B - V_A = -IR$.

1.3 Οι νόμοι του Kirchoff

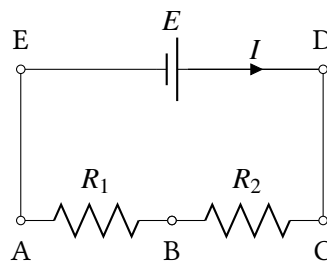
Το σχήμα 1.3 θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε τον 1ο νόμο του Kirchoff. Με απλά λόγια ο νόμος μας λέει ότι όσοι μπαίνουν τόσο βγαίνουν ή αν θέλουμε να μιλήσουμε πιο ακαδημαϊκά όσο ρεύμα εισέρχεται στον κόμβο A τόσο εξέρχεται από αυτό. Παρατηρώντας το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι το ρεύμα I_1 είναι το μόνο ρεύμα που εισέρχεται στον A ενώ τα I_2 και I_3 εξέρχονται από αυτό, επομένως το συνολικό ρεύμα που εξέρχεται θα είναι $I_2 + I_3$. Σύμφωνα επομένως με τον 1ο νόμο του Kirchoff θα γράψουμε $I_1 = I_2 + I_3$.

Για να δείξουμε τον 2ο νόμο του Kirchoff χρησιμοποιούμε το κύκλωμα στην εικόνα 1.4. Αποτελείται από μία πηγή τάσης και δύο αντιστάσεις τις R_1 και R_2 . Αυτό το απλό κύκλωμα ονομάζεται διαιρέτης τάσης και θα το βρίσκουμε πολύ συχνά μπροστά μας. Αν θέλαμε να



Εικόνα 1.3: 1ος νόμος του Kirchoff

εφαρμόσουμε τον νόμο του Kirchoff θα πρέπει να βρούμε μία κλειστή διαδρομή. Η μόνη κλειστή διαδρομή (ή όπως το λένε οι ηλεκτρονικοί, ο μόνος βρόγχος) είναι το $E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow E$. Υπάρχει και ο ανάποδος βρόγχος αλλά ας επιλέξουμε αυτόν τον βρόγχο να δούμε τι θα γράψουμε.



Εικόνα 1.4: Κύκλωμα για τον 2ο νόμο του Kirchoff

Ξεκινάμε επομένως να γράφουμε τις διαφορές δυναμικού σύμφωνα με την διαδρομή $E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow E$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} V_D - V_E &= E \\ V_C - V_D &= 0 \\ V_B - V_C &= -IR_2 \\ V_A - V_B &= -IR_1 \\ V_E - V_A &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Πηγαίνοντας από το E στο D η διαφορά δυναμικού είναι ίση με E δηλαδή την τάση της πηγής οπότε $V_D - V_E = E$. Το D είναι βραχυκυκλωμένο με το C οπότε τα δύο σημεία έχουν το ίδιο δυναμικό, $V_D = V_C$. Στην πράξη κάθε καλώδιο που χρησιμοποιούμε έχει μία πολύ μικρή αντίσταση r_w η οποία υπό φυσιολογικές συνθήκες μπορεί να αγνοηθεί. Όταν πηγαίνουμε από το C στο B περνάμε την αντίσταση R_2 η οποία διαρρέεται από ρεύμα που έχει φορά την ίδια με την κίνηση μας. Επομένως θα πρέπει σύμφωνα με αυτά που είπαμε και παραπάνω να έχουμε $V_B - V_C = -IR_2$. Το ίδιο συμβαίνει και με την R_1 . Προσθέστε τα όλα μαζί και θα βγάλετε

$$E - IR_1 - IR_2 = 0 \tag{1.2}$$

που είναι ο 2ος νόμος του Kirchoff για το κύκλωμα μας.

1.4 Το πρώτο παράδειγμα στο LT-SPICE

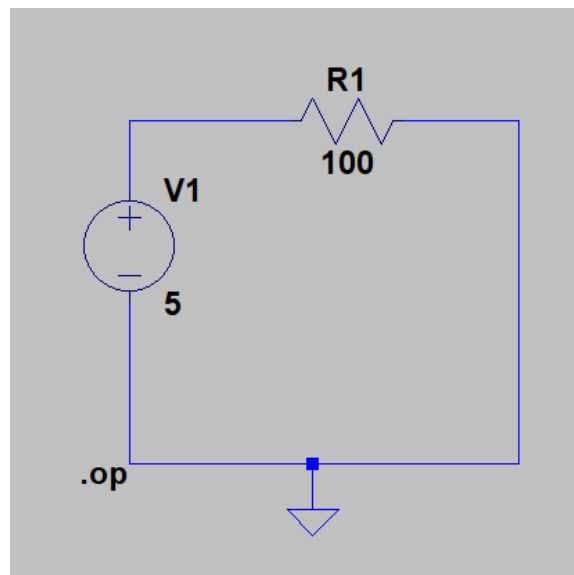
Ας φτιάξουμε το πρώτο μας κύκλωμα στο LT-SPICE. Το LT-SPICE παρέχει ένα γραφικό περιβάλλον όπου μπορούμε να σχεδιάζουμε και να αναλύουμε κυκλώματα και το οποίο θα

χρησιμοποιούμε αρκετά στο μάθημα. Το LT-SPICE βασίζεται στο SPICE, έναν προσομοιωτή κυκλωμάτων που αναπτύχθηκε από το πανεπιστήμιο του Berkeley στην Καλιφόρνια. Η πρώτη έκδοση του SPICE κυκλοφόρησε το 1973 (!) και ίσως αποτελεί ένα από τα γνωστότερα και παλιότερα παραδείγματα λογισμικού ανοιχτού κώδικα.




Μπορείτε να το κατεβάσετε δωρεάν το LT-SPICE στο σύνδεσμο:

<http://www.linear.com/designtools/software/#LTspice>

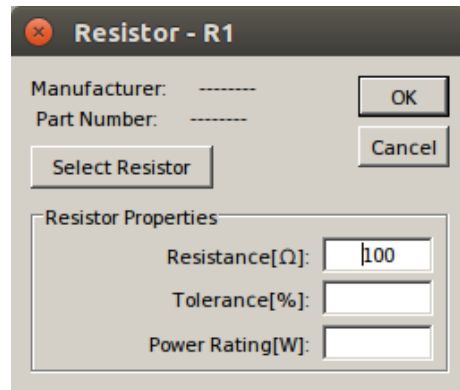
Οι λάτρεις του Linux μπορούν να χρησιμοποιήσουν το LT-SPICE με την βοήθεια του



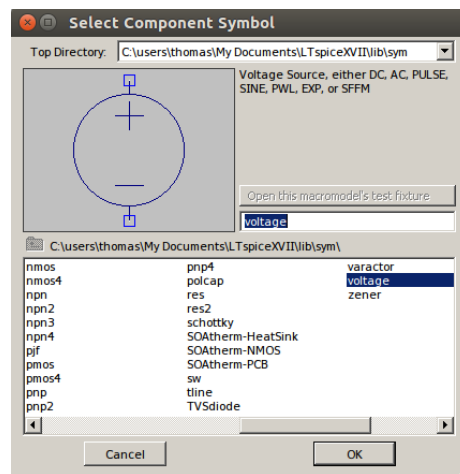
Εικόνα 1.5: Ο νόμος του Ohm στο LT-SPICE

περιβάλλοντος WINE. Ας φτιάξουμε το απλό κύκλωμα στην εικόνα 1.5 στο LT-SPICE. Είναι πολύ εύκολο. Το αρχείο του LT-SPICE μπορείτε να το βρείτε στο e-class με το όνομα *ohmslaw.asc*. Για να το φτιάξετε εξ αρχής, χρησιμοποιείτε το κουμπί  για να τοποθετήσετε την αντίσταση. Μετά κάνετε δεξί κλικ στην αντίσταση (προσοχή: όχι στο όνομα της αντίστασης R1 αλλά στο σώμα της) και εμφανίζεται το παρακάτω dialog box: Στο dialog box συμπληρώνουμε την τιμή 100 στο πεδίο "Resistance [Ω]" για να πούμε στο LT-SPICE ότι η αντίσταση που βάζουμε είναι 100 Ω . Στη συνέχεια βάζουμε την πηγή τάσης. Πατάμε F2 και εμφανίζεται το παρακάτω dialog box όπου γράφουμε voltage στο πεδίο που είναι δεξιά της εικόνας. Βάζουμε και την πηγή στο κύκλωμα και κάνουμε πάλι δεξί κλικ για να βάλουμε την τιμή 5 στην τάση της πηγής όπως δείχνουμε και στην εικόνα 1.8 ώστε η πηγή μας να δίνει τάση 5V. Με το κουμπί  ζωγραφίζουμε τις υπόλοιπες συνδέσεις ενώ με το κουμπί  θα πρέπει να ορίσουμε ένα σημείο αναφοράς δηλαδή την γη που αναφέραμε και στην ενότητα 1.2. Αν δεν ορίσουμε γη το LT-SPICE δεν μπορεί να υπολογίσει τις τάσεις σε κάθε σημείο του κυκλώματος επειδή δεν έχει ένα σημείο αναφοράς.

Στη συνέχεια μπορούμε να πούμε στο LT-SPICE να κάνει μία ανάλυση του κυκλώματος. Τι είδους όμως ανάλυση; Η πιο απλή ίσως ανάλυση που μπορεί να γίνει είναι η *DC ανάλυση*. Στην περίπτωση αυτή, το LT-SPICE υπολογίζει τις DC τάσεις και τα ρεύματα του κυκλώματος. Θα αναρωτιέστε βέβαια τι είναι οι DC τάσεις και τα DC ρεύματα και θα σας το εξηγήσω αμέσως.



Εικόνα 1.6: Το dialog box για να θέσουμε την τιμή της αντίστασης



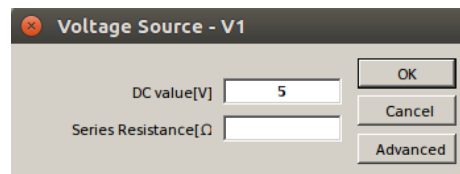
Εικόνα 1.7: Το dialog box για να τοποθετήσουμε την πηγή τάσης

Φανταστείτε το στερεοφωνικό που έχετε σπίτι σας. Για να λειτουργήσει το στερεοφωνικό μας πρέπει να το βάλουμε στην πρίζα. Η πρίζα παρέχει στα διάφορα στοιχεία που είναι στο εσωτερικό του την ηλεκτρική ισχύ που απαιτείται ώστε να ενισχυθεί το ακουστικό σήμα (η μουσική μας) και να οδηγήσει τα ηχεία μας. Συνήθως στα κυκλώματα η ισχύς παρέχεται από μία πηγή σταθερής τάσης που δημιουργεί συνιστώσες σταθερού ρεύματος στα διάφορα ηλεκτρικά στοιχεία. Τις συνιστώσες αυτές τις ονομάζουμε συνιστώσες σταθερού ρεύματος, *Direct Current* (DC), επειδή το ρεύμα που δημιουργείται δεν αλλάζει φορά. Οι συνιστώσες του σήματος αλλάζουν φορά και τις ονομάζουμε συνιστώσες εναλλασσόμενου ρεύματος *Alternating Current* (AC).

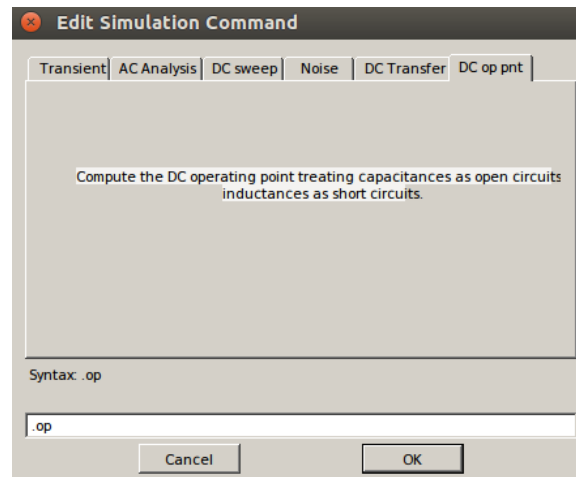
Όταν ζητάμε επομένως από το LT-SPICE να κάνει ανάλυση DC, θα μηδενίσει όλες τις AC πηγές τάσης και θα υπολογίσει τις DC συνιστώσες ρεύματος και τάσης. Στην περίπτωση μας δεν έχουμε βάλει κάποια εναλλασσόμενη πηγή: η πηγή μας δίνει σταθερή τάση 5V πάντα.

Για να πούμε στο LT-SPICE να κάνει την ανάλυση επιλέγουμε από το μενού Simulate → Run και στο dialog box επιλέγουμε DC op rpt όπως δείχνει η εικόνα 1.9.

Το LT-SPICE ανοίγει ένα αρχείο στο οποίο γράφει τα αποτελέσματα της ανάλυσης όπως δείχνει η εικόνα 1.10. Ονομάζει αυθαίρετα το σημείο όπου είναι το + της πηγής ως "p001" και

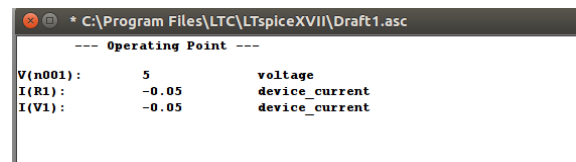


Εικόνα 1.8: Το dialog box για να θέσουμε την τιμή της πηγής τάσης



Εικόνα 1.9: Πως να πούμε στο LT-SPICE να κάνει DC ανάλυση


μας πληροφορεί ότι η τάση εκεί είναι 5V. Επίσης μετράει και τα ρεύματα που διαρρέουν τα δύο στοιχεία μας δηλαδή την πηγή και την αντίσταση και μας πληροφορεί ότι αυτά είναι ίσα με -0.05A. Εδώ θα πρέπει να σχολιάσουμε πως το LT-SPICE υπολογίζει την φορά των ρευμάτων. Για τις αντιστάσεις το υπολογίζει έτσι ώστε η θετική φορά να είναι από δεξιά προς τα αριστερά (εκτός αν τις περιστρέψουμε, στο LT-SPICE περιστρέφουμε κάτι με Ctrl+R). Επομένως όταν λέει -0.05A στην ουσία μας πληροφορεί ότι το ρεύμα πάει από τα αριστερά προς τα δεξιά.

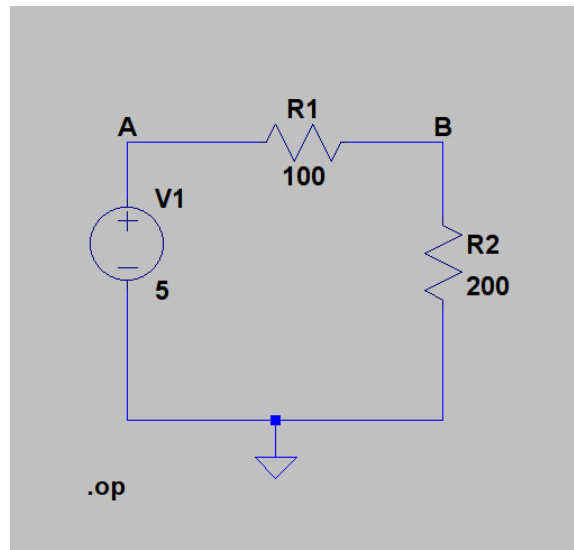


Εικόνα 1.10: Τα πρώτα μας αποτελέσματα στο LT-SPICE

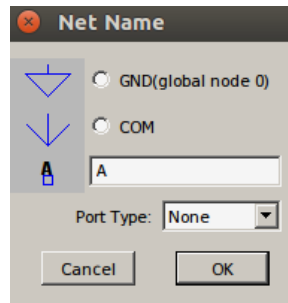
Είναι φανερό ότι το LT-SPICE δεν έκανε και κάτι πολύ έξυπνο σε αυτό το παράδειγμα. Στην ουσία εφάρμοσε τον νόμο του Ohm, $I_{R_1} = V_{R_1}/R_1$ και επειδή όλη η τάση της πηγής πέφτει πάνω στην αντίσταση έχουμε $V_{R_1} = V_1 = 5V$ οπότε $I_{R_1} = 5V/100\Omega = 0.05A$. Ωστόσο θα δούμε ότι σε πιο πολύπλοκα κυκλώματα, μπορεί όντως να απλοποιήσει την κατάσταση και να βοηθήσει στον σχεδιασμό.

1.5 Ο διαιρέτης τάσης στο LT-SPICE

Ένα άλλο παράδειγμα που μπορούμε να αναλύσουμε είναι ο διαιρέτης τάσης που είδαμε στην εικόνα 1.4. Το αντίστοιχο αρχείο του LT-SPICE είναι το *voltage_divider.asc*. Στην ουσία βασιστήκαμε στο παράδειγμα της ενότητας 1.4 όπου έχουμε προσθέσει μία αντίσταση την R_2 και έχουμε τοποθετήσει τα σημεία A και B πάνω στο κύκλωμα με το κουμπί . Πατώντας το εμφανίζεται ένα dialog box όπως αυτό που δείχνει το 1.12. Στο πεδίο που υπάρχει κάτω από



Εικόνα 1.11: Ο διαιρέτης τάσης στο LT-SPICE



Εικόνα 1.12: Το dialog box για την ονομασία των κόμβων του κυκλώματος

το COM γράφουμε το όνομα του σημείου που θέλουμε και μετά το τοποθετούμε στην θέση που θέλουμε. Στην εικόνα 1.13 βλέπουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών του LT-SPICE. Μας πληροφορεί ότι στο σημείο A το δυναμικό είναι $V_A = 5V$ κάτι που είναι λογικό επειδή εκεί είναι το + της πηγής, στο σημείο B το δυναμικό είναι $V_B = 3.3V$ και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι ίσο με $I \cong 0.0166A$. Αυτά τα αποτελέσματα προκύπτουν και από την λύση του νόμου του Kirchhoff όπως τον γράψαμε στην (1.2). Λύνοντας ως προς το ρεύμα I λαμβάνουμε,

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{5V}{100\Omega + 200\Omega} \cong 0.0166A. \quad (1.3)$$

```

--- Operation Point ---
[V(1): 3.33333 voltage
[V(2): 5 voltage
[I(R2): 0.0166667 device_current
[I(R3): -0.0166667 device_current
[I(W1): -0.0166667 device_current

```

Εικόνα 1.13: Το dialog box για την ονομασία των κόμβων του κυκλώματος

Η πτώση τάσης πάνω στις αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι,

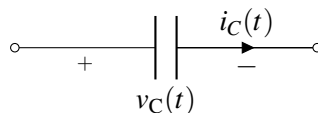
$$\begin{aligned} V_{R_1} &= IR_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_1 \\ V_{R_2} &= IR_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Αντικαθιστώντας θα βρούμε $V_{R_2} \cong 3.3\text{V}$ και $V_{R_1} \cong 1.7\text{V}$ οπότε όντως το σημείο B στο κύκλωμα έχει δυναμικό $V_B \cong 3.3\text{V}$. Οι σχέσεις (1.4) είναι αρκετά χρήσιμες και θα τις χρησιμοποιούμε συχνά στα παρακάτω.

1.6 Πυκνωτές

Στα παραδείγματα που είδαμε μέχρι τώρα, δεν εξετάσαμε καθόλου την επίδραση των κυκλωμάτων στα σήματα. Τι συμβαίνει π.χ. όταν συνδέουμε έναν ενισχυτή στην έξοδο ενός μικροφώνου; τι επίδραση έχει αυτό στο σήμα του μικροφώνου, δηλαδή στην φωνή μας;

Ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τι παθαίνει ένα σήμα τάσης όταν εφαρμόζεται στα άκρα ενός πυκνωτή. Ο πυκνωτής είναι ένα στοιχείο που έχει την ιδιότητα να αποθηκεύει φορτίο (ανατρέξτε στα βιβλία Φυσικής του σχολείου για να τους θυμηθείτε). Στην εικόνα 1.14 παρουσιάζουμε το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για τον πυκνωτή.



Εικόνα 1.14: Ένας πυκνωτής

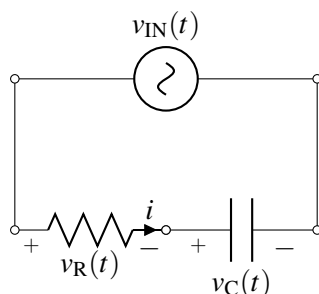
Θα περιμέναμε όπως και στην περίπτωση της αντίστασης, να μπορούμε να συσχετίσουμε το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή i_C σε συνάρτηση με την τάση στα άκρα του v_C . Στην περίπτωση του πυκνωτή η σχέση περιλαμβάνει την παράγωγο της τάσης και γράφεται,

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

Στην σχέση (1.5) το C είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το πως είναι κατασκευασμένος ο πυκνωτής και ονομάζεται *χωρητικότητα* του πυκνωτή. Η χωρητικότητα μετριέται σε Farad (F). Δεδομένου ότι το ρεύμα μετριέται σε A, η τάση σε V και ο χρόνος σε s από την (1.5) βλέπουμε ότι $A = F \times V/s$ οπότε το Farad γράφεται και ως $F = A/V \times s$. Τι θέλει να μας πει η (1.5); Ας υποθέσουμε ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_C(t)$ παραμένει σταθερή με τον χρόνο οπότε η παράγωγος στην (1.5) είναι μηδέν. Τότε και το ρεύμα θα είναι μηδέν, $i_C(t) = 0$ οπότε ο πυκνωτής

δεν αφήνει το ρεύμα να περάσει. Όταν όμως η τάση $v_C(t)$ μεταβάλλεται τότε το ρεύμα του πυκνωτή γίνεται μη μηδενικό. Επομένως ο πυκνωτής αποκρίνεται σε μεταβολές των σημάτων τάσης.

Πυκνωτές χρησιμοποιούμε πολύ συχνά στα κυκλώματα μας. Μάλιστα ακόμα και όταν νομίζουμε ότι δεν τους χρησιμοποιούμε αυτοί υπάρχουν και μπορούν να δημιουργήσουν και προβλήματα σε ορισμένες περιπτώσεις. Θα μιλήσουμε για αυτή την περίπτωση σε επόμενα κεφάλαια. Προς το παρόν ας επικεντρωθούμε σε ένα παράδειγμα για να καταλάβουμε τι διαφορετικό φέρνει ένας πυκνωτής στην ανάλυση μας.



Εικόνα 1.15: Ένα κύκλωμα RC

Στο κύκλωμα αυτό το σύμβολο με το κυκλάκι είναι μία πηγή τάσης όπως την είδαμε και στην εικόνα 1.1 μόνο που χρησιμοποιούμε αυτό το εναλλακτικό σύμβολο για να τονίσουμε ότι η τάση της πηγής μεταβάλλεται με τον χρόνο. Ο νόμος του Kirchhoff για τις τάσεις μας δίνει

$$v_{IN}(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0 \quad (1.6)$$

Επίσης δεδομένου τόσο ο πυκνωτής όσο και η αντίσταση διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, θα πρέπει

$$i = \frac{v_R(t)}{R} = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1.7)$$

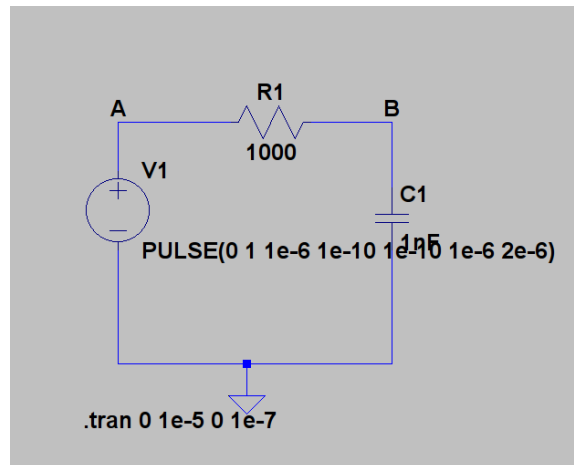
Από την (1.7) προκύπτει ότι $v_R = RC \frac{dv_C}{dt}$ οπότε η (1.7) γράφεται και ως εξής:

$$v_C + RC \frac{dv_C}{dt} = v_{IN} \quad (1.8)$$

Η (1.8) είναι μία διαφορική εξίσωση, δηλαδή μία εξίσωση που περιλαμβάνει την άγνωστη συνάρτηση (στην συγκεκριμένη περίπτωση την v_C) και την παράγωγο της. Υπάρχουν δύο εναλλακτικές: είτε να προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση με το χέρι ή να χρησιμοποιήσουμε το LT-SPICE. Στην επόμενη ενότητα θα ακολουθήσουμε την 2η εναλλακτική.

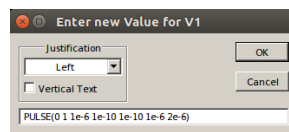
1.7 Το κύκλωμα RC στο LT-SPICE

Στην εικόνα 1.16 δείχνουμε το κύκλωμα του αρχείου *RC.asc* που θα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύσουμε την λειτουργία του RC κυκλώματος. Στην ουσία έχουμε αντικαταστήσει την R_2



Εικόνα 1.16: Ένα κύκλωμα RC στο LT-SPICE

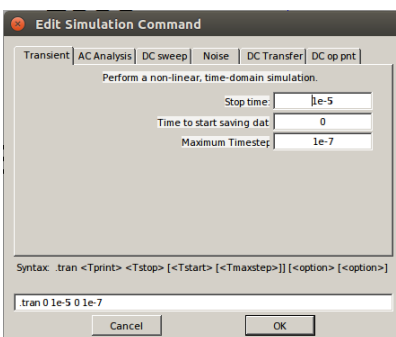
στο κύκλωμα της εικόνας 1.11 με έναν πυκνωτή και έχουμε θέσει $R_1 = 1\text{k}\Omega = 10^3\Omega$ και $C_1 = 1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$. Μία άλλη βασική διαφορά είναι ότι αυτή τη φορά κάνουμε *μεταβατική* (transient) ανάλυση όπου η πηγή μας V_1 παράγει ορθογώνιους παλμούς και εμείς ελέγχουμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή. Η πηγή προσδιορίζεται κάνοντας κλικ στο V_1 και γράφοντας την εντολή PULSE όπως φαίνεται και στην εικόνα 1.17.



Εικόνα 1.17: Το dialog box για τον καθορισμό της πηγής τάσης

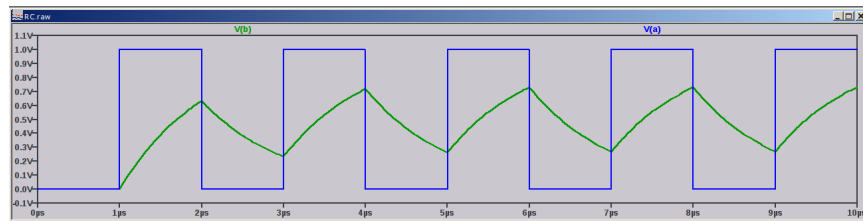
Η εντολή PULSE (Vinitial Von Tdelay Trise Tfall Ton Tperiod) προσδιορίζει το είδος των παλμών που θα παραχθούν. Η πρώτη παράμετρος Vinitial είναι η τιμή του υπόβαθρου δηλαδή η τιμή τάσης που λαμβάνουμε όταν δεν έχουμε παλμό. Στην περίπτωση μας είναι ίση με μηδέν οπότε όταν δεν έχουμε παλμό η τιμή τάσης θα είναι ίση με 0V. Η δεύτερη παράμετρος δηλαδή το Von είναι η τάση κορυφής του παλμού, δηλαδή η μέγιστη τάση που θα λάβουμε όταν έχουμε παλμό. Στην περίπτωση μας είναι ίση με ένα, οπότε οι ορθογώνιοι παλμοί που θα παράγουμε έχουν ελάχιστη τιμή τάσης 0V και μέγιστη τιμή τάσης ίση με 1V. Η τρίτη παράμετρος δηλαδή το Tdelay είναι η καθυστέρηση μέχρι την εμφάνιση του πρώτου παλμού. Στην περίπτωση μας το έχουμε θέσει ίσο με 1μs ($=10^{-6}\text{s}$) το οποίο θα δούμε και παρακάτω ότι ισούται με την διάρκεια του παλμού. Με τον τρόπο αυτό θέλουμε να φτιάξουμε παλμούς οι οποίοι διαρκούν 1μs και μεταξύ των παλμών μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα παύσης ίσο με 1μs (δηλαδή η περίοδος p είναι $p = 2\mu\text{s}$). Η επόμενη παράμετρος Trise είναι ο χρόνος ανόδου του παλμού, δηλαδή το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ο παλμός για να φτάσει από την ελάχιστη τιμή του (δηλαδή τα 0V) μέχρι την μέγιστη του τιμή (δηλαδή τα 1V). Φυσικά θα διερωτηθείτε γιατί αυτός ο χρόνος δεν μπορεί να είναι μηδέν, δηλαδή ο παλμός ακαριαία να μεταβεί από την ελάχιστη στην μέγιστη του τιμή. Αν και το LT-SPICE επιτρέπει μηδενική τιμή σε αυτή την παράμετρο, αυτή πολύ συχνά μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα που έχουν να κάνουν με την αριθμητική λύση των νόμων του Kirchhoff που επιχειρεί το LT-SPICE. Επίσης παλμοί με μηδενικό χρόνο ανόδου είναι

αδύνατο να παραχθούν στην πράξη. Για το σκοπό αυτό θέτουμε το Trise ίσο με 10^{-10} s=100ns που είναι πολύ μικρός χρόνος σε σχέση με την διάρκεια του παλμού και επομένως οι παλμοί μας μεταβαίνουν από την ελάχιστη στην μέγιστη τιμή σχεδόν ακαριαία. Με την ίδια λογική επιλέγουμε την τιμή Tfall η οποία είναι ο χρόνος καθόδου του παλμού δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για να ο παλμός για να κάνει την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή να κατέβει από την μέγιστη του, στην ελάχιστη του τιμή. Η παράμετρος Ton καθορίζει την διάρκεια του παλμού και την θέτουμε ίση με 1μs. Η παράμετρος Tperiod καθορίζει την περίοδο του σήματος, δηλαδή κάθε πότε επαναλαμβάνεται. Την θέτουμε ίση με 2μs, δηλαδή ίση με το άθροισμα του Tdelay και του Ton έτσι ώστε το σήμα να επαναλαμβάνεται περιοδικά. Στη συνέχεια πρέπει να πούμε στο LT-SPICE σε ποιο χρονικό διάστημα θα κάνει την προσομοίωση. Από το μενού του LT-SPICE επιλέγουμε Edit → Spice Analysis και συμπληρώνουμε την φόρμα όπως δείχνει η εικόνα 1.18. Στην ουσία λέμε στο LT-SPICE να ξεκινήσει από την χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι την χρονική στιγμή $t = 10\mu s$, δηλαδή να λάβει υπόψη του πέντε περιόδους του σήματος που έχουμε φτιάξει με την εντολή PULSE. Η τρίτη παράμετρος είναι το βήμα που θα χρησιμοποιήσει το LT-SPICE για την προσομοίωση. Όταν λύνει τις εξισώσεις του Kirchoff αριθμητικά, αυτό γίνεται διαιρώντας τον άξονα του χρόνου σε διακριτά σημεία (t_1, t_2, \dots, t_N) και η τρίτη παράμετρος δίνει στο LT-SPICE μία αρχική εκτίμηση για το πόσο πρέπει να απέχουν τα σημεία αυτά για να οδηγηθεί σε ικανοποιητική λύση. Αν δώσουμε μία τιμή η οποία δεν είναι σωστή, το LT-SPICE θα προσπαθήσει αυτό να καθορίσει τον αριθμό των σημείων στον οποίο πρέπει να διαιρέσει τον άξονα του χρόνου με αυτόματο τρόπο. Επιλέγουμε την τιμή $100ns = 10^{-7}s$ για την απόσταση των χρονικών στιγμών. Στη συνέχεια από το μενού επιλέγουμε Simulate → Run ώστε το LT-SPICE να εκτελέσει την προσομοίωση. Μετά κάνουμε κλικ στο σημείο A και στο σημείο B πάνω στο κύκλωμα ώστε να μας δείξει τις κυματομορφές τάσης στα σημεία αυτά (το σημείο A αντιστοιχεί στην πηγή ενώ το σημείο B στην τάση του πυκνωτή πάντα ως προς το σημείο αναφορά που είναι η γη).



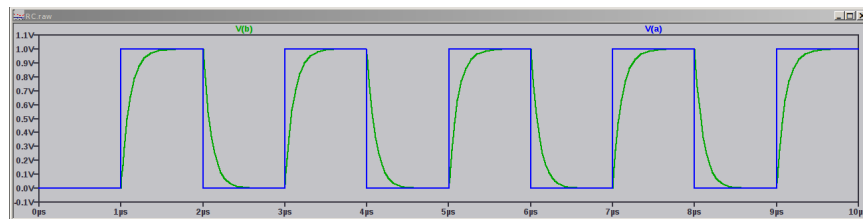
Εικόνα 1.18: Το dialog box για τον καθορισμό της προσομοίωσης

Στην εικόνα 1.19 βλέπουμε την τάση της πηγής στην είσοδο του κυκλώματος με μπλε χρώμα και την τάση του πυκνωτή με πράσινο χρώμα. Καταρχήν παρατηρούμε ότι η τάση της πηγής είναι όπως την είχαμε προδιαγράψει με την εντολή PULSE: ορθογώνιοι παλμοί με σχεδόν ακαριαία μετάβαση από την χαμηλή στην υψηλή τάση με διάρκεια παλμού 1μs και περίοδο ίση με 2μs. Το πιο ενδιαφέρον είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή που παρουσιάζει μία "πριονωτή" συμπεριφορά. Στο σχολείο μας εξηγούσαν αυτή τη συμπεριφορά λέγοντας ότι όταν η τάση της πηγής μεταβάλλεται ξαφνικά από μηδέν σε μία θετική τιμή, υπάρχει μία αδράνεια του πυκνωτή για να ανταποκριθεί σε αυτή την μεταβολή, δηλαδή ο πυκνωτής φορτίζεται αργά και για αυτό βλέπουμε μία πιο αργή μεταβολή της τάσης του σύμφωνα με την πράσινη γραφική παράσταση



Εικόνα 1.19: Τάση εισόδου (μπλε) και τάση του πυκνωτή (πράσινο) για το κύκλωμα της εικόνας 1.17

της εικόνας 1.19. Όταν η τάση της πηγής ξαναπέφτει από το 1V στα 0V, ο πυκνωτής εκφορτίζεται και πάλι με αργό ρυθμό οπότε λαμβάνουμε τα "δόντια" της πριονωτής τάσης που βλέπουμε στο σχήμα. Στο σχολείο επίσης μας έλεγαν ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να φορτιστεί ή εκφορτιστεί ο πυκνωτής καθορίζεται από την τιμή του γινομένου $\tau = RC$ που στην περίπτωση μας ισούται με $\tau = RC = 1000\Omega \times 10^{-9}\text{F} = 10^{-6}\text{V/A} \times \text{A} \times \text{s/V} = 10^{-6}\text{s} = 1\mu\text{s}$. Έχει ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει όταν μεταβάλλεται το τ , π.χ. αλλάζοντας την τιμή της αντίστασης. Στην εικόνα 1.20 έχουμε παραστήσει γραφικά το αποτέλεσμα της προσομοίωσης όταν $R = 100\Omega$ οπότε $\tau = 0.1\mu\text{s}$. Παρατηρούμε ότι τώρα ο πυκνωτής φορτίζεται και εκφορτίζεται πολύ πιο γρήγορα και μάλιστα προλαβαίνει να φθάσει το 1V που είναι η μέγιστη τιμή της τάσης που παρέχει η γεννήτρια. Επομένως όσο πιο μικρό είναι το $\tau = RC$ τόσο πιο γρήγορα αποκρίνεται ο πυκνωτής.



Εικόνα 1.20: Τάση εισόδου (μπλε) και τάση του πυκνωτή (πράσινο) για το κύκλωμα της εικόνας 1.17 όταν $R = 100\Omega$.

1.8 Το κύκλωμα RC με ολίγα μαθηματικά

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του κυκλώματος RC με λίγα μαθηματικά. Η αλήθεια είναι ότι πρόκειται για ένα πολύ βασικό κύκλωμα το οποίο το συναντάμε συχνά αυτοτελές, δηλαδή σε πολλές εφαρμογές που θα δούμε και παρακάτω χρειάζεται όντως να χρησιμοποιήσουμε ένα συνδυασμό αντίστασης R και πυκνωτή C . Επίσης σε πολλές περιπτώσεις το κύκλωμα RC εμφανίζεται εξαιτίας παρασιτικών φαινομένων. Παράδειγμα είναι το ομοαξονικό καλώδιο που χρησιμοποιούμε στους παλμογράφους και τις γεννήτριες σημάτων στο εργαστήριο, το οποίο εμφανίζει μία παρασιτική χωρητικότητα που μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στην επίδοση ενός συστήματος. Επίσης μέσα σε ένα ολοκληρωμένο οι διάλογοι επικοινωνίας επίσης εμφανίζουν παρασιτικές χωρητικότητες. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το τρανζίστορ του οποίου η λειτουργία στις υψηλές συχνότητες περιορίζεται από τις χωρητικότητες που εμφανίζονται στις επαφές του.

Σχεδόν παντού επομένως θα συναντούμε μία χωρητικότητα μαζί με μία αντίσταση. Πως θα αναλύαμε το κύκλωμα της εικόνας 1.15 χωρίς το LT-SPICE; Αν χρησιμοποιήσουμε λίγα μαθηματικά μπορούμε να καταλάβουμε ακριβώς τον τρόπο με τον οποίο η σταθερά $\tau = RC$ επηρεάζει την λειτουργία του κυκλώματος. Αφετηρία της ανάλυσης μας είναι η εξίσωση (1.8). Αν υποθέσουμε ότι η τάση v_{IN} είναι σταθερή και ίση με V μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[t_a, t_b]$ τότε παίζοντας λίγο με τα μαθηματικά μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως εξής:

$$\frac{1}{V - v_C} \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{RC} \quad (1.9)$$

Το αριστερό μέρος της (1.9) γράφεται και λίγο διαφορετικά αν λάβουμε υπόψη μας ότι $\frac{d}{dt}(v_C - V) = \frac{dv_C}{dt}$ οπότε,

$$\frac{d(v_C - V)}{dt} = -\frac{1}{RC}(v_C - V) \quad (1.10)$$

Σύμφωνα με την (1.10) η παράγωγος της συνάρτησης $v_C - V$ είναι ανάλογη της παραγώγου της. Όταν στα μαθηματικά ισχύει $\frac{df}{dt} = \alpha f$ τότε γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι εκθετική της μορφής $f(t) = \Delta e^{\alpha t}$ όπου Δ μία σταθερά που μπορεί να καθορισθεί αν ξέρουμε κάτι για τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης. Για παράδειγμα αν γνωρίζουμε την τιμή $f(t_a)$ τότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε $f(t_a) = \Delta e^{\alpha t_a}$ και επομένως $\Delta = f(t_a)e^{-\alpha t_a}$ οπότε $f(t) = f(t_a)e^{\alpha(t-t_a)}$. Στην περίπτωση μας έχουμε $f(t) = v_C(t) - V$ και $\alpha = -\frac{1}{RC}$ οπότε

$$v_C(t) = V + (v_C(t_a) - V)e^{-\frac{t-t_a}{RC}} = V(1 - e^{-\frac{t-t_a}{RC}}) + v_C(t_a)e^{-\frac{t-t_a}{RC}} \quad (1.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε δύο συνεισφορές στο δεξιό μέρος: μία που είναι ανάλογη του V και μία που είναι ανάλογη του $v_C(t_a)$. Την αρχική στιγμή t_a μπορούμε να την επιλέξουμε όπου μας βολεύει. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά ο πυκνωτής έχεις τάση μηδέν ($v_C(0) = 0$) και ότι στην είσοδο δεν έχουμε καθόλου σήμα, $V = 0$. Στην ουσία βρισκόμαστε στο διάστημα $[0, 1\mu\text{s}]$ της εικόνας 1.19. Τότε σύμφωνα με την (1.11), αν θεωρήσουμε ότι $t_a = 0$, η τάση του πυκνωτή είναι ίση με μηδέν, $v_C(t) = 0$. Στο διάστημα $[1\mu\text{s}, 2\mu\text{s}]$ μπορούμε να θέσουμε $t_a = 1\mu\text{s}$ οπότε $v_C(t_a) = 0$, ενώ εφόσον ο παλμός της πηγής έχει πλάτος $1V$ το χρονικό διάστημα $[1\mu\text{s}, 2\mu\text{s}]$, θα θέσουμε $V = 1V$. Τότε σύμφωνα με την (1.11) θα έχουμε,

$$v_C(t) = V(1 - e^{-\frac{t-t_a}{RC}}) \quad (1.12)$$

Η (1.12) μας λέει ότι η τάση του πυκνωτή ακολουθεί μία μεταβολή της μορφής $1 - e^{-x}$ όπου $x = (t - t_a)/RC$. Για $t = t_a$ έχουμε $x = 0$ οπότε $1 - e^{-x} = 0$ και $v_C(t_a) = 0$, όπως αναμέναμε. Ωστόσο όσο αυξάνει το t το x γίνεται θετικό και το $1 - e^{-x}$ αυξάνεται, ωστόσο παραμένει μικρότερο του 1 αφού $e^{-x} \leq 1$ για $x \geq 0$. Οπότε ναι μεν αυξάνει η τάση του πυκνωτή v_C αλλά ποτέ δεν μπορεί να ξεπεράσει το V . Επίσης μπορούμε να δείξουμε παραγωγίζοντας την (1.12), ότι:

$$\frac{d}{dt}v_C(t) = \frac{V}{RC}e^{-\frac{t-t_a}{RC}} = \frac{V}{RC}e^{-x} \quad (1.13)$$

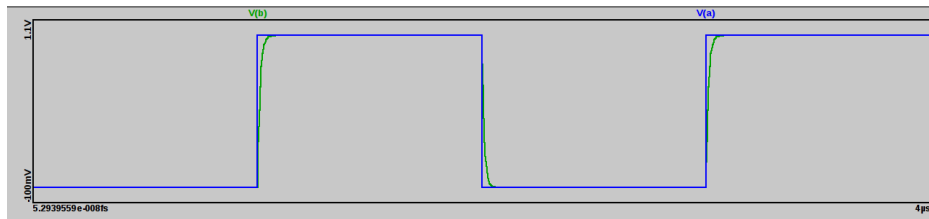
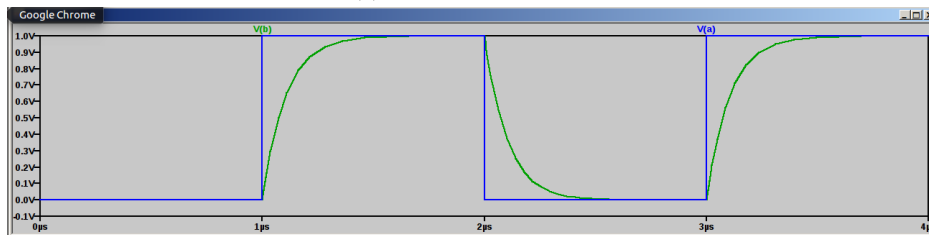
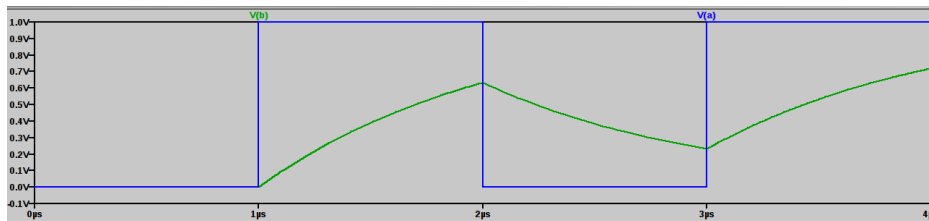
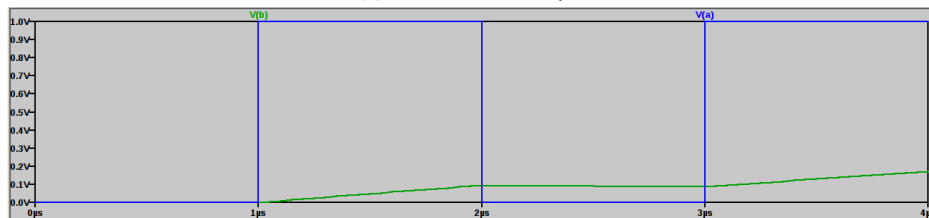
Η (1.13) υποδηλώνει ότι όσο αυξάνει το t τόσο αυξάνει το $x = (t - t_a)/RC$ και τόσο μειώνεται ο ρυθμός ανόδου της τάσης $v_C(t)$. Παρατηρώντας το 1.20 βλέπουμε ακριβώς αυτή την συμπεριφορά. Μετά το $t=1\mu s$, η τάση στα άκρα του πυκνωτή αυξάνεται στην αρχή με γρήγορο ρυθμό και στην συνέχεια με πιο αργό όπου πλέον κοντά στο $t=2\mu s$ φτάνει κοντά στο V οπότε και ο ρυθμός ανόδου είναι πλέον πολύ μικρός. Στην θεωρία ορίζουμε το χρόνο ανόδου του παλμού ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει ο παλμός από το 10% της μέγιστης του τιμής μέχρι το 90% της τιμής αυτής. Για να βρούμε την χρονική στιγμή t_A όπου ο παλμός έχει φτάσει στο 10% της μέγιστης τιμής θέτουμε $v_C(t_A) = 0.1V$ και λαμβάνουμε από την (1.12) ότι $t - t_a = RC \ln(0.9)$. Ομοίως για να βρούμε την χρονική στιγμή όπου φτάνει το 90% πρέπει να θέσουμε $v_C(t_B) = 0.9V$ οπότε $t_B - t_a = RC \ln(0.1)$. Ο χρόνος ανόδου τ_r είναι η διαφορά $t_B - t_A$, οπότε $\tau_r = RC(\ln(0.9) - \ln(0.1)) \cong 2.2RC$.

Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει την επίδραση του γινομένου $\tau = RC$ στην ταχύτητα απόκρισης του κυκλώματος. Αν οι παλμοί της πηγής είναι πολύ γρήγοροι, δηλαδή η συχνότητα τους $f_p = 1/T_p$ του είναι μεγαλύτερη από το $1/\tau = 1/(RC)$ τότε ο πυκνωτής δεν θα προλαβαίνει να ακολουθήσει τις μεταβολές της τάσης της πηγής. Ας δούμε για παράδειγμα τι συμβαίνει με μεγαλύτερη εστίαση του άξονα του χρόνου για διάφορες τιμές του R και επομένως του τ . Στο 1.21 έχουμε παραστήσει γραφικά την τάση του πυκνωτή στην περίπτωση 4 διαφορετικών τιμών της αντίστασης R και επομένως της σταθεράς $\tau = RC$. Παρατηρούμε ότι όταν το τ είναι ίσο με 10ns και επομένως πολύ μικρότερο από την περίοδο του σήματος, ο πυκνωτής μπορεί πολύ πιστά να παρακολουθήσει τις μεταβολές της τάσης της πηγής εισόδου. Στην περίπτωση αυτή η φόρτιση και η εκφόρτιση του γίνεται με πολύ γρήγορους ρυθμούς και ο χρόνος ανόδου είναι περίπου $\tau_r \cong 2.2RC = 2.2\tau = 22ns$ που είναι πολύ μικρότερος από την διάρκεια του παλμού εισόδου που είναι 1μs. Έτσι η καθυστέρηση στην φόρτιση είναι αμελητέα και ίσα-ίσα γίνεται αντιληπτή στο διάγραμμα. Για μεγαλύτερο τ όμως, η παραμόρφωση πλέον γίνεται αντιληπτή πιο έντονα. Τελικά για $\tau = 10\mu s$ ο πυκνωτής ελάχιστα μπορεί να παρακολουθήσει τις μεταβολές της τάσης. Φανταστείτε επομένως τι θα συμβεί αν δεν προσέξουμε την τιμή της χωρητικότητας σε ένα καλώδιο. Ενώ εμείς θα βάζουμε ένα πολύ όμορφο σήμα παλμών, εξαιτίας της χωρητικότητας του καλωδίου θα έχουμε σημαντική παραμόρφωση με αποτέλεσμα οι παλμοί να μην γίνονται αντιληπτοί στο άλλο άκρο. Κλασική περίπτωση βλάβης. Δεν είναι όλα τα καλώδια το ίδιο.

1.9 Υπολογισμός της ισχύος

Ίσως μία από τις πιο σημαντικές παραμέτρους ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος είναι η ισχύς που καταναλώνει. Η ισχύς έχει άμεσο αντίκτυπο στην τσέπη μας καθώς ο πάροχος ηλεκτρισμού χρεώνει ανάλογα με την ενέργεια που καταναλώνουμε που είναι το πηλίκο της ισχύος επί τον χρόνο που την καταναλώνουμε. Ας δούμε πως υπολογίζεται η ισχύς σε ένα κύκλωμα.

Φανταστείτε ότι στα άκρα ενός στοιχείου X επικρατεί διαφορά δυναμικού v_X και το στοιχείο διαρρέεται από ρεύμα i_X . Σύμφωνα με αυτά που ξέρουμε από το σχολείο, η διαφορά δυναμικού αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρικό πεδίο E_X κατά μήκος του στοιχείου. Αν l είναι το μήκος του στοιχείου και θεωρήσουμε ότι το πεδίο είναι σταθερό κατά μήκος του στοιχείου τότε θα έχουμε $E_X = \frac{v_X}{l}$. Εφόσον το στοιχείο διαρρέεται από ρεύμα θα έχουμε κινούμενα φορτία να το διασχίζουν. Αν ένα φορτίο q διασχίζει το στοιχείο τότε η δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι $F = qE_X$ και επομένως το έργο που παράγεται (η ενέργεια που καταναλώνεται) είναι $W = Fl = qE_X l = qv_X$. Η ισχύς p_X είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, δηλαδή $p_X = \frac{W}{t} = \frac{q}{t} v_X = v_X i_X$. Επομένως η ισχύς που καταναλώνεται στο στοιχείο ισούται με $p_X = v_X i_X$ δηλαδή το γινόμενο της τάσης στα άκρα του επί το ρεύμα που το διαρρέει. Η ισχύς μετριέται σε Watt τα οποία τα

(a) $R = 10\Omega$, $\tau = 10ns$ (b) $R = 100\Omega$, $\tau = 100ns$ (c) $R = 1k\Omega$, $\tau = 1\mu s$ (d) $R = 10k\Omega$, $\tau = 10\mu s$ Εικόνα 1.21: Απόκριση του πυκνωτή για διάφορες τιμές αντιστάσεως R

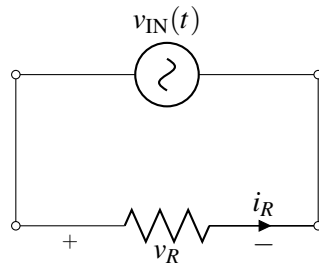
συμβολίζουμε με W . Από τον τύπο $p_X = v_X i_X$ βλέπουμε ότι $1W = 1V \times 1A$.

Όταν αγοράζετε ένα τροφοδοτικό (π.χ. για τον σταθερό υπολογιστή σας ή το laptop σας) ο κατασκευαστής καθορίζει την μέγιστη κατανάλωση ισχύος που μπορείτε να έχετε από το τροφοδοτικό αυτό, π.χ. 450W. Στην περίπτωση αυτή δεν πρέπει να προσπαθήσουμε να πάρουμε από το τροφοδοτικό μεγαλύτερη ισχύ από 450W. Αν το τροφοδοτικό έχει σταθερή τάση V και I είναι το ρεύμα που μας παρέχει, αυτό σημαίνει ότι $V \leq 450W$ διαφορετικά υπάρχει κίνδυνος να το κάψουμε. Ένα τροφοδοτικό desktop υπολογιστή έχει πολλαπλές εξόδους (π.χ. κάποιες με +5V, κάποιες +3.3V, κτλ). Ο κατασκευαστής συνήθως δίνει και την μέγιστη ισχύ και ανά είδος εξόδου όπως φαίνεται για παράδειγμα στο (1.22).

V~ INPUT	VOLTAGE			CURRENT			FREQUENCY		
	115V~ 230V~			8A 4A			60Hz-50Hz		
V== OUTPUT	+3.3V	+5V	+12V	-5V	-12V	+5VSB	PS-ON	POK	COM
	28A	35A	16A	0.3A	0.8A	2A	REMOTE	P.G.	RETURN
MAX	200W			1.5W	9.6W	10W	—	—	—
	330W								
+5V & +3.3V COMBINED 200W MAX. +5V & +3.3V & +12V COMBINED 330W MAX. TOTAL OUTPUT 350W MAX.									

Εικόνα 1.22: Χαρακτηριστικά ενός τυπικού τροφοδοτικού

Αν η τάση μεταβάλλεται με το χρόνο όπως για παράδειγμα συμβαίνει με την τάση του παρόχου ηλεκτρικής ενέργειας που στις χώρες της Ευρώπης είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με πλάτος $\cong 230V$ και συχνότητα 50Hz. Τότε η εξίσωση $p_X(t) = v_X(t)i_X(t)$ εκφράζει την στιγμιαία ισχύ που καταναλώνεται. Έτσι για μία κυματομορφή τάσης όπως αυτή που συζητάμε της μορφής $v_{IN}(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t)$ η οποία διαρρέει μία αντίσταση R όπως δείχνει η εικόνα 1.23



Εικόνα 1.23: Μία πηγή ημιτονοειδούς τάσης πάνω σε μία αντίσταση

Στην περίπτωση της εικόνας 1.23, η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι απλά $v_R(t) = v_{IN} = V_0 \sin(2\pi f_0 t)$ ενώ το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση προκύπτει απλά από τον νόμο του Ohm,

$$i_R(t) = \frac{v_{IN}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.14)$$

οπότε η ισχύς $p_R(t) = v_R(t)i_R(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$p_R(t) = \frac{v_{IN}^2}{R} = \frac{v_R^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} \sin^2(2\pi f_0 t) \quad (1.15)$$

Η (1.15) δείχνει ότι η στιγμιαία ισχύς είναι ανάλογη του τετραγώνου της τάσης v_{IN}^2 . Αυτό είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και στα παρακάτω κεφάλαια. Η μέση ισχύς P_{avg} είναι η μέση τιμή της ισχύος στο διάστημα μίας περιόδου του σήματος. Εφόσον η συχνότητα είναι $f_0 = 50\text{Hz}$, η περίοδος είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 20\text{ms}$. Η μέση τιμή P_{avg} , ορίζεται ως εξής:

$$P_{avg} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p_R(t) dt. \quad (1.16)$$

Στην περίπτωση του κυκλώματος στην εικόνα 1.23 θα έχουμε

$$P_{avg} = \frac{1}{RT_0} \int_0^{T_0} v_{IN}^2 dt. \quad (1.17)$$

Για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος συχνά ορίζουμε ένα μέγεθος που το λέμε *ενεργό τάση* (στα αγγλικά χρησιμοποιείται ο όρος *root mean square - RMS*). Η ενεργός τάση είναι η τιμή μίας σταθερής τάσης V_{RMS} που έχει την ίδια μέση ισχύ P_{avg} με την μεταβαλλόμενη τάση που θεωρούμε. Εφόσον η τάση V_{RMS} είναι σταθερή, η ισχύς που καταναλώνεται πάνω στην αντίσταση R είναι ίση με $P_{avg} = V_{RMS}I_{RMS}$, δηλαδή:

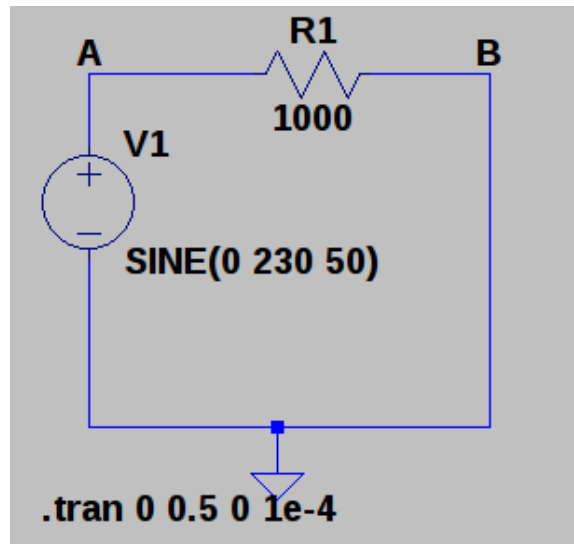
$$P_{avg} = \frac{V_{RMS}^2}{R} \quad (1.18)$$

Από την (1.17) έχουμε ότι

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v_{IN}^2 dt. \quad (1.19)$$

Τα καλά νέα για αυτούς που δεν τους αρέσει να υπολογίζουν ολοκληρώματα είναι πως το LT-SPICE μπορεί να υπολογίσει την ενεργό τιμή της τάσης αριθμητικά από την κυματομορφή της τάσης. Ξεκινάμε φτιάχνοντας το κύκλωμα της εικόνας 1.24 στο LT-SPICE. Παρατηρείστε ότι τώρα η πηγή τάσης δεν ορίζεται με την εντολή PULSE αλλά με την εντολή SINE η οποία δημιουργεί ένα ημιτονοειδές σήμα. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται για την SINE φαίνονται και στο 1.25. Η πρώτη παράμετρος (DC offset) καθορίζει τη συνεχή στάθμη V_1 που θέλουμε να προστίθεται στο σήμα. Στην γενική περίπτωση η SINE μπορεί να παράγει ένα σήμα $V_1 + V_0 \sin(2\pi f_0 t)$. Στην περίπτωση μας θέλουμε απλά $V_1 = 0$ οπότε θέτουμε μηδέν στην πρώτη παράμετρο. Η δεύτερη παράμετρος (Amplitude) είναι το πλάτος V_0 που θέλουμε να έχει το ημίτονο μας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θέτουμε 230V για να φτιάξουμε ένα σήμα παρόμοιο με αυτό του παρόχου ηλεκτρικής ενέργειας. Η τρίτη παράμετρος που θα καθορίσουμε είναι η συχνότητα f_0 που την θέτουμε ίση με 50Hz. Για τους παράγοντες της προσομοίωσης όπως αυτές καθορίζονται στην εικόνα 1.17 θέτουμε τώρα 0.5s για το stop time και μέγιστο timestep 0.1ms. Ο υπολογισμός της ενεργού τάσης γίνεται αυτόματα από το LT-SPICE. Κρατώντας πατημένο το Ctrl κάνουμε κλικ πάνω στο V(a) που βρίσκεται πάνω ακριβώς από τους άξονες και εμφανίζονται διάφορα στοιχεία της κυματομορφής συμπεριλαμβανομένης και της ενεργού (RMS) τιμής της που το LT-SPICE την βρίσκει ίση με 162.61V. Στην περίπτωση της ημιτονοειδούς τάσης είναι εύκολο να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα. Στην (1.19) αντικαθιστούμε $v_{IN} = V_0 \sin(2\pi f_0 t)$ και βρίσκουμε

$$V_{RMS}^2 = \frac{V_0^2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(2\pi f_0 t) dt. \quad (1.20)$$



Εικόνα 1.24: Το κύκλωμα της εικόνας 1.23 στο LT-SPICE

Ίσως σας φοβίζει το ολοκλήρωμα αλλά τα πράγματα είναι πολύ πιο εύκολα από ότι φαντάζεστε επειδή αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον τριγωνομετρικό τύπο $\sin^2(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\phi))$ οπότε το ολοκλήρωμα στην (1.20) γράφεται ως εξής:

$$V_{\text{RMS}}^2 = \frac{V_0^2}{2T_0} \int_0^{T_0} (1 - \cos(4\pi f_0 t)) dt = \frac{V_0^2}{2T_0} \int_0^{T_0} dt - \frac{V_0^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \cos(4\pi f_0 t) dt. \quad (1.21)$$

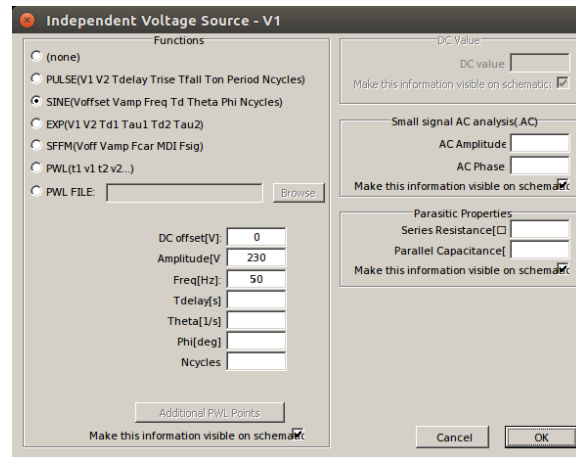
Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί αφού $\int dt = t$ και επομένως $\int_0^{T_0} dt = T_0 - 0 = T_0$. Το δεύτερο είναι ακόμα πιο εύκολο (αν και δεν φαίνεται...) επειδή η συνάρτηση $\sin(4\pi f_0 t)$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{T_0}{2}$ και μέση τιμή μηδέν, οπότε το ολοκλήρωμα της μέσα σε δύο περιόδους $[0, T_0]$ θα είναι επίσης μηδέν οπότε το δεύτερο ολοκλήρωμα απαλείφεται. Τελικά δηλαδή:

$$V_{\text{RMS}}^2 = \frac{V_0^2}{2}. \quad (1.22)$$

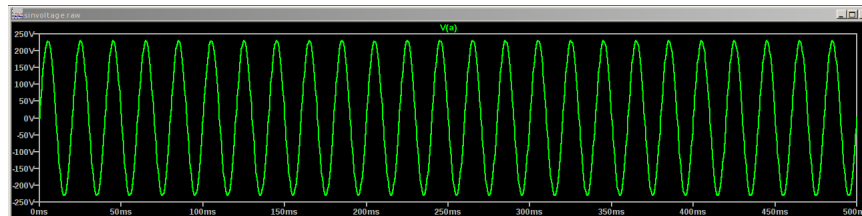
ή ισοδύναμα:

$$V_{\text{RMS}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}. \quad (1.23)$$

Αν αντικαταστήσουμε $V_0 = 230\text{V}$ τότε $V_{\text{RMS}} = 162.63\text{V}$ οπότε το αποτέλεσμα που μας υπολόγισε το LT-SPICE (162.61V) συμφωνεί πολύ καλά με το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Η μέση ισχύς που καταναλώνεται πάνω στην αντίσταση $R = 1\text{k}\Omega$ είναι, $P_{\text{avg}} = \frac{V_{\text{RMS}}^2}{R} \cong 26.45\text{W}$. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε και απευθείας την ισχύ που καταναλώνεται πάνω στην αντίσταση με το LT-SPICE. Κλείνουμε το παράθυρο της γραφικής παράστασης και ξανακάνουμε το simulation. Μετά στο παράθυρο της γραφικής παράστασης που είναι αρχικά κενό κάνουμε από το κεντρικό μενού Plot Setting → Add trace και στο dialog που εμφανίζεται γράφουμε $I(R1)*V(a)$ δηλαδή της στιγμιαίας ισχύος $p_R(t)$ όπως δείχνει η εικόνα 1.28. Στην εικόνα 1.29 δείχνουμε το αποτέλεσμα της γραφικής παράστασης του $I(R1)*V(a)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση



Εικόνα 1.25: Το πλαίσιο διαλόγου για τον καθορισμό των παραμέτρων της ημιτονοειδούς πηγής τάσης



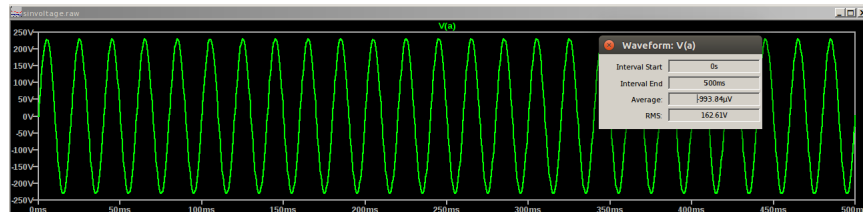
Εικόνα 1.26: Η ημιτονοειδής τάση που αντιστοιχεί στο κύκλωμα 1.25.

ισχύ πατώντας Ctrl και επιλέγοντας το $I(R_1) \cdot V(a)$ όπως και πριν. Το LT-SPICE μεταξύ άλλων υπολογίζει και την μέση τιμή της γραφικής παράστασης στο διάστημα που έχουμε επιλέξει να κάνουμε την προσομοίωση. Στην περίπτωση μας το διάστημα αυτό είναι ίσο με δέκα περιόδους $10T_0$ οπότε η μέση τιμή στο διάστημα $[0, 10T_0]$ θα είναι ίση με την μέση τιμή στο $[0, T_0]$ (εξαιτίας της περιοδικότητας) και επομένως θα μας δίνει την μέση ισχύ σύμφωνα με την (1.16). Στην συγκεκριμένη περίπτωση το LT-SPICE μας υπολογίζει την μέση ισχύ 26.44W που είναι πολύ κοντά στην θεωρητική τιμή που υπολογίσαμε λίγο πιο πάνω.

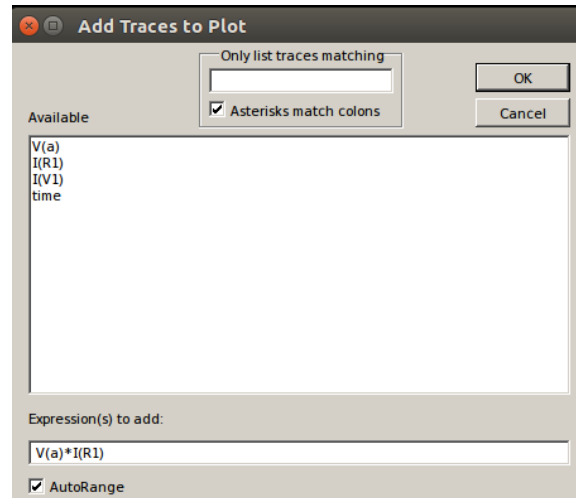
1.10 Η λογαριθμική κλίμακα

Πριν κλείσουμε αυτή την εισαγωγική ενότητα θα μιλήσουμε για την λογαριθμική κλίμακα που χρησιμοποιείτε αρκετά συχνά τόσο στην ηλεκτρονική όσο και στις τηλεπικοινωνίες. Η χρήση της λογαριθμικής κλίμακας οφείλεται στο γεγονός ότι συχνά έχουμε να κάνουμε με μερικούς πολύ μικρούς ή μεγάλους αριθμούς και επομένως οι λογάριθμοι βολεύουν, ενώ πολλές ιδιότητες των συστημάτων εκφράζονται πιο εύκολα στην λογαριθμική κλίμακα. Αρχικά ξεκινούμε με τον ορισμό των dB. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μέγεθος αδιάστατο (δηλαδή χωρίς μονάδες). Για παράδειγμα σε έναν ακουστικό ενισχυτή hi-fi μπορεί να μας ενδιαφέρει το πηλίκο G της ισχύος εξόδου P_{OUT} προς την ισχύ εισόδου P_{IN} ,

$$G = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}} \quad (1.24)$$



Εικόνα 1.27: Υπολογισμός της ενεργού τάσης.



Εικόνα 1.28: Υπολογισμός της ισχύος πάνω στην αντίσταση.

Το πηλίκο στην (1.24) ονομάζεται *κέρδος ισχύος* του ενισχυτή και μας ενδιαφέρει για όλα τα είδη των ενισχυτών. Ένας τυπικός ηλεκτρονικός ενισχυτής μπορεί να δώσει κέρδος ισχύος της τάξης του $G = 10^3 - 10^4$ ανάλογα με την εφαρμογή. Το πηλίκο ισχύος εξόδου προς ισχύ εισόδου, $\frac{P_{OUT}}{P_{IN}}$ δεν μας ενδιαφέρει μόνο για τους ενισχυτές αλλά και για τα μέσα μετάδοσης. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για τις απώλειες ισχύος L ,

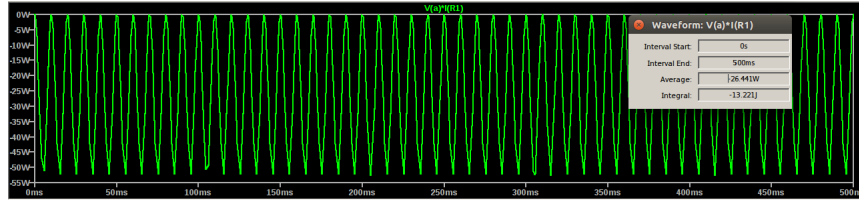
$$L = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}} < 1 \quad (1.25)$$

όπου η ανισότητα εκφράζει το γεγονός ότι στα μέσα μετάδοσης η ισχύς εξόδου είναι μικρότερη από την ισχύ εισόδου. Για ένα καλώδιο όπως το ομοαξονικό καλώδιο που χρησιμοποιούμε στις κεραίες των τηλεοράσεων ή της οπτικής ίνας, προκύπτει ότι οι απώλειες εξαρτώνται από το μήκος l του καλωδίου, βάση της παρακάτω σχέσης:

$$L = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = e^{-\alpha l} \quad (1.26)$$

όπου α είναι ένας συντελεστής που εξαρτάται από το είδος του καλωδίου. Τόσο για το G όσο και για το L χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο για την μετατροπή του στην λογαριθμική κλίμακα,

$$A[\text{dB}] = 10 \log_{10}(A) \quad (1.27)$$



Εικόνα 1.29: Ισχύς πάνω στην αντίσταση.

όπου το A είναι οποιοδήποτε αδιάστατο μέγεθος όπως το G ή το L . Αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα $G = 10^3$ θα πάρουμε,

$$G[\text{dB}] = 10\log_{10}(G) = 10\log_{10}(10^3) = 30\text{dB} \quad (1.28)$$

επομένως το κέρδος 10^3 αντιστοιχεί σε 30dB. Επίσης αν υποθέσουμε ότι οι απώλειες ενός καλωδίου είναι $L = 10^{-2}$, τότε

$$L[\text{dB}] = 10\log_{10}(L) = 10\log_{10}(10^{-2}) = -20\text{dB} \quad (1.29)$$

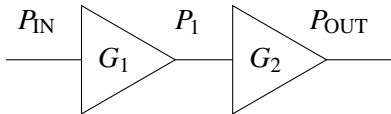
οπότε βλέπουμε ότι απώλειες $10^{-2} = \frac{1}{100}$ αντιστοιχούν σε -20dB . Επίσης είναι ενδιαφέρον να δούμε ότι αν αντικαταστήσουμε την (1.26) στην (1.27) τότε για $A = L$ θα έχουμε,

$$L[\text{dB}] = 10\log_{10}(e^{-\alpha l}) = -10\alpha l \log_{10} e = -(10\alpha \log_{10} e)l = -\alpha' l \quad (1.30)$$

όπου έχουμε ορίσει τον συντελεστή $\alpha' = 10\alpha \log_{10} e$. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την (??), στην λογαριθμική κλίμακα οι απώλειες που εισάγονται εξαιτίας των καλωδίων είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης l και όχι εκθετική όπως είναι στην γραμμική κλίμακα, σύμφωνα με την (1.25). Επομένως, στην λογαριθμική κλίμακα ο υπολογισμός των απωλειών είναι πιο εύκολη υπόθεση. Για παράδειγμα σε μία οπτική ίνα με συντελεστή απωλειών $\alpha' = 0.2\text{dB/Km}$ οι απώλειες μετά από $l = 100\text{Km}$ είναι $L[\text{dB}] = -0.2 \frac{\text{dB}}{\text{Km}} \times 100\text{Km} = -20\text{dB}$. Αν θέλουμε να πάμε ανάποδα, δηλαδή από την λογαριθμική κλίμακα, απλά αντιστρέφουμε την (1.27),

$$A = 10^{\frac{A[\text{dB}]}{10}} \quad (1.31)$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής του τύπου ας υπολογίσουμε σε τι αντιστοιχούν τα -3dB . Εφαρμόζουμε τον τύπο (1.31) και βρίσκουμε, $10^{-\frac{3}{10}} = 10^{-0.3} = 0.501 \cong \frac{1}{2}$. Επομένως απώλειες -3dB στη λογαριθμική κλίμακα αντιστοιχούν σε απώλειες ισχύος 50% στην γραμμική κλίμακα. Μία άλλη ιδιότητα που ισχύει είναι ότι ενώ στην γραμμική κλίμακα τα κέρδη G_1 και G_2 δύο



Εικόνα 1.30: Δύο ενισχυτές σε σειρά.

διαδοχικών ενισχυτών όπως αυτοί που βλέπουμε στην εικόνα 1.30 πολλαπλασιάζονται, $G = G_2 G_1$, για να βρούμε το συνολικό κέρδος, στην λογαριθμική κλίμακα προστίθενται, δηλαδή

$G[\text{dB}] = G_2[\text{dB}] + G_1[\text{dB}]$. Στην γραμμική κλίμακα, το συνολικό κέρδος ορίζεται ως $G = \frac{P_{\text{OUT}}}{P_{\text{IN}}}$ ενώ τα κέρδη των δύο επιμέρους βαθμίδων είναι $G_1 = \frac{P_1}{P_{\text{IN}}}$ και $G_2 = \frac{P_{\text{OUT}}}{P_1}$ οπότε,

$$G = \frac{P_{\text{OUT}}}{P_{\text{IN}}} = \frac{P_{\text{OUT}}}{P_1} \frac{P_1}{P_{\text{IN}}} = G_2 G_1 \quad (1.32)$$

Στην λογαριθμική κλίμακα θα έχουμε,

$$G[\text{dB}] = 10 \log_{10}(G_2 G_1) = 10 \log_{10} G_2 + 10 \log_{10} G_1 = G_2[\text{dB}] + G_1[\text{dB}] \quad (1.33)$$

Δηλαδή όπως είπαμε και παραπάνω, στην λογαριθμική κλίμακα το συνολικό κέρδος είναι το άθροισμα των επιμέρους κερδών. Αν δύο ενισχυτές τοποθετηθούν σε σειρά με κέρδος 10^2 (20dB) και 10 (10dB) τότε στην γραμμική κλίμακα το κέρδος είναι $100 \times 10 = 1000 = 10^3$ ενώ στην λογαριθμική κλίμακα θα έχουμε $20\text{dB} + 10\text{dB} = 30\text{dB}$. Στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε την λογαριθμική κλίμακα σε διάφορες περιπτώσεις και θα δούμε ότι το LT-SPICE πραγματοποιεί μία σειρά από υπολογισμούς απευθείας σε αυτήν. Η λογαριθμική κλίμακα χρησιμοποιείται και για την ισχύ του σήματος μόνο που ο ορισμός είναι λίγο διαφορετικός. Αν έχουμε την ισχύ P σε μονάδες W ή mW τότε η ισχύς σε dBm καθορίζεται από την σχέση:

$$P[\text{dBm}] = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad (1.34)$$

ενώ για να πάμε στην γραμμική κλίμακα από την λογαριθμική χρησιμοποιούμε την αντίστροφη σχέση:

$$P = 1\text{mW} \times 10^{\frac{P[\text{dBm}]}{10}} \quad (1.35)$$

Για παράδειγμα αν η ισχύς είναι ίση με $P = 1\text{W} = 10^3\text{mW}$ θα έχουμε $P[\text{dBm}] = 10 \log_{10} \left(\frac{10^3\text{mW}}{1\text{mW}} \right) = 30\text{dBm}$. Αν η ισχύς είναι ίση με -10dBm στην λογαριθμική κλίμακα τότε στην γραμμική κλίμακα θα είναι ίση με $P = 1\text{mW} \times 10^{-10/10} = 0.1\text{mW}$. Έχει ενδιαφέρον να δούμε πως γράφουμε τον *ισολογισμό ισχύος* στην λογαριθμική κλίμακα. Ο *ισολογισμός ισχύος* σε ένα κύκλωμα ή σύστημα μας λέει πως σχετίζεται η ισχύς εισόδου με την ισχύ εξόδου. Στο κύκλωμα της εικόνας 1.30 ο *ισολογισμός ισχύος* στην γραμμική κλίμακα προκύπτει πολύ απλά από την (1.32),

$$P_{\text{OUT}} = G_2 G_1 P_{\text{IN}} \quad (1.36)$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη με 1mW και λογαριθμίζοντας θα έχουμε,

$$10 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{OUT}}}{1\text{mW}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{G_2 G_1 P_{\text{IN}}}{1\text{mW}} \right) \quad (1.37)$$

και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων,

$$P_{\text{OUT}}[\text{dBm}] = P_{\text{IN}}[\text{dBm}] + G_1[\text{dB}] + G_2[\text{dB}] \quad (1.38)$$

Η εξίσωση (1.38) εκφράζει τον *ισολογισμό ισχύος* στη λογαριθμική κλίμακα στην οποία για να βρούμε την τελική ισχύ P_{OUT} σε dBm αρκεί να προσθέσουμε τα επιμέρους κέρδη των ενισχυτών σε dB, $G_i[\text{dB}]$ στην αρχική ισχύ P_{IN} σε dBm. Αν είχαμε απώλειες στο σύστημα θα αφαιρούσαμε

το άθροισμα τους από τον ισολογισμό ισχύος. Η γενικότερη σχέση για τον υπολογισμό ισχύος στην λογαριθμική κλίμακα είναι

$$P_{\text{OUT}}[\text{dBm}] = P_{\text{IN}}[\text{dBm}] + \sum_k G_k[\text{dB}] + \sum_m L_m[\text{dB}] \quad (1.39)$$

Το πρώτο άθροισμα στο δεξιό μέρος της (1.39) είναι το άθροισμα του κέρδους ισχύος G_k όλων των βαθμίδων ενίσχυσης ενώ το δεύτερο άθροισμα είναι το σύνολο των απωλειών L_m . Η (1.39) αποτελεί συχνά την αφετηρία της ανάλυσης ενός συστήματος ειδικά θεωρητικά. Στην πράξη θα πρέπει να λάβει κανείς υπόψη του ότι το κέρδος ισχύος G_k εξαρτάται από την ισχύ που έρχεται από την προηγούμενη βαθμίδα P_{k-1} , $G_k = G_k(P_{k-1})$ ένα φαινόμενο που οδηγεί σε *κορεσμό* του κέρδους, δηλαδή από ένα σημείο και έπειτα όσο αυξάνει η ισχύς εισόδου, η ισχύς εξόδου δεν μεταβάλλεται σημαντικά. Θα δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες αυτό το φαινόμενο στις παρακάτω ενότητες.

1.11 Τι μάθαμε

Με αυτά και με αυτά τελειώσαμε ήδη την πρώτη εισαγωγική ενότητα που αφορά το μάθημα. Μάθαμε κάποια βασικά πράγματα για το LT-SPICE και είδαμε δύο πολύ βασικά στοιχεία της ηλεκτρονικής, τις αντιστάσεις και τους πυκνωτές. Στην περίπτωση της αντίστασης τα πράγματα είναι πολύ απλά, χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ohm για τους υπολογισμούς μας. Στην περίπτωση του πυκνωτή, πρέπει να λάβουμε υπόψη την χρονική απόκριση του πυκνωτή που δεν μπορεί να ανταποκριθεί πάντα όσο γρήγορα θέλουμε στις αλλαγές της τάσης εισόδου. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε μία ισοδύναμη εναλλακτική περιγραφή του κυκλώματος RC που απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση στο λεγόμενο πεδίο των συχνοτήτων. Τέλος στην ενότητα αυτή μάθαμε κάποια πράγματα για την ισχύ ενός ηλεκτρονικού σήματος και για την λογαριθμική κλίμακα.

2. Το πεδίο των συχνοτήτων

2.1 Εισαγωγικά

Η έννοια της συχνότητας είναι θεμελιώδης στην ηλεκτρονική αλλά και γενικότερα στις θετικές επιστήμες. Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε πέρα από το LT-SPICE και το GNU-OCTAVE για να μας βοηθήσει να καταλάβουμε καλύτερα την ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων. Το GNU-OCTAVE είναι ελεύθερο λογισμικό και μπορείτε να το κατεβάσετε στο:

<https://www.gnu.org/software/octave/>

Το GNU-OCTAVE είναι μία πολύ απλή γλώσσα προγραμματισμού για όσους θέλουν να κάνουν υπολογισμούς. Θα το χρησιμοποιήσουμε μεταξύ άλλων για τον υπολογισμό των φασμάτων μερικών σημάτων ώστε να αρχίσουμε να καταλαβαίνουμε λίγο καλύτερα την χρησιμότητα του πεδίου των συχνοτήτων.

Ξεκινάμε με λίγη θεωρία όμως πρώτα. Ένα σήμα $x = x(t)$, είναι απλά μία συνάρτηση του χρόνου t . Πολλές φορές μας βολεύει στους υπολογισμούς μας να αναπαριστούμε το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων. Αυτό γίνεται με διάφορους τρόπους. Αν το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T , δηλαδή $x(t+T) = x(t)$, τότε μπορούμε να γράψουμε το σήμα ως εξής:

$$x(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.1)$$

όπου το j είναι η ρίζα του -1 , $j = \sqrt{-1}$ ενώ οι συχνότητες f_k είναι ανάλογες του αντιστρόφου της περιόδου, $f_k = \frac{k}{T}$. Το άθροισμα περιλαμβάνει όλους τους ακεραίους k από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$. Οι συντελεστές X_k ονομάζονται συντελεστές Fourier και είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι καθορίζουν το πλάτος κάθε φασματικής συνιστώσας στις συχνότητες f_k . Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε το σήμα τάσης,

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t) \quad (2.2)$$

Πρόκειται για ένα απλό συν συνημιτονοειδές σήμα, μία προσέγγιση του οποίου μπορούμε να φτιάξουμε στις γεννήτριες που έχουμε στο εργαστήριο. Είναι πολύ απλό να γράψουμε το σήμα

αυτό σε σειρά Fourier. Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ιδιότητα που λέει ότι $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$, οπότε

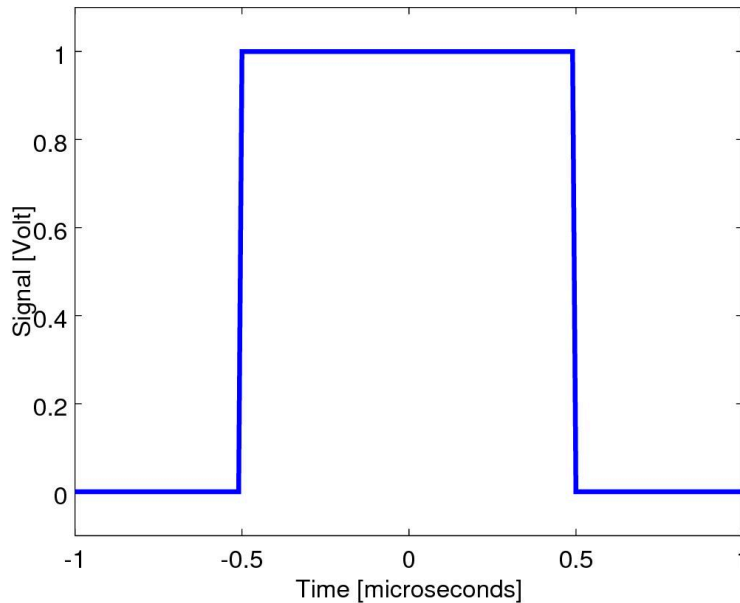
$$V(t) = \frac{V_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{V_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.3)$$

Αν ορίσουμε $V_{-1} = V_1 = \frac{V_0}{2}$ και $V_k = 0$ για $k \neq \pm 1$ ενώ θεωρήσουμε ότι $f_k = k f_0$ θα έχουμε

$$V(t) = \sum_k V_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.4)$$

που είναι ακριβώς η (2.1). Επομένως προκύπτει ότι η σειρά Fourier του της συνημιτονοειδούς σήματος έχει δύο μη-μηδενικούς συντελεστές που αντιστοιχούν στις συχνότητες $f = \pm f_0$. Στην ουσία πρόκειται για την αρχική συχνότητα f_0 και την αρνητική της. Οι συντελεστές που αντιστοιχούν στις συχνότητες $f = \pm f_0$ είναι οι $V_{-1} = V_1 = \frac{V_0}{2}$. Σε αυτό το παράδειγμα μπορέσαμε να κατασκευάσουμε την σειρά Fourier από το αρχικό σήμα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$. Τι γίνεται όμως για σήματα για τα οποία αυτή η διαδικασία δεν είναι τόσο ξεκάθαρη; Ας πάρουμε για παράδειγμα μία σειρά παλμών όπως αυτή που κατασκευάσαμε στην ενότητα 1.7 το οποίο για $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, περιγράφεται απλά από την σχέση:

$$V(t) = \begin{cases} V_1, & \text{όταν } -\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0, & \text{όταν } t > \frac{T_1}{2} \text{ ή } t < -\frac{T_1}{2} \end{cases} \quad (2.5)$$



Εικόνα 2.1: Το σήμα τάσης που αντιστοιχεί στην (2.5)

Στην περίπτωση των παλμών που φτιάξαμε στο 1.7 είχαμε διάρκεια παλμού $T_1 = 1 \mu\text{s}$, περίοδο σήματος ίση με $T = 2 \mu\text{s}$ ενώ η μέγιστη τιμή τάσης είναι $V_1 = 1 \text{V}$. Το σήμα τάσης που αντιστοιχεί στην (2.5) παριστάνεται γραφικά στην εικόνα 2.1. Υπάρχει μία μικρή διαφορά μεταξύ του

σήματος στην (2.5) και του σήματος που γεννήσαμε στην ενότητα 1.7. Στη δεύτερη περίπτωση ο παλμός ξεκινούσε με μηδέν Volt και μετά από $1\mu\text{s}$ γινόταν ίσος με 1V . Στην περίπτωση της (2.5) ο παλμός είναι κεντραρισμένος έτσι ώστε το $t = 0$ να είναι το κέντρο της διάρκειας του όπως δείχνει και 2.1. Στην ουσία όμως πρόκειται για το ίδιο σήμα, θεωρούμε αυτή την μετατόπιση επειδή απλοποιεί λίγο τους υπολογισμούς. Μπορούμε να φτιάξουμε το τετραγωνικό σήμα στο OCTAVE ώστε να το επεξεργαστούμε στην συνέχεια. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το αρχείο `square_pulse.m` το οποίο δείχνουμε στο listing 2.1.

```

1 % Definition of parameters
2
3 T=2e-6;           % Signal period (sec)
4 T1=1e-6;         % Pulse duration (sec)
5 Dt=T/200;       % Sampling step on the t-axis
6 V1=1;           % Pulse peak power (Vt)
7
8 % Build the t-axis
9 t=-T/2:Dt:T/2;
10
11 % Build the pulse vector (initially all zeroes)
12 p=zeros(1,length(t));
13
14 % Create the pulse
15 for m=1:length(t)
16     tcur=t(m);
17     % Outside the pulse duration pulse is equal to zero
18     if tcur<-T1/2 || tcur>T1/2
19         p(m)=0;
20     % Inside the pulse duration pulse is equal to V1
21     else
22         p(m)=V1;
23     end
24 end
25
26
27 % Plot the pulse
28
29 close all;
30 figure(1);
31 plot(t/1e-6,p,'LineWidth',3);
32
33 % Set y-axis limit
34 ylim([-0.1 1.1]);
35
36 % Set font type and size
37 set(gca,'FontName','FreeSerif','FontSize',16)
38
39 % Set axis labels
40 xlabel('Time [microseconds]');
41 ylabel('Signal [Volt]');
42
43 % Save to file
44 print -djpg ../Pictures/squarepulse.jpg

```

Listing 2.1: Το αρχείο `square_pulse.m`

Όπως βλέπουμε η γλώσσα του OCTAVE είναι αρκετά κατανοητή και στην ουσία πρόκειται για μία απλή παραλλαγή της γλώσσας C. Στις γραμμές 3 έως 6 ορίζουμε τις παραμέτρους του παλμού. T είναι η περίοδος του σήματος, T_1 η διάρκεια του παλμού στην οποία είναι ίσος με V_1 . Η παράμετρος Dt ορίζει την δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου, δηλαδή πόσο πυκνά παίρνουμε τις χρονικές στιγμές. Το σήμα στην (2.5) είναι αναλογικό σήμα δηλαδή τυπικά πρέπει να υπολογιστεί για κάθε $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Ωστόσο στο OCTAVE μπορούμε να το αναπαραστήσουμε

μόνο σε πεπερασμένο αριθμό σημείων t_1, \dots, t_N . Όσο πιο πυκνά είναι τα σημεία αυτά τόσο πιο ακριβείς θα είναι και οι υπολογισμοί μας. Ωστόσο δεν μπορούμε να θεωρήσουμε και πάρα πολλά σημεία, επειδή οι υπολογισμοί μας θα είναι πολύ αργοί και θα μας τελειώσει η μνήμη του υπολογιστή μας. Στην γραμμή 9 φτιάχνουμε το διάνυσμα (πίνακα) t που θα αποθηκεύει τις χρονικές μας στιγμές t_1, \dots, t_N . Λέμε στο OCTAVE να ξεκινήσει από το $-T/2$ και να φτάσει μέχρι το $T/2$ με βήμα Dt . Η επόμενη εντολή στην γραμμή 12, `p=zeros(1,length(t))` φτιάχνει το διάνυσμα (πίνακα) που θα κρατά τις τιμές του παλμού για τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές $p(t_1), \dots, p(t_N)$. Αρχικά γεμίζουμε το διάστημα με μηδενικά και στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις τιμές που πρέπει να αποθηκεύσουμε. Αυτό γίνεται με το `for loop` στις γραμμές 15-24. Το `for` διατρέχει όλα τα σημεία του διανύσματος t . Για κάθε χρονική στιγμή έχουμε ένα `if` το οποίο κοιτάει να δει αν είμαστε εντός ή εκτός του διαστήματος $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Αν είμαστε εντός τότε η τιμή του σήματος θα είναι ίση με V_1 σύμφωνα και με την εξίσωση (2.5). Αν είμαστε εκτός τότε η τιμή παραμένει μηδέν. Ο τελεστής `||` είναι το λογικό OR όπως ακριβώς και στην γλώσσα C. Οι εντολές που υπάρχουν στις γραμμές 29-44 κάνουν την γραφική απεικόνιση του σήματος. Στην 29 κλείνουμε όλα τα παράθυρα γραφικών παραστάσεων (αν υπάρχουν) και στην συνέχεια δημιουργούμε το πρώτο παράθυρο στην γραμμή 30. Στη γραμμή 31 η εντολή `plot` κάνει γραφική παράσταση θεωρώντας τις τιμές του p στον y άξονα και τις τιμές του t στον x άξονα. Η παράμετρος `LineWidth` καθορίζει το πλάτος της γραμμής της γραφικής την οποία την θέτουμε ίση με 3 (η αρχική τιμή που θεωρεί το OCTAVE είναι 1 αλλά αντιστοιχεί σε μάλλον λεπτή γραμμή οπότε το αλλάξαμε). Στην γραμμή 34, η εντολή `ylim` θέτει τα όρια του άξονα των y . Επιλέγουμε τα $-0.1V$ και $1.1V$ ώστε να καταλαβαίνουμε αρκετά καλά τις τιμές του παλμού μας. Στην γραμμή 37 θέτουμε τον τύπο της γραμματοσειράς που χρησιμοποιούμε στην απεικόνιση και το μέγεθος της. Προσοχή επειδή η γραμματοσειρά `FreeSerif` υπάρχει μόνο για το Linux, όσοι τρέχετε το OCTAVE σε Windows θα πρέπει να την αλλάξετε, χρησιμοποιήστε π.χ. `TimesNewRoman`. Οι εντολές `xlabel` και `ylabel` στις γραμμές 40 και 41, θέτουν τους τίτλους των αξόνων x και y . Τέλος η εντολή `print` φτιάχνει μία JPG εικόνα που περιέχει την γραφική παράσταση. Δεν είναι απαραίτητο να το κάνουμε αυτό, το OCTAVE θα μας βγάλει ούτως ή άλλως την γραφική παράσταση στην οθόνη. Τρέχοντας το αρχείο θα πρέπει να πάρουμε μία γραφική παράσταση σαν αυτή που βλέπουμε στην εικόνα 2.1. Οι πιο πεπειραμένοι χρήστες του OCTAVE θα σας πουν ότι δεν είναι ο καλύτερος δυνατός τρόπος να γεννήσουμε ένα παλμό στο OCTAVE αλλά ίσως είναι ο πιο εύκολα κατανοητός. Τώρα που έχουμε το σήμα μας, μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα του στο GNU-OCTAVE.

2.2 Υπολογισμός του Φάσματος

Στη γενικότερη περίπτωση όπου δεν μπορούμε να μαντέψουμε έναν τρόπο για να φτιάξουμε την σειρά Fourier όπως κάναμε στην περίπτωση του σήματος της συνημιτονοειδούς τάσης στην (2.2), υπάρχει ένας τύπος που μας δίνει τους συντελεστές Fourier,

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (2.6)$$

Ξέρω ότι θα δυσανασχετήσετε με το ολοκλήρωμα αλλά ως πληροφορικάριοι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το OCTAVE για να το υπολογίσουμε. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το αρχείο `spec.m` το οποίο παρουσιάζουμε στο listing 2.2.

```
1 % Definition of parameters
```

```
2
```

```

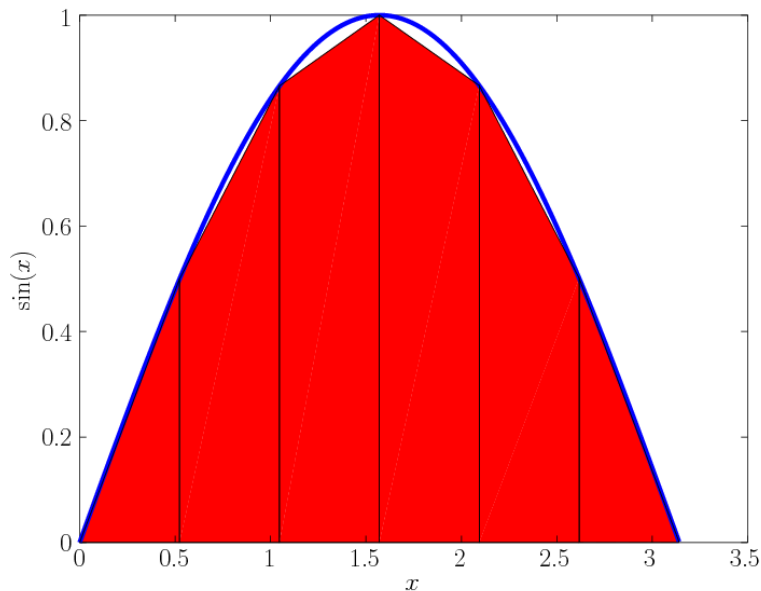
3 T=2e-6;           % Signal period (sec)
4 T1=1e-6;         % Pulse duration (sec)
5 Dt=T/200;        % Sampling step on the t-axis
6 V1=1;           % Pulse peak power (Vt)
7 M=10;           % Number of positive and negative coefficients to estimate
8
9 % Build the t-axis
10 t=-T/2:Dt:T/2;
11
12 % Build the pulse vector (initially all zeroes)
13 p=zeros(1,length(t));
14
15 % Create the pulse
16 for m=1:length(t)
17     tcur=t(m);
18     % Outside the pulse duration pulse is equal to zero
19     if tcur<-T1/2 || tcur>T1/2
20         p(m)=0;
21     % Inside the pulse duration pulse is equal to V1
22     else
23         p(m)=V1;
24     end
25 end
26
27 % Calculate Fourier coefficients
28
29 % Coefficient indices
30 k=-M:1:M;
31
32 % Coefficient frequencies
33 fk=k/T;
34
35 % Coefficient vector
36 Vk=zeros(1,length(k));
37
38 % Coefficient estimation
39 for i=1:length(k)
40     Vk(i)=1/T*trapz(t,p.*exp(-j*2*pi*fk(i)*t));
41 end
42
43 % Plot the pulse
44
45 close all;
46 figure(1);
47 stem(fk/1e6,abs(Vk),'LineWidth',3);
48
49 % Set font type and size
50 set(gca,'FontName','FreeSerif','FontSize',16)
51
52 % Set axis labels
53 xlabel('Frequency [MHz]');
54 ylabel('Magnitude of Fourier Coefficient [Vt]');
55
56 % Save to file
57 print -djpg ../Pictures/specpulse.jpg

```

Listing 2.2: Το αρχείο spec.m

Σε πολλά σημεία η λογική είναι παρόμοια με αυτή του αρχείου square_pulse.m που είδαμε στο listing 2.1. Συγκεκριμένα στις γραμμές 3 έως 26 κατασκευάζουμε τον παλμό όπως και πριν. Η μόνη διαφορά είναι η δήλωση της παραμέτρου M στην γραμμή 7 που είναι ο αριθμός των συντελεστών Fourier θετικών και αρνητικών συχνοτήτων που θα υπολογιστεί. Όπως θα δούμε παρακάτω υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν στις συχνότητες

$f_{-M}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_M$ δηλαδή το σύνολο των συντελεστών που θα υπολογίσουμε είναι $2 + 1$. Οι δείκτες των συχνοτήτων ορίζονται στην γραμμή 30 ενώ στην 33 υπολογίζουμε τις συχνότητες f_k . Στην 36 μηδενίζουμε το διάνυσμα που θα περιέχει τους συντελεστές Fourier που θα υπολογίσουμε. Ίσως το πιο σημαντικό τμήμα του κώδικα είναι το for στις γραμμές 39-41 όπου επί της ουσίας υπολογίζονται οι συντελεστές Fourier. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την εντολή trapz του OCTAVE. Το trapz(x,f) υπολογίζει αριθμητικά το ολοκλήρωμα του f στο διάστημα που ορίζεται από το x, δηλαδή το $I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx$ όπου x_{\min} και x_{\max} είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα που περιέχονται στον τιμών του x που περιέχονται στο διάνυσμα x του OCTAVE. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, το OCTAVE με την trapz χρησιμοποιεί την προσέγγιση του τραpezίου. Στην ουσία προσεγγίζει το ολοκλήρωμα I , δηλαδή το εμβαδό της συνάρτησης $f(x)$ με το άθροισμα πολλών εμβαδών τραpezίου όπως δείχνει και η εικόνα 2.2.



Εικόνα 2.2: Αριθμητική ολοκλήρωση με τον κανόνα του τραpezίου

Στην εικόνα 2.2 έχουμε παραστήσει γραφικά την συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Το ολοκλήρωμα $= \int_0^\pi \sin x dx$ είναι απλά το εμβαδό που ορίζει η καμπύλη της συνάρτησης με τον άξονα του x . Στο σχήμα δείχνουμε την προσέγγιση του εμβαδού με χρήση 6 επιμέρους τραpezίων. Αν x_1, \dots, x_N είναι τα σημεία στο διάνυσμα x τότε το $n^{\text{οστό}}$ τραπέζιο έχει ύψος μετρούμενο στον άξονα των x ίσο με $x_{n+1} - x_n$ ενώ η βάση του είναι ίσες με $f(x_{n+1})$ και $f(x_n)$ αντίστοιχα. Οπότε το εμβαδό του κάθε τραpezίου είναι $\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)(f(x_{n+1}) + f(x_n))$. Αθροίζοντας όλα τα εμβαδά των τραpezίων έχουμε:

$$I \cong \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (x_{n+1} - x_n)(f(x_{n+1}) + f(x_n)) \quad (2.7)$$

Η εξίσωση (2.7) είναι ο κανόνας του τραpezίου που χρησιμοποιεί το OCTAVE για να στη συνάρτηση trapz για να υπολογίσει προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα. Κάνουμε μία γρήγορη δοκιμή της συνάρτησης trapz με το αρχείο trapstest.m που παρουσιάζεται στο listing (2.3). Στην

ουσία υπολογίζουμε το $\int_0^\pi \sin x dx$ χρησιμοποιώντας διαφορετικό αριθμό τραπεζίων (6, 12, 24 και 48 τραπέζια). Κάθε φορά που εφαρμόζουμε την `trapz` στις γραμμές 7,13,19 και 25 έχουμε παραλείψει στο τέλος της εντολής το ελληνικό ερωτηματικό ";". Όταν το κάνουμε αυτό, το OCTAVE τυπώνει το αποτέλεσμα του υπολογισμού στην οθόνη. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει όταν διαδοχικά αυξάνουμε τον αριθμό των σημείων. Αν δούμε στο παράθυρο εντολών του OCTAVE μετά την εκτέλεση έχουν τυπωθεί οι τιμές:

I6 = 1.9541

I12 = 1.9886

I24 = 1.9971

I48 = 1.9993

```

1 % Trapezium rule tests
2
3 % 6 point trapezium rule
4 M=6;
5 x=0:pi/M:pi;
6 y=sin(x);
7 I6=trapz(x,y)
8
9 % 12 point trapezium rule
10 M=12;
11 x=0:pi/M:pi;
12 y=sin(x);
13 I12=trapz(x,y)
14
15 % 24 point trapezium rule
16 M=24;
17 x=0:pi/M:pi;
18 y=sin(x);
19 I24=trapz(x,y)
20
21 % 48 point trapezium rule
22 M=48;
23 x=0:pi/M:pi;
24 y=sin(x);
25 I48=trapz(x,y)

```

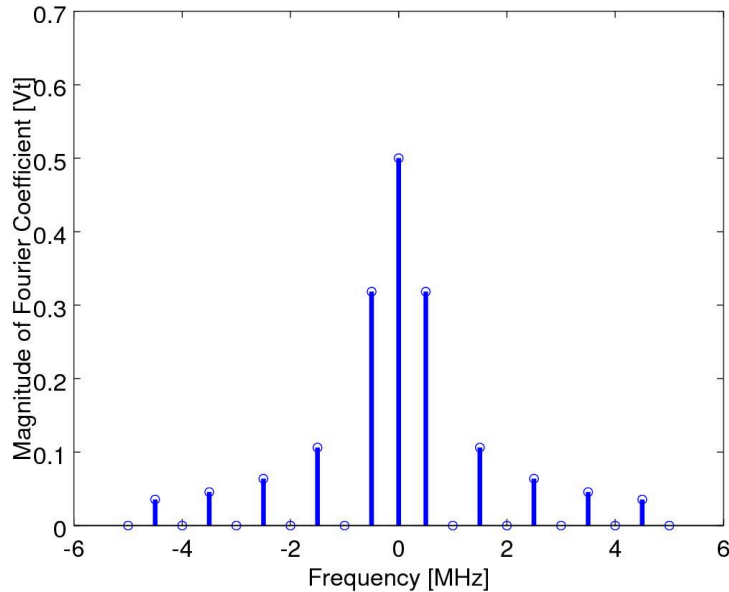
Listing 2.3: Το αρχείο `traptest.m`

Φαίνεται ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των τραπεζίων τόσο πλησιάζουμε κοντά στο 2 που δεν είναι τυχαίο αφού για το ολοκλήρωμα αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα είναι όντως το 2 αφού $\int \sin x dx = -\cos x$ και:

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \quad (2.8)$$

Επομένως είναι λογικό όσο αυξάνει η ακρίβεια, δηλαδή αριθμός των τραπεζίων που χρησιμοποιούμε τόσο πλησιάζει το αποτέλεσμα στην θεωρητική του τιμή, το 2. Η μέθοδος του τραπεζίου είναι μία απλή τεχνική να υπολογίζουμε με καλή ακρίβεια το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης αρκεί η συνάρτηση να μην είναι πολύ απότομη και να μην κάνει πάρα πολλές διελεύσεις από το μηδέν. Ας επανέλθουμε τώρα στο listing 2.2 του αρχείου `spec.m` που υπολογίζει τους συντελεστές Fourier της τάσης. Αφού είδαμε σε γενικές γραμμές που λειτουργεί η `trapz` στον βρόγχο `for` στις γραμμές 39-41 απομένει η απεικόνιση των συντελεστών που έχουμε υπολογίσει. Η λογική είναι παρόμοια με αυτή του αρχείου `square_pulse.m` στο listing 2.1 μόνο που τώρα χρησιμοποιούμε την εντολή `stem` αντί της `plot` στην γραμμή 47. Η επιλογή είναι καθαρά για...

εικαστικούς λόγους. Η stem χρησιμοποιείται συνήθως όταν έχουμε να παραστήσουμε λίγα στοιχεία μίας ακολουθίας όπως στην περίπτωση μας οι τιμές των συντελεστών Fourier V_k . Το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3: Οι συντελεστές Fourier για το σήμα τάσης που αντιστοιχεί στην (2.5)

Παρατηρούμε ότι η stem στην ουσία παριστάνει γραφικά την ακολουθία των συντελεστών τραβώντας μία κάθετη γραμμή από τον οριζόντιο άξονα που βοηθά να αντιληφθούμε λίγο καλύτερα τις τιμές της ακολουθίας. Επίσης παρατηρείστε ότι στην γραμμή 47 έχουμε επιλέξει να κάνουμε την γραφική παράσταση του $\text{abs}(V_k)$ δηλαδή του μέτρου του V_k , $|V_k|$. Αυτό το κάνουμε επειδή στην γενική περίπτωση τα V_k είναι μιγαδικά και εμείς μπορούμε να κάνουμε απεικόνιση μόνο πραγματικών τιμών. Θα μπορούσαμε βέβαια να επιλέξουμε να κάνουμε απεικόνιση του πραγματικού ή/και του φανταστικού μέρους των συντελεστών.

Η εικόνα 2.3 δείχνει ότι ο μεγαλύτερος σε μέτρο συντελεστής αντιστοιχεί στην συχνότητα $f = f_0 = 0$. Οι αμέσως μεγαλύτεροι συντελεστές είναι στις συχνότητες $f = \pm f_1 = 1\text{MHz}$. Επίσης για $f > f_1$ και για $f < -f_1$ ανά δύο οι συντελεστές V_k μηδενίζονται ενώ οι μη μηδενικοί συντελεστές μειώνονται όσο αυξάνεται η συχνότητα. Συνήθως θέτουμε κάποιο όριο πέραν το οποίου δεν έχει νόημα να υπολογίζουμε τους συντελεστές. Π.χ. εάν ο λόγος $L_k = \left| \frac{V_k}{V_{\max}} \right|^2$ είναι πολύ μικρός (π.χ. μικρότερος του 0.1 ή 10%) μπορούμε να αγνοήσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές. Θα δούμε τον λόγο για τον οποίο χρησιμοποιούμε το τετράγωνο $|\cdot|^2$ στο επόμενο κεφάλαιο. Η εικόνα 2.3 περιγράφει το φάσμα του σήματος. Αν πρόκειται να μεταδώσουμε το σήμα θα πρέπει το μέσο μετάδοσης (π.χ. καλώδιο) να έχει καλή απόκριση συχνοτήτων τουλάχιστον μέχρι τα 3.5MHz όπου οι συντελεστές Fourier δεν έχουν ακόμα μειωθεί. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε με λίγη μεγαλύτερη λεπτομέρεια τι συμβαίνει όταν "κόβονται" μερικοί συντελεστές στις υψηλές συχνότητες.

Πως μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τους υπολογισμούς που κάνουμε με την trapz στο 2.2; Η αλήθεια είναι πως όταν κάνουμε τέτοιου είδους αριθμητικούς υπολογισμούς πολλά πράγματα

μπορούνε να πάνε στραβά. Συνήθως μία καλή μέθοδος είναι να δοκιμάζουμε το αποτέλεσμα που παίρνουμε σε μία ειδική περίπτωση που γνωρίζουμε το αποτέλεσμα και θεωρητικά. Στην περίπτωση του σήματος που ορίζεται στην (2.5) μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier και θεωρητικά. Ας το προσπαθήσουμε. Αν αντικαταστήσουμε την (2.5) στην (2.6) θα πάρουμε:

$$V_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{-j2\pi f_k t} dt. \quad (2.9)$$

Το ολοκλήρωμα στην (2.9) υπολογίζεται πιο εύκολα από ότι νομίζετε. Καταρχήν θυμηθείτε ότι για $\alpha \neq 0$, $\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$. Στην (2.9) έχουμε $\alpha = -j2\pi f_k$ οπότε αν $f_k \neq 0$, το ολοκλήρωμα γράφεται ως:

$$V_k = \frac{1}{T} \frac{e^{j\pi f_k T_1} - e^{-j\pi f_k T_1}}{j2\pi f_k}. \quad (2.10)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι $\frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) = \sin x$, η (2.10) γράφεται ως εξής:

$$V_k = \frac{T_1}{T} \frac{\sin(\pi f_k T_1)}{\pi f_k T_1} \quad (2.11)$$

Όταν $f_k = 0$ τότε τα πράγματα είναι ακόμα πιο εύκολα επειδή το ολοκλήρωμα στην (2.10) γράφεται ως εξής,

$$V_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} dt = \frac{T_1}{T} \quad (2.12)$$

Ορίζοντας την συνάρτηση $\text{sinc}(x)$ ως:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x = 0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{όταν } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

τότε οι συντελεστές Fourier γράφονται:

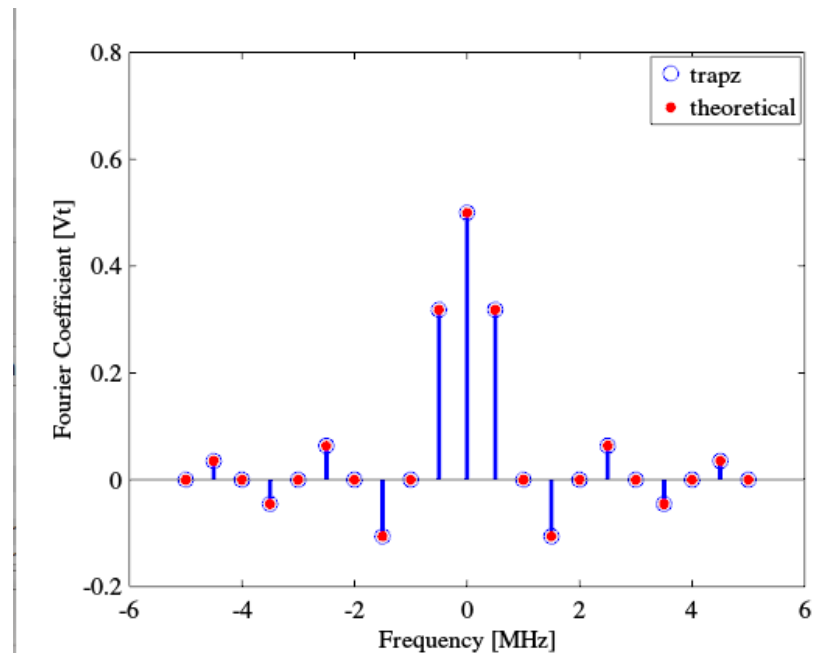
$$V_k = \frac{T_1}{T} \text{sinc}(f_k T_1) \quad (2.14)$$

Η (2.14) σε συνδυασμό με την (2.13) δείχνει ότι οι συντελεστές Fourier V_k στην περίπτωση του σήματος (2.5) είναι πραγματικοί και καθορίζονται από την συνάρτηση sinc . Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα που προκύπτει από την αριθμητική ολοκλήρωση που κάνουμε με την συνάρτηση trapz με την θεωρητικό αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε στην (2.14).

```

1 % Definition of parameters
2
3 T=2e-6; % Signal period (sec)
4 T1=1e-6; % Pulse duration (sec)
5 Dt=T/200; % Sampling step on the t-axis
6 V1=1; % Pulse peak power (Vt)
7 M=10; % Number of positive and negative coefficients to estimate
8
9 % Build the t-axis
10 t=-T/2:Dt:T/2;
11

```



Εικόνα 2.4: Σύγκριση θεωρητικής και αριθμητικής προσέγγισης για τον υπολογισμό των V_k

```

12 % Build the pulse vector (initially all zeroes)
13 p=zeros(1,length(t));
14
15 % Create the pulse
16 for m=1:length(t)
17     tcur=t(m);
18     % Outside the pulse duration pulse is equal to zero
19     if tcur<-T1/2 || tcur>T1/2
20         p(m)=0;
21     % Inside the pulse duration pulse is equal to V1
22     else
23         p(m)=V1;
24     end
25 end
26
27 % Calculate Fourier coefficients
28
29 % Coefficient indices
30 k=-M:1:M;
31
32 % Coefficient frequencies
33 fk=k/T;
34
35 % Coefficient vector
36 Vk=zeros(1,length(k));
37
38 % Coefficient estimation
39 for i=1:length(k)
40     Vk(i)=1/T*trapz(t,p.*exp(-j*2*pi*fk(i)*t));
41 end
42
43 % theoretical value of the Fourier coefficients
44 Vk2=T1/T*sinc(T1*fk);
45
46 % Plot the pulse spectrum

```

```

47 close all;
48 hf=figure(1);
49 hold on;
50 stem(fk/1e6,real(Vk), 'LineWidth',3, 'MarkerSize',10);
51 plot(fk/1e6,Vk2, 'ro', 'MarkerFaceColor',[1.0,0.0,0.0]);
52 h=legend('trapz', 'theoretical');
53 set(h, 'FontName', 'FreeSerif', 'FontSize',16);
54
55
56
57 % Set font type and size
58 set(gca, 'FontName', 'FreeSerif', 'FontSize',16)
59
60 % Set axis labels
61 xlabel('Frequency [MHz]');
62 ylabel('Fourier Coefficient [Vt]');

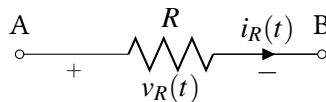
```

Listing 2.4: Το αρχείο specsinc.m

Στο 2.4 κάνουμε μία σύγκριση του αποτελέσματος για τα V_k που λαμβάνουμε με την μέθοδο του τραπεζιού με την εξίσωση `eqrefeq:fourierc4`. Παρατηρούμε ότι έχουμε πολύ καλή συμφωνία μεταξύ της θεωρητικής και της αριθμητικής μεθόδου. Το αρχείο `specsinc.m` που χρησιμοποιούμε για να κάνουμε την σύγκριση φαίνεται στο listing 2.4. Η μόνη διαφορά με τον αρχείο `spec.m` στο listing 2.2 είναι ο υπολογισμός και του θεωρητικού αποτελέσματος στην μεταβλητή OCTAVE `Vk2` στην γραμμή 44 και η ταυτόχρονη απεικόνιση του V_k και του V_{k2} στις γραμμές 49-61. Στην γραμμή 50 το `hold on` δηλώνει ότι στο `figure 1` που έχουμε δημιουργήσει οι διαδοχικές εντολές απεικόνισης (στην συγκεκριμένη περίπτωση το `stem` στη γραμμή 51 και το `plot` στην γραμμή 52) θα διατηρούνται. Αν δεν το είχαμε χρησιμοποιήσει το OCTAVE δεν θα διατηρούσε το `stem` και θα βλέπαμε μόνο το `plot` της γραμμής 52. Επίσης στην γραμμή 53 φτιάχνουμε μία λεζάντα για να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να ξεχωρίσει το αποτέλεσμα για την θεωρητική και την αριθμητική προσέγγιση. Το `h` είναι το handler της λεζάντας. Με την εντολή `set` στην γραμμή 54 λέμε στο OCTAVE ότι το είδος των Font θα είναι `FreeSerif` ενώ το μέγεθος της γραμματοσειράς θα είναι ίσο με 16.

2.3 Απόκριση ηλεκτρονικών στοιχείων στο πεδίο των συχνοτήτων

Στο πεδίο των συχνοτήτων η απόκριση των διαφόρων ηλεκτρονικών στοιχείων είναι συνήθως πιο απλή. Ξεκινάμε με την απόκριση μίας αντίστασης R στο σχήμα 2.5. Ας θεωρήσουμε ένα



Εικόνα 2.5: Απόκριση της αντίστασης στο πεδίο των συχνοτήτων

σήμα τάσης το οποίο έχουμε αναλύσει σε σειρά Fourier,

$$v_R(t) = \sum_k V_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.15)$$

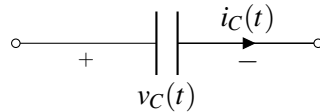
Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση θα είναι

$$i_R(t) = \frac{v_R}{R} = \sum_k \frac{V_k}{R} e^{j2\pi f_k t} \quad (2.16)$$

Η εξίσωση (2.16) υποδηλώνει ότι αν V_k είναι οι συντελεστές Fourier της τάσης στα άκρα της αντίστασης τότε οι συντελεστές Fourier του ρεύματος που την διαρρέει είναι $I_k = \frac{V_k}{R}$. Δηλαδή ο νόμος του Ohm ισχύει απευθείας και για τους συντελεστές Fourier. Στη συνέχεια αναλύουμε την συχνοτική συμπεριφορά του πυκνωτή στο σχήμα 2.6. Αν θεωρήσουμε τη σειρά Fourier για την τάση στα άκρα του πυκνωτή:

$$v_C(t) = \sum_k V_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.17)$$

τότε εφαρμόζοντας τον νόμο του πυκνωτή $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ θα έχουμε:



Εικόνα 2.6: Απόκριση του πυκνωτή στο πεδίο των συχνοτήτων

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = \sum_k (jC2\pi f_k) V_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.18)$$

Η (2.18) μας υποδηλώνει ότι οι συντελεστές Fourier V_k της τάσης $v_C(t)$ στα άκρα του πυκνωτή και οι συντελεστές Fourier i_k του ρεύματος που τον διαρρέει συνδέονται με μία σχέση της μορφής:

$$I_k = (j2\pi f_k C) V_k = \frac{V_k}{(j2\pi f_k C)^{-1}} \quad (2.19)$$

Η εξίσωση (2.19) θέλει να μας πει ότι οι συντελεστές Fourier του ρεύματος του πυκνωτή καθορίζονται από τους συντελεστές Fourier της τάσης πολλαπλασιάζοντας τους με τον παράγοντα $(j2\pi f_k C)$ ή ισοδύναμα διαιρώντας τους με τον παράγοντα $(j2\pi f_k C)^{-1}$. Στην ουσία η (2.19) είναι ένας νόμος του Ohm $i = \frac{v}{R}$ μόνο που τώρα τον ρόλο της αντίστασης R τον παίζει ο παράγοντας $Z_C = (j2\pi f_k C)^{-1}$ ο οποίος είναι φανταστικός αριθμός και εξαρτάται από την συχνότητα του σήματος. Στο πεδίο των συχνοτήτων επομένως, ο πυκνωτής δρα σαν μία αντίσταση με φανταστική τιμή της οποίας η τιμή εξαρτάται από την συχνότητα. Μάλιστα για πολύ μικρές συχνότητες ($f \rightarrow 0$), ο πυκνωτής παρουσιάζει άπειρη αντίσταση εφόσον $Z_C \rightarrow \infty$ ενώ για πολύ μεγάλες συχνότητες ($f \rightarrow \infty$), ο πυκνωτής έχει πολύ μικρή αντίσταση αφού $Z_C \rightarrow 0$.

2.4 Ισχύς και συντελεστές Fourier

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι υπάρχει μία βαθύτερη σχέση που συνδέει τους συντελεστές Fourier ενός σήματος με την μέση ισχύ του σήματος σε μία περίοδο. Ας ξαναγράψουμε την (2.1) σύμφωνα με την οποία ένα περιοδικό σήμα τάσης $v(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε μία σειρά Fourier,

$$v(t) = \sum_k V_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.20)$$

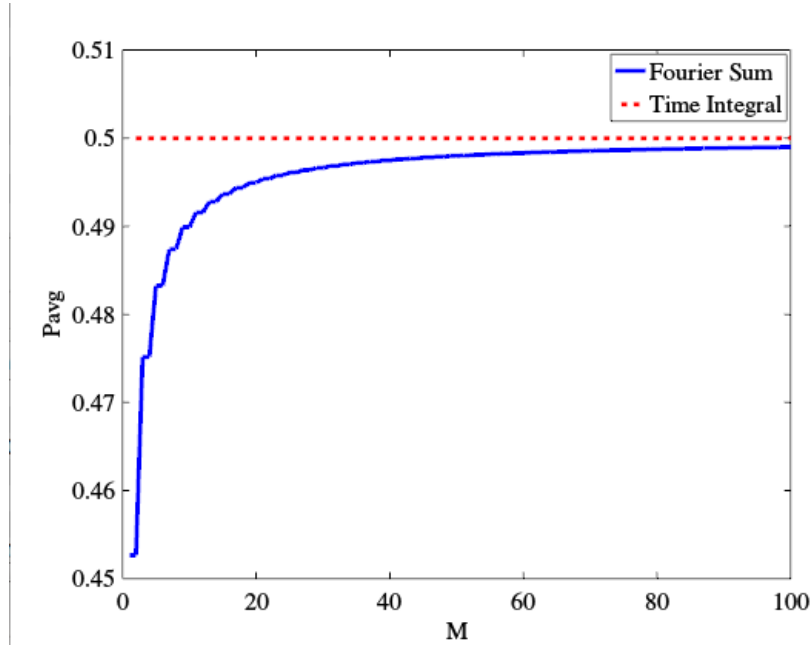
Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι η μέση ισχύς ισούται με το άθροισμα των μέτρων των συντελεστών Fourier πάνω σε μία αντίσταση R ,

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{RT_0} \int_0^{T_0} v^2(t) dt = \frac{1}{R} \sum_q |V_q|^2 \quad (2.21)$$

Πριν αποδείξουμε αυτή την σημαντική ιδιότητα είναι χρήσιμο να δούμε αν όντως ισχύει με την βοήθεια του OCTAVE. Η στιγμιαία ισχύς του σήματος πάνω σε μία αντίσταση R είναι $p_R(t) = \frac{v^2(t)}{R}$ ενώ η μέση ισχύς μέσα στην περίοδο του σήματος είναι,

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p_R(t) dt = \frac{1}{RT_0} \int_0^{T_0} v^2(t) dt \quad (2.22)$$

Στην εικόνα 2.7 δείχνουμε γραφικά τον υπολογισμό της μέσης ισχύος για το σήμα τάσης, (2.5)



Εικόνα 2.7: Υπολογισμός της μέση ισχύος του σήματος (2.5)

χρησιμοποιώντας το αρχείο powerVk.m που φαίνεται στο listing 2.5. Με το αρχείο υπολογίζουμε το δεξιό και το αριστερό μέρος της (2.21). Για απλοποίηση θεωρούμε $R = 1\Omega$. Το αρχείο δεν είναι πολύ διαφορετικό από αυτά που έχουμε δει μέχρι τώρα. Για το αριστερό μέρος χρησιμοποιούμε όπως και πριν την προσέγγιση του τραpezίου για να βρούμε το ολοκλήρωμα. $\frac{1}{RT_0} \int_0^{T_0} v^2(t) dt$. Το δεξιό μέρος υπολογίζεται προσεγγίζοντας το άθροισμα που έχει άπειρους όρους με ένα πεπερασμένο άθροισμα,

$$S_M = \frac{1}{R} \sum_{q=-M}^M |V_q|^2 \quad (2.23)$$

Για πολύ μεγάλο M περιμένουμε ότι το S_M θα προσεγγίζει το άπειρο άθροισμα. Ο κώδικας του listing 2.5 είναι παρόμοιος με αυτά που έχουμε δει μέχρι τώρα. Η σημαντικότερη διαφορά είναι ότι υπολογίζουμε τους συντελεστές V_k από $-M \leq k \leq M$ για διάφορες τιμές του M οι οποίες ορίζονται στην γραμμή 7 να είναι από $M = 1$ μέχρι $M = 100$. Στις γραμμές 12-25 φτιάχνουμε τον παλμό της εξίσωσης (2.5) κατά τα γνωστά ενώ στην 28 υπολογίζουμε την μέση ισχύ εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραpezίου. Στην 31 φτιάχνουμε ένα διάνυσμα που θα περιέχει τις τιμές του S_M για τις διάφορες τιμές του M ενώ ο βρόγχος for στις 34-49 υπολογίζει το S_M . Στην γραμμή

46, χρησιμοποιούμε την θεωρητική τιμή των V_k όπως αυτή δίνεται από την εξίσωση (2.14). Οι γραμμές 55-68 παριστάνουν γραφικά τα αποτελέσματα. Προσέξτε ότι στην γραμμή 59 κάνουμε γραφική παράσταση το $\text{pavg}^* \text{ones}(1, \text{length}(\text{MM}))$ το οποίο είναι ένα διάνυσμα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αριθμού pavg που είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον κανόνα του τραπεζίου και του διανύσματος $\text{ones}(1, \text{length}(\text{MM}))$ το οποίο είναι ένα διάνυσμα διάστασης όσο και το MM που περιέχει παντού μονάδες. Επομένως το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα διάστασης όσο και το MM που περιέχει παντού το pavg . Αυτό το κάνουμε για να δείξουμε καλύτερα την σύγκλιση στο σχήμα που παράγει ο κώδικας και φαίνεται στην εικόνα 2.7. Το σχήμα επιβεβαιώνει την σύγκλιση του αθροίσματος των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών Fourier, S_M , (με μπλε γραμμή) στην τιμή της μέσης ισχύος όπως αυτή υπολογίζεται με την συνάρτηση trapz . Στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι αρκετά εύκολο εναλλακτικά να υπολογίσουμε την μέση τιμή απευθείας από το ολοκλήρωμα καθώς,

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} dt = \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

οπότε είναι λογικό το άθροισμα των συντελεστών Fourier να συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$. Προσέξτε ότι στο (2.24) κάναμε ένα τρικ: ενώ το αρχικό ολοκλήρωμα ήταν από το 0 έως το 0, εμείς το πήραμε από $-\frac{T_0}{2}$ έως $\frac{T_0}{2}$. Αυτό ισχύει για κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$. Πράγματι $\int_0^{T_0} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}T_0} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}T_0}^{T_0} f(t) dt$. Στο τελευταίο ολοκλήρωμα και εφόσον η συνάρτηση είναι περιοδική αντικαθιστούμε το $f(t)$ με $f(t - T_0)$ και έχουμε με αλλαγή μεταβλητής, $\int_{\frac{1}{2}T_0}^{T_0} f(t - T_0) dt = \int_{-\frac{1}{2}T_0}^0 f(t) dt$. Επομένως, $\int_0^{T_0} f(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{\frac{1}{2}T_0} f(t) dt$.

```

1 % Definition of parameters
2
3 T=2e-6;           % Signal period (sec)
4 T1=1e-6;         % Pulse duration (sec)
5 Dt=T/200;       % Sampling step on the t-axis
6 V1=1;           % Pulse peak power (Vt)
7 MM=1:1:100;     % Number of positive and negative coefficients to estimate
8
9 % Build the t-axis
10 t=-T/2:Dt:T/2;
11
12 % Build the pulse vector (initially all zeroes)
13 p=zeros(1,length(t));
14
15 % Create the pulse
16 for m=1:length(t)
17     tcur=t(m);
18     % Outside the pulse duration pulse is equal to zero
19     if tcur<-T1/2 || tcur>T1/2
20         p(m)=0;
21     % Inside the pulse duration pulse is equal to V1
22     else
23         p(m)=V1;
24     end
25 end
26
27 % calculate average power through integration
28 pavg=1/T*trapz(t,p.^2);
29
30 % vector to hold avg power calculated through the Fourier coefficients
31 pavg_f=zeros(1,length(MM));

```



```

32 % for loop for every value of M
33 for m=1:length(MM)
34
35     % current value of M
36     M=MM(m);
37
38     % Coefficient indices
39     k=-M:1:M;
40
41     % Coefficient frequencies
42     fk=k/T;
43
44     % theoretical value of the Fourier coefficients
45     vk2=T1/T*sinc(T1*fk);
46
47     % calculate power through Fourier coefficients
48     pavg_f(m)=sum(abs(vk2).^2);
49
50
51 end
52
53 % Plot the results
54
55 close all;
56 figure(1);
57 hold on;
58 plot(MM,pavg_f,'LineWidth',3);
59 plot(MM,pavg*ones(1,length(MM)),'r--','LineWidth',3);
60 h=legend('Fourier Sum','Time Integral');
61 set(h,'FontName','FreeSerif','FontSize',16);
62
63 % Set font type and size
64 set(gca,'FontName','FreeSerif','FontSize',16)
65
66 % Set axis labels
67 xlabel('M');
68 ylabel('Pavg');

```

Listing 2.5: Το αρχείο powerVk.m

Αυτό που βλέπουμε στο OCTAVE μπορούμε να το δούμε και θεωρητικά. Αν θεωρήσουμε ότι το σήμα $v(t)$ είναι πραγματικό, τότε μπορούμε να δείξουμε μία πολύ ενδιαφέρουσα συμμετρία για τους συντελεστές του δεδομένου και ότι $f_{-k} = \frac{k}{T_0} = -f_k$

$$V_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) e^{-j2\pi f_{-k} t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) e^{j2\pi f_k t} dt \quad (2.25)$$

Από την άλλη αν υπολογίσουμε το συζυγές, $(V_k)^*$ του V_k , έχουμε:

$$(V_k)^* = \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (v(t) e^{-j2\pi f_k t} dt) \right)^* = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (v(t) e^{-j2\pi f_k t})^* dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) e^{j2\pi f_k t} dt \quad (2.26)$$

Αν συγκρίνουμε τις (2.25) και (2.26) βλέπουμε ότι για τα πραγματικά σήματα ισχύει η εξής ιδιότητα:

$$V_{-k} = (V_k)^* \quad (2.27)$$

δηλαδή οι συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν σε αντίθετες συχνότητες ($f_{-k} = -f_k$ και f_k) σχετίζονται μεταξύ τους καθώς ο ένας είναι ο μιγαδικός συζυγής του άλλου. Στην περίπτωση του σήματος τάσης στην (2.5) οι συντελεστές Fourier που υπολογίσαμε είναι πραγματικοί (οπότε

$(V_k)^* = V_k$ και η ιδιότητα (2.27) γράφεται απλά $V_{-k} = V_k$ δηλαδή οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί και συμμετρικοί γύρω από το $f_0 = 0$. Αυτό άλλωστε φαίνεται και στην εικόνα 2.3. Θα χρησιμοποιήσουμε την (2.27) για να γράψουμε το $v^2(t)$ ως εξής:

$$v^2(t) = v(t)v^*(t) = \sum_p V_p e^{-j2\pi f_p t} \sum_q (V_q)^* e^{j2\pi f_q t} = \sum_{pq} V_p V_{-q} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} \quad (2.28)$$

οπότε η μέση ισχύς στην (2.22) γράφεται και ως εξής:

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{RT_0} \sum_{pq} V_p V_{-q} \int_0^{T_0} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} dt = \frac{1}{RT_0} \sum_{pq} V_p V_q^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} dt \quad (2.29)$$

Υπάρχει μία πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα για τις συναρτήσεις $e^{j2\pi f_k t}$ που κάνει τον υπολογισμό του αθροίσματος εύκολη υπόθεση. Αν υποθέσουμε ότι $p \neq q$ τότε $f_p \neq f_q$ οπότε θα έχουμε,

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} dt = \frac{1}{T_0} \frac{e^{j2\pi(f_q - f_p)T_0} - 1}{j2\pi(f_q - f_p)} = 0 \quad (2.30)$$

Το ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν επειδή $f_p - f_q = (p - q)T_0^{-1}$ οπότε $e^{j2\pi(f_q - f_p)T_0} = e^{j2\pi(q - p)} = 1$, δεδομένου ότι για κάθε ακέραιο m , $e^{j2\pi m} = 1$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $p = q$ και επομένως $f_p = f_q$, θα έχουμε:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt = 1 \quad (2.31)$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε την εξής ιδιότητα,

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} dt = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } p = q \\ 0, & \text{όταν } p \neq q \end{cases} \quad (2.32)$$

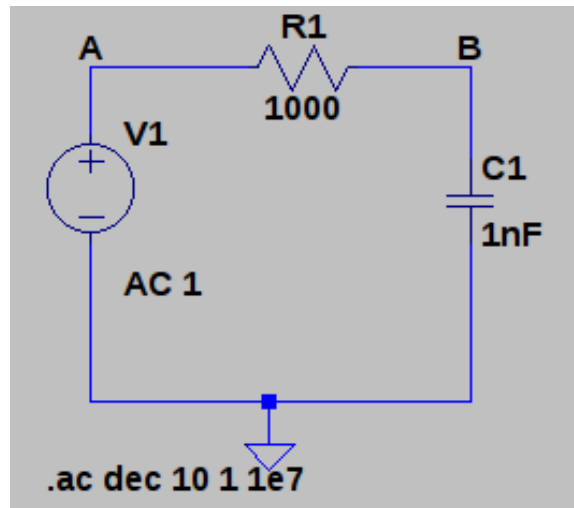
Στην παραπάνω εξίσωση έχουμε ορίσει το δ_{pq} να είναι ίσο με ένα όταν $p = q$ και μηδέν όταν $p \neq q$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (2.32) για να απλοποιήσουμε την (2.29),

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{RT_0} \sum_{pq} V_p V_{-q} \int_0^{T_0} e^{j2\pi(f_q - f_p)t} dt = \frac{1}{R} \sum_{pq} V_p V_q^* \delta_{pq} = \frac{1}{R} \sum_q |V_q|^2 \quad (2.33)$$

δηλαδή η μέση ισχύς του σήματος είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών Fourier $|V_k|^2$ σε όλες τις συχνότητες (και τις θετικές και τις αρνητικές).

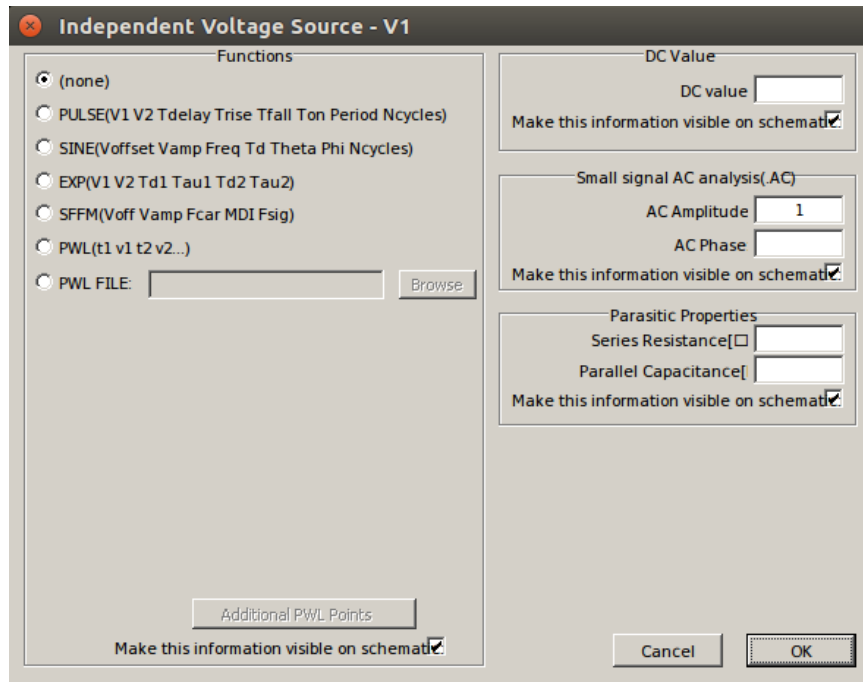
2.5 Το κύκλωμα RC στο πεδίο των συχνοτήτων

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το LT-SPICE για να κάνουμε την ανάλυση κυκλωμάτων στο πεδίο των συχνοτήτων. Χρησιμοποιούμε το κύκλωμα που βλέπουμε στην εικόνα 2.8 που είναι ένα κλασικό κύκλωμα RC που έχουμε χρησιμοποιήσει και προηγούμενα. Δύο είναι οι βασικές διαφορές σε αυτό το κύκλωμα. Καταρχήν, η πηγή είναι πλέον τύπου μικρού σήματος και καθορίζεται όπως φαίνεται στην εικόνα 2.9. Τι σημαίνει πηγή μικρού σήματος; Σημαίνει ότι στους υπολογισμούς του, το LT-SPICE θεωρεί ότι το πλάτος του σήματος είναι αρκετά μικρό ώστε να κάνει διάφορες χρήσιμες προσεγγίσεις και να διευκολύνει τους υπολογισμούς του. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες σε παρακάτω κεφάλαια όπου και



Εικόνα 2.8: Ανάλυση συχνοτήτων του κυκλώματος RC στο LT-SPICE

εμείς θα κάνουμε αντίστοιχες προσεγγίσεις. Προσέξτε ότι στην περίπτωση μας αυτή δεν έχουμε καθόλου καθορίσει κάποιο είδος χρονικής μεταβολής (π.χ. PULSE, SINE κτλ). Δεδομένου ότι θα κάνουμε ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων, αυτό δεν χρειάζεται. Στην εικόνα 2.10 βλέπουμε τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση στο πεδίο των συχνοτήτων. Επιλέγουμε ανάλυση AC που στην ηλεκτρονική σημαίνει ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων. Το LT-SPICE μας ζητάει πόσα σημεία πάνω στον άξονα των συχνοτήτων θα θεωρήσει στους υπολογισμούς του. Καταρχήν του λέμε ότι ο άξονας των συχνοτήτων θα είναι στην λογαριθμική κλίμακα, δηλαδή αντί για f το LT-SPICE θα μας παρουσιάσει τα διαγράμματα του με το $\log_{10} f$. Όσοι ασχολούνται με την ηλεκτρονική θα σας πουν ότι συνήθως προτιμούν τα διαγράμματα σε αυτή τη μορφή καθώς παρέχουν περισσότερη και πιο συνεκτική πληροφορία. Επίσης λέμε στο LT-SPICE ότι θα ξεκινήσει από τα 1Hz και θα καταλήξουμε στα $10^7 \text{ Hz} = 10 \text{ MHz}$. Επειδή έχουμε επιλέξει δεκαδικό τύπο sweep με 10 σημεία συχνοτήτων ανά δεκάδα το LT-SPICE θα θεωρεί 10 σημεία συχνοτήτων κάθε φορά που αλλάζει τάξη η συχνότητα, δηλαδή 10 σημεία από τα 1Hz μέχρι τα 10Hz, 10 σημεία από τα 10Hz μέχρι τα 100Hz, κ.ο.κ. Όταν κάνουμε την προσομοίωση και κάνουμε κλικ πάνω στο σημείο B το LT-SPICE παράγει ένα διάγραμμα όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα 2.11. Τι δείχνει αυτό το διάγραμμα; Το LT-SPICE έχει βάλει στην είσοδο του κυκλώματος (δηλαδή στην πηγή V1) ένα σήμα της μορφής $v_1 = V_0 e^{j2\pi f t}$ όπου το f είναι η συχνότητα της οποίας τα σημεία καθορίσαμε προηγουμένως στην εικόνα 2.10. Επίσης στην ίδια εικόνα ορίσαμε $V_0 = 1 \text{ V}$. Για κάθε σημείο του κυκλώματος υπολογίζει τα ρεύματα και τις τάσεις που θα έχουν την μορφή, για παράδειγμα $v_B = V_B e^{j2\pi f t}$ όπου V_B είναι το πλάτος της τάσης στο σημείο B που εξαρτάται από το πλάτος εισόδου V_0 . Επειδή μετά την προσομοίωση κάναμε κλικ πάνω στο σημείο B που είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή, το LT-SPICE έκανε γραφική παράσταση του πλάτους V_B συναρτήσει του f . Αν δείτε προσεκτικά την εικόνα 2.10 υπάρχουν δύο καμπύλες. Μία συνεχής πράσινη και μία διακεκομμένη. Το V_B είναι μιγαδικός αριθμός. Η πράσινη καμπύλη προκύπτει από το μέτρο του $|V_B|$ ή πιο σωστά από την μετατροπή του στην λογαριθμική κλίμακα, $10 \log_{10}(|V_B|^2) = 20 \log_{10}|V_B|$. Όπως είδαμε και στην ενότητα 2.4, το τετράγωνο του μέτρου της τάσης $|V_B|^2$ είναι άμεσα συνυφασμένο με την ισχύ και επομένως για τον λόγο αυτό το LT-SPICE επιλέγει να απεικονίσει το $|V_B|^2$ στην λογαριθμική κλίμακα. Επίσης



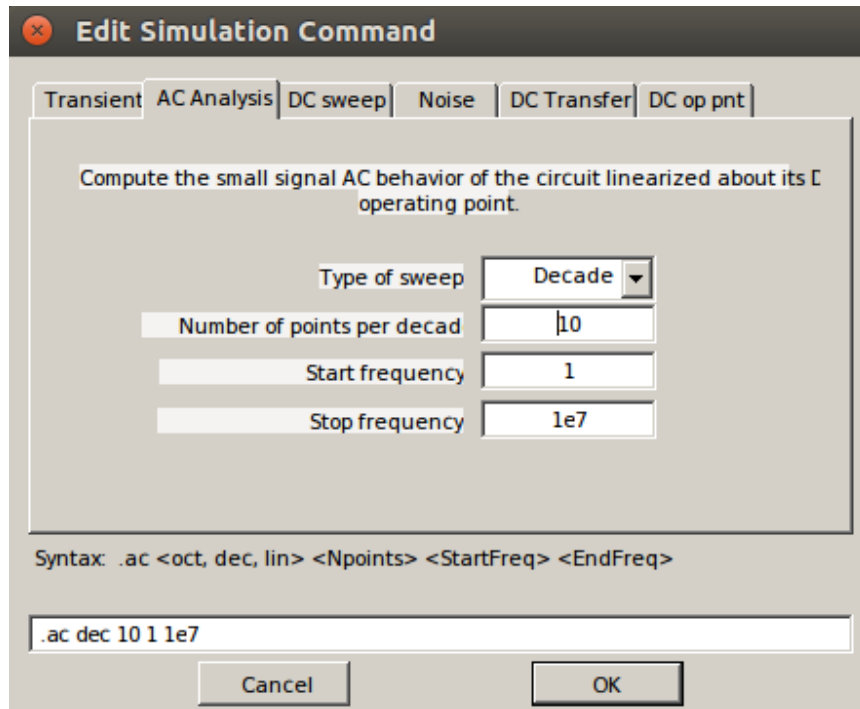
Εικόνα 2.9: Ανάλυση συχνοτήτων του κυκλώματος RC στο LT-SPICE

ως μιγαδικός αριθμός το V_B έχει και μία φάση ϕ_B , $V_B = |V_B|e^{j\phi_B}$. Θα δούμε παρακάτω την φυσική σημασία της φάσης ϕ_B . Προς το παρόν ας δούμε το αποτέλεσμα των υπολογισμών στην εικόνα 2.10. Υπάρχουν μερικά πολύ ενδιαφέροντα σημεία που πρέπει να προσέξουμε. Το πρώτο είναι ότι στις χαμηλές συχνότητες ($f \leq 10\text{kHz}$), το τετράγωνο του μέτρου της τάσης $|V_B|^2$ είναι $\cong 0\text{dB}$ και η φάση $\phi_B \cong 0$, επομένως $V_B \cong 1 = V_0$. Δηλαδή στις χαμηλές συχνότητες ο πυκνωτής έχει απορροφήσει όλη την τάση που του δίνει η πηγή τάσης κάτι που είναι και σε συμφωνία με αυτά που είπαμε στην ενότητα 2.3: όταν $f \rightarrow 0$ τότε ο πυκνωτής παρουσιάζει μία μεγάλη αντίσταση Z_C . Αν το καλοσκεφτούμε, στην ουσία το κύκλωμα στο πεδίο των συχνοτήτων αποτελείται από δύο αντιστάσεις μία καθαρά ωμική αντίσταση $R = 1\text{k}\Omega$ και μία μιγαδική αντίσταση που οφείλεται στον πυκνωτή $Z_C = (j2\pi fC)^{-1}$ όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.12. Επομένως στο πεδίο των συχνοτήτων το κύκλωμα μετατρέπεται σε έναν διαιρέτη τάσης και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές σχέσεις (1.4) ώστε να υπολογίσουμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή και της αντίστασης,

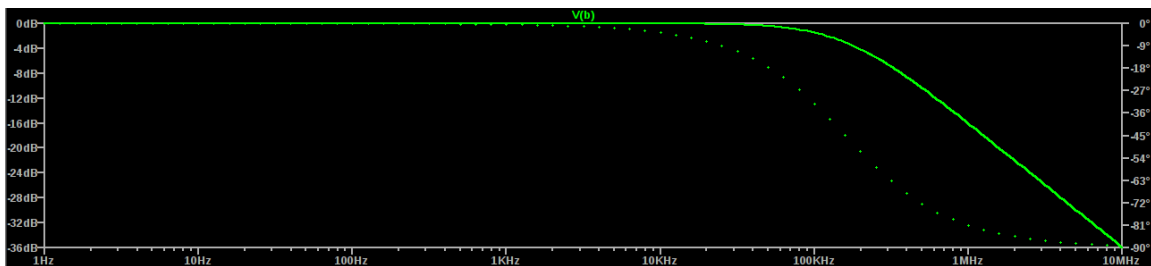
$$V_C = \frac{Z_C}{Z_C + R} V_0 = \frac{(j2\pi fC)^{-1}}{(j2\pi fC)^{-1} + R} = \frac{1}{j2\pi fRC + 1} V_0 \quad (2.34)$$

Η εξίσωση (2.34) μας δίνει το πλάτος της τάσης πάνω στον πυκνωτή V_C συναρτήσει της συχνότητας, της αντίστασης R και της χωρητικότητας C του πυκνωτή. Στον παρανομαστή εμφανίζεται πάλι η παράμετρος $\tau = RC$ που είδαμε και στην ενότητα 1.8 φανερώνοντας το σημαντικό ρόλο που παίζει αυτή η σταθερά και στο πεδίο των συχνοτήτων. Το τετράγωνο του πλάτους της τάσης του πυκνωτή θα είναι:

$$|V_C|^2 = \left| \frac{1}{j2\pi fRC + 1} \right|^2 |V_0|^2 = \frac{1}{|j2\pi fRC + 1|^2} |V_0|^2 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 (RC)^2 + 1} |V_0|^2 \quad (2.35)$$



Εικόνα 2.10: Ανάλυση συχνοτήτων του κυκλώματος RC στο LT-SPICE



Εικόνα 2.11: Ανάλυση συχνοτήτων του κυκλώματος RC στο LT-SPICE

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και την φάση του πλάτους, ϕ_C . Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή στην (2.34) με $-j2\pi fRC + 1$ θα βρούμε,

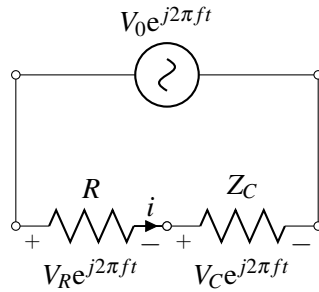
$$V_C = \frac{-j2\pi fRC + 1}{(j2\pi fRC + 1)(-j2\pi fRC + 1)} V_0 = \frac{-j2\pi fRC + 1}{4\pi^2 f^2 (RC)^2 + 1} V_0 \quad (2.36)$$

Από την (2.36) βλέπουμε ότι το φανταστικό προς το πραγματικό μέρος της τάσης έχουν πηλίκο,

$$\frac{\Im\{V_C\}}{\Re\{V_C\}} = \tan \phi_C = -2\pi fRC \quad (2.37)$$

Ας υποθέσουμε επομένως ότι η συχνότητα f είναι πολύ μικρή και συγκεκριμένα πολύ μικρότερη από το $(2\pi RC)^{-1}$, δηλαδή $f \ll (2\pi RC)^{-1}$ τότε θα έχουμε από την (2.35),

$$|V_C|^2 \cong |V_0|^2 \text{ όταν } f \ll (2\pi\tau)^{-1} = (2\pi RC)^{-1} \text{ οπότε } |V_C|^2 \cong 0\text{dB} \quad (2.38)$$



Εικόνα 2.12: Το κύκλωμα RC στο πεδίο των συχνοτήτων

ενώ από την (2.37) έχουμε,

$$\phi_C \cong 0 \text{ όταν } f \ll (2\pi\tau)^{-1} = (2\pi RC)^{-1} \quad (2.39)$$

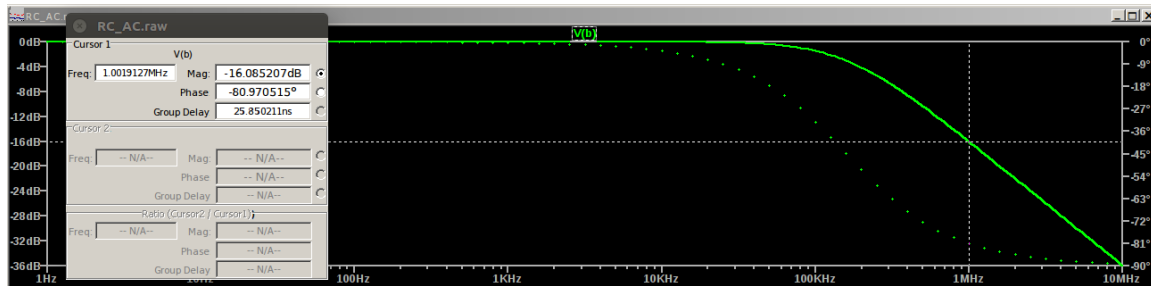
Δηλαδή στις χαμηλές συχνότητες περιμένουμε το $|V_C|^2$ να είναι 0dB ενώ η φάση ϕ_C του $V_C = |V_C|e^{j\phi_C}$ να είναι ίση με μηδέν οπότε το V_C είναι καθαρά πραγματικό. Αυτό ακριβώς μας λέει και η εικόνα 2.11. Στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή όταν $f \gg (2\pi\tau)^{-1} = (2\pi RC)^{-1}$ τότε η (2.35) γράφεται ως εξής:

$$|V_C|^2 \cong \frac{|V_0|^2}{4\pi^2(RC)^2} \frac{1}{f^2} \quad (2.40)$$

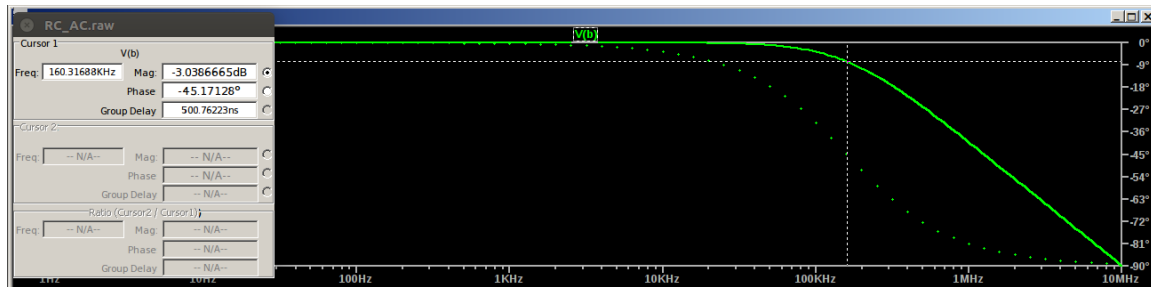
Παρατηρούμε επομένως ότι στις υψηλές συχνότητες το $|V_C(f)|^2$ είναι ανάλογο του f^{-2} . Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε δύο συχνότητες $f = f_1$ και $f = f_2$ που συνδέονται με την σχέση $f_2 = 10f_1$ τότε $|V_C(f_2)|^2 / |V_C(f_1)|^2 = f_1^2 / f_2^2 \cong 1/100$. Στην λογαριθμική κλίμακα έχουμε

$$10 \log_{10}(|V_C(f_2)|^2) = 10 \log_{10}(|V_C(f_1)|^2) - 20\text{dB} \quad (2.41)$$

Η εξίσωση (2.41) μας λέει ότι κάθε φορά που η συχνότητα πολλαπλασιάζεται επί δέκα (δηλαδή ανεβαίνουμε δεκάδα στην συχνότητα), στο $|V_C(f_2)|^2$ αφαιρούνται 20dB. Στην ηλεκτρονική στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ρυθμό ανόδου $-20\text{dB}/\text{decade}$. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τους μετρητές του LT-SPICE. Στην γραφική παράσταση της εικόνας 2.11 κάνουμε αριστερό κλικ πάνω στο V(b) και στη συνέχεια μετακινούμε πατώντας το αριστερό κουμπί του mouse μέχρι να φτάσουμε κοντά στη συχνότητα $f = 1\text{MHz}$ όπως δείχνει και η εικόνα 2.13. Παρατηρούμε ότι εκεί έχουμε πλάτος $\cong -16\text{dB}$ σύμφωνα και με τα όσα βλέπουμε και στο παράθυρο με τις τιμές του μετρητή. Επίσης βλέπουμε ότι στο τέλος των αξόνων δηλαδή στο $f = 10\text{MHz}$ έχουμε -36dB . Επομένως όταν μετακινούμαστε από το $f = 1\text{MHz}$ στην επόμενη δεκάδα, $f = 10\text{MHz}$, το πλάτος $|V_C|^2$ αλλάζει από -16dB σε -36dB δηλαδή έχουμε μία πτώση 20dB όπως είπαμε και προηγουμένως. Έχει επίσης ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει στη φάση στις μεγάλες συχνότητες. Από την (2.37) βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνει το f τόσο μεγαλώνει και η εφαπτομένη $\tan \phi_C$. Όταν $f \gg (2\pi\tau)^{-1} = (2\pi RC)^{-1}$ θα έχουμε πολύ αρνητική εφαπτομένη που αντιστοιχεί σε φάση $\phi_C \cong -\pi/2$. Επομένως στις πολύ μεγάλες συχνότητες η φάση του $V_C = |V_C|e^{j\phi_C}$ έχει γίνει σχεδόν $\pi/2$ και επομένως το V_C σχεδόν φανταστικό αφού $e^{j\phi_C} \cong e^{-j\pi/2} = -j$. Ένα επιπλέον στοιχείο που έχει ενδιαφέρον να μετρήσουμε είναι η συχνότητα $f_{3\text{dB}}$ στην οποία το τετραγωνικό πλάτος εξόδου $|V_C|^2$ πέφτει στο μισό της μέγιστης τιμής του. Είναι φανερό από την (2.35) ότι το $|V_C|^2$ γίνεται μέγιστο στο $f = 0$ οπότε και



Εικόνα 2.13: Υπολογισμός του ρυθμού ανόδου του RC κυκλώματος.



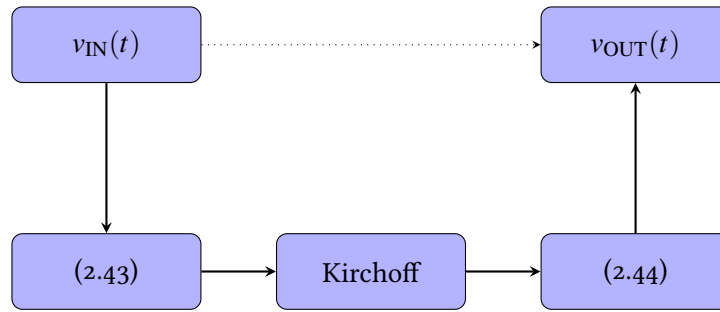
Εικόνα 2.14: Μέτρηση του εύρους 3dB στο LT-SPICE

$|V_C(0)|^2 = |V_0|^2$. Αν θέσουμε $f = 1/(2\pi RC)$ εύκολα ότι $|V_C(f)|^2 = |V_0|^2/2$. Βλέπουμε συνεπώς ότι η συχνότητα f_{3dB} στην οποία το τετραγωνικό πλάτος γίνεται ίσο με το μισό του μέγιστου του είναι $f_{3dB} = 1/(2\pi RC)$. Συχνά το διάστημα συχνοτήτων $[0, f_{3dB}]$ ονομάζεται *εύρος 3dB* και είναι ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος για κυκλώματα που πρέπει να δουλεύουν σε υψηλές συχνότητες. Στην περίπτωση του κυκλώματος που αναλύουμε έχουμε $R = 1k\Omega$ και $C = 1nF$ οπότε $f_{3dB} = 159.15kHz$. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε και με τους μετρητές του LT-SPICE όπως δείχνει η εικόνα 2.14. Από την ίδια εικόνα βλέπουμε ότι η φάση του V_C όταν $f = f_{3dB}$, είναι $\phi_C = -45^\circ$ δηλαδή $\phi_C = -\pi/4$. Είναι εύκολο να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό. Όταν $f = f_{3dB} = 1/(2\pi RC)$ θα έχουμε από την (2.37) $\tan \phi_C = -1$ οπότε $\phi_C = -\pi/4$.

2.6 Πίσω στο πεδίο του χρόνου

Το πεδίο των συχνοτήτων μας δίνει έναν ωραίο τρόπο να κάνουμε την ανάλυση του κυκλώματος RC και πολλών άλλων παρόμοιων κυκλωμάτων (παρακάτω θα ξεκαθαρίσουμε λίγο καλύτερα τι σημαίνει παρόμοιο). Στην εικόνα (2.15) δείχνουμε το σκεπτικό μας. Μας δίνουν ένα σήμα τάσης $v_{IN}(t)$ και μας λένε να δούμε τι απόκριση αντιστοιχεί σε αυτό το σήμα όταν περνάει από ένα κύκλωμα όπως το κύκλωμα RC που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Στην ουσία μας ζητάνε δηλαδή να υπολογίσουμε την τάση εξόδου $v_{OUT}(t)$ που αντιστοιχεί στο $v_{IN}(t)$. Είδαμε ότι για αυτό το σκοπό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το LT-SPICE στην ενότητα 1.7. Εδώ θα δείξουμε μία εναλλακτική μέθοδο ανάλυσης που θα υλοποιήσουμε στο OCTAVE. Σύμφωνα με την εικόνα 2.15 αυτό που κάνουμε πρώτα είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier V_k για κάθε συχνότητα f_k που πιστεύουμε ότι μας ενδιαφέρει χρησιμοποιώντας την (2.6) που στην περίπτωση του v_{IN} γράφεται:

$$v_{IN}(t) = \sum_k V_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.42)$$



Εικόνα 2.15: Ανάλυση κυκλώματος με χρήση του πεδίου των συχνοτήτων.

όπου:

$$V_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_{\text{IN}}(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (2.43)$$

Στο OCTAVE αυτό μπορεί να γίνει με αριθμητική ολοκλήρωση μέσω της trapz όπως είδαμε και στο listing 2.4. Στη συνέχεια θεωρούμε το κύκλωμα στο πεδίο των συχνοτήτων όπου για παράδειγμα οι πυκνωτές αντιστοιχούν σε αντίσταση της μορφής $Z_C = (2\pi f_k C)^{-1}$ οπότε η ανάλυση είναι σημαντικά πιο απλή. Για κάθε συνιστώσα του φάσματος του σήματος εισόδου $V_k e^{j2\pi f_k t}$ υπολογίζουμε εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff τους συντελεστές Fourier V'_k του σήματος εξόδου $v_{\text{OUT}}(t)$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξίσωση

$$v_{\text{OUT}}(t) = \sum_k V'_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2.44)$$

για να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου $v_{\text{OUT}}(t)$. Στο listing 2.6 δείχνουμε ακριβώς αυτή την υλοποίηση για ένα κύκλωμα RC. Δεν έχουμε σημαντικές διαφορές από προηγούμενα listing. Η ουσία βρίσκεται στις γραμμές 40-42 όπου υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier εισόδου, στην 45 όπου υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier εξόδου και στις 51-54 όπου υπολογίζουμε τις σειρές Fourier των σημάτων $v_{\text{IN}}(t)$ και $v_{\text{OUT}}(t)$. Αυτά τα τρία βήματα ακολουθούμε και στην εικόνα 2.15.

```

1 % Definition of parameters
2 T=2e-6; % Signal period (sec)
3 T1=1e-6; % Pulse duration (sec)
4 Dt=T/200; % Sampling step on the t-axis
5 V1=1; % Pulse peak power (Vt)
6 M=100; % Number of positive and negative coefficients to estimate
7 R=1000; % Resistance (Ohm)
8 C=1e-9; % Capacitance (Farad)
9
10 % Build the t-axis
11 t=-T/2:Dt:T/2;
12
13 % Build the pulse vector (initially all zeroes)
14 p=zeros(1,length(t));
15
16 % Create the pulse
17 for m=1:length(t)
18     tcur=t(m);
19     % Outside the pulse duration pulse is equal to zero
  
```



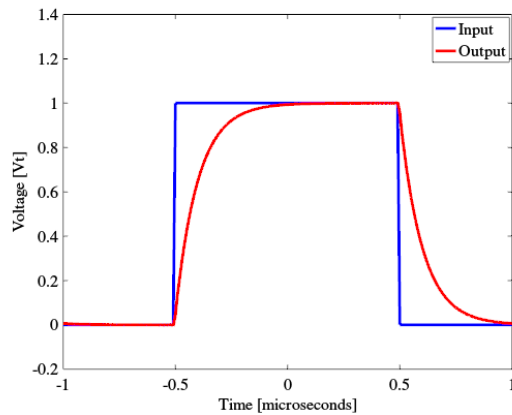
```

20 if tcur<-T1/2 || tcur>T1/2
21     p(m)=0;
22 % Inside the pulse duration pulse is equal to V1
23 else
24     p(m)=V1;
25 end
26 end
27
28 % Calculate Fourier coefficients
29
30 % Coefficient indices
31 k=-M:1:M;
32
33 % Coefficient frequencies
34 fk=k/T;
35
36 % Coefficient vector
37 Vk=zeros(1,length(k));
38
39 % Coefficient estimation
40 for i=1:length(k)
41     Vk(i)=1/T*trapz(t,p.*exp(-j*2*pi*fk(i)*t));
42 end
43
44 % Output coefficient estimation
45 Vk2=Vk./(j*2*pi*fk*C*R+1);
46
47 % Calculate input/output signal approximation
48 vIN=zeros(1,length(t));
49 vOUT=zeros(1,length(t));
50
51 for m=1:length(k)
52     vIN=vIN+Vk(m)*exp(j*2*pi*fk(m)*t); % input signal fourier series
53     vOUT=vOUT+Vk2(m)*exp(j*2*pi*fk(m)*t); % output signal fourier series
54 end
55
56 % Plot input and output
57 close all;
58 figure(1);
59 hold on;
60 plot(t/1e-6,real(vIN),'LineWidth',3);
61 plot(t/1e-6,real(vOUT),'r','LineWidth',3);
62 h=legend('Input','Output');
63 set(h,'FontName','FreeSerif','FontSize',16);
64
65 % Set font type and size
66 set(gca,'FontName','FreeSerif','FontSize',16)
67
68 % Set axis labels
69 xlabel('Time [microseconds]');
70 ylabel('Voltage [Vt]');

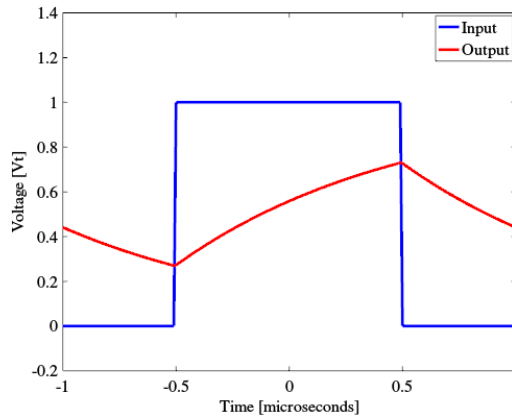
```

Listing 2.6: Το αρχείο fourierRC.m

Στις εικόνες 2.16 και 2.17 δείχνουμε την τάση $v_C(t)$ όπως υπολογίζεται από το listing 2.6 για $R = 100\Omega$ και $R = 1k\Omega$ αντιστοίχα. Συγκρίνοντας με τις κυματομορφές της εικόνας 1.21 βλέπουμε ότι στην περίπτωση $R = 100\Omega$ έχουμε πολύ καλή συμφωνία. Στην περίπτωση $R = 1k\Omega$ ωστόσο έχουμε μία διαφορά που οφείλεται στο γεγονός ότι το μεν LT-SPICE λύνει απευθείας τις εξισώσεις του Kirchoff στο πεδίο του χρόνου δηλαδή την (1.8) ενώ στο OCTAVE περάσαμε πρώτα από το πεδίο των συχνοτήτων οπότε υποθέσαμε ότι ισχύει η (2.42) που σημαίνει ότι το σήμα v_{IN} είναι περιοδικό, $v_{IN}(t + T_0) = v_{IN}(t)$. Έτσι πριν την χρονική στιγμή $t = 0$ προηγούνται άπειρες περιόδου σήματος εισόδου $v_{IN}(t)$ στις οποίες ο πυκνωτής φορτιζόταν και εκφορτιζόταν όπου



Εικόνα 2.16: Απόκριση του κυκλώματος RC στο OCTAVE ($R = 100\Omega$).



Εικόνα 2.17: Απόκριση του κυκλώματος RC στο OCTAVE ($R = 1k\Omega$).

τελικά φτάσαμε σε μία κατάσταση ισορροπίας όπου ο πυκνωτής σε κάθε διάρκεια παλμού ξεκινάει λίγο πιο πάνω από τα 0.3V για να φτάσει λίγο πιο πάνω από τα 0.7V και η κατάσταση αυτή επαναλαμβάνεται συνέχεια. Στην περίπτωση της εικόνας 1.21 το LT-SPICE λύνει την (1.8) θεωρώντας ότι ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος την χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή $v_C(0) = 0$ και επομένως δεν έχουν προηγηθεί οι περίοδοι του σήματος $v_{IN}(t)$ πριν την χρονική στιγμή $t = 0$. Το σύστημα χρειάζεται επομένως μερικές περιόδους για να φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας που θεωρούμε στην περίπτωση της επίλυσης με το OCTAVE. Αυτό είναι μία ουσιώδης διαφορά μεταξύ της ανάλυσης χρησιμοποιώντας το πεδίο των συχνοτήτων που μας δίνει την κατάσταση ισορροπίας μέσω της εικόνας 2.15 του κυκλώματος και της ανάλυσης απευθείας στο πεδίο του χρόνου που περιγράφει και την μεταβατική κατάσταση των σημάτων εισόδου/εξόδου.

2.7 Υπάρχουν μιγαδικά σήματα, μπαμπά;

Πολλές φορές δημιουργείται μία σύγχυση επειδή στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε μιγαδικούς αριθμούς ενώ στο πεδίο του χρόνου με έναν μαγικό τρόπο οι μιγαδικοί αριθμοί φαίνεται να εξαφανίζονται και να μένουν μόνο πραγματικά σήματα, χωρίς φανταστικό μέρος. Πως γίνεται

αυτό; Ειδικά στην ενότητα 2.5 μιλήσαμε για την φάση ϕ_C της τάσης εξόδου V_C του πυκνωτή που είναι το όρισμα του μιγαδικού αριθμού. Δεν υπάρχει αυτή η φάση;

Για να ξεκαθαρίσουμε το τοπίο θα πρέπει να θυμόμαστε πάντα ότι *μιγαδικά σήματα δεν υπάρχουν στη φύση* αλλά παρουσιάζονται σε ενδιάμεσους υπολογισμούς οι οποίοι γίνονται πιο εύκολα για αυτά. Το πιο απλό παράδειγμα είναι το συνημιτονοειδές σήμα τάσης (2.2) το οποίο σύμφωνα με την (2.3) περιέχει δύο μιγαδικές συνιστώσες σήματος (που αντιστοιχούν στους δύο όρους της σειράς Fourier): την $\frac{1}{2}V_0e^{j2\pi f_0 t}$ και την $\frac{1}{2}V_0e^{-j2\pi f_0 t}$. Εφόσον το V_0 το είχαμε θεωρήσει πραγματικό, και ο συζυγής του $e^{j\phi}$ είναι το $e^{-j\phi}$ είναι εύκολο να δούμε ότι οι δύο όροι είναι ο ένας μιγαδικός συζυγής του άλλου και επομένως το άθροισμα τους είναι πραγματικός αριθμός.

Ας θεωρήσουμε επομένως ότι:

$$v_{\text{IN}}(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t) = \frac{V_0}{2}e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{V_0}{2}e^{j2\pi f_0 t} = v_C^{(1)} + v_C^{(2)} \quad (2.45)$$

όπου,

$$v_{\text{IN}}^{(1)} = \frac{V_0}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.46)$$

$$v_{\text{IN}}^{(2)} = \frac{V_0}{2}e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.47)$$

Για κάθε μία από τις συνιστώσες του σήματος v_{IN} μπορούμε να βρούμε πολύ εύκολα την τάση πάνω στο πυκνωτή. Συγκεκριμένα μπορούμε να γράψουμε

$$v_C = v_C^{(1)} + v_C^{(2)} \quad (2.48)$$

όπου $v_C^{(1)}$ και $v_C^{(2)}$ είναι οι συνιστώσες της τάσης του πυκνωτή που αντιστοιχούν στις $v_{\text{IN}}^{(1)}$ και $v_{\text{IN}}^{(2)}$ αντίστοιχα. Η τάση $v_C^{(2)} = V_C^{(2)}e^{j2\pi f_0 t}$ που αντιστοιχεί στην τάση $v_{\text{IN}}^{(2)}$ καθορίζεται από την σχέση (2.36),:

$$v_C^{(2)} = \frac{V_0}{2} \frac{1 - j2\pi f_0 RC}{1 + 4\pi^2 f_0^2 (RC)^2} e^{j2\pi f_0 t} = \frac{V_C}{2} e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.49)$$

όπου το $V_C = |V_C|e^{j\phi_C}$ δίνεται από την (2.36), ενώ η τάση $v_C^{(1)}$ που αντιστοιχεί στην τάση $v_{\text{IN}}^{(1)}$ δίνεται πολύ απλά από την ίδια σχέση μόνο που αντικαθιστούμε το f_0 με $-f_0$,

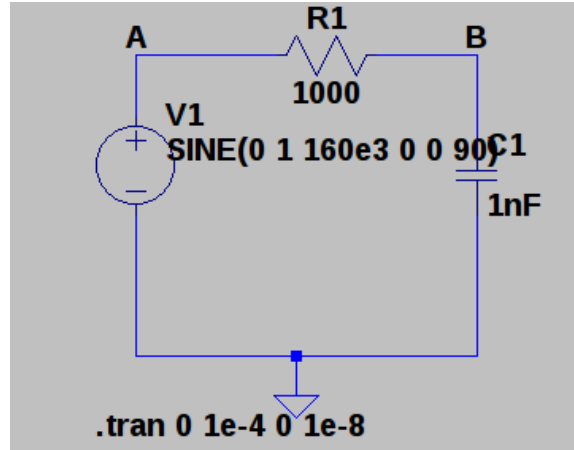
$$v_C^{(1)} = \frac{V_0}{2} \frac{1 + j2\pi f_0 RC}{1 + 4\pi^2 f_0^2 (RC)^2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.50)$$

Σύμφωνα με την (2.48) για να υπολογίσουμε την v_C απλά αθροίζουμε τις συνεισφορές $v_C^{(1)}$ και $v_C^{(2)}$, οι οποίες είναι εύκολο να δούμε ότι είναι μιγαδικά συζυγείς. Οπότε η (2.48) θα γραφεί,

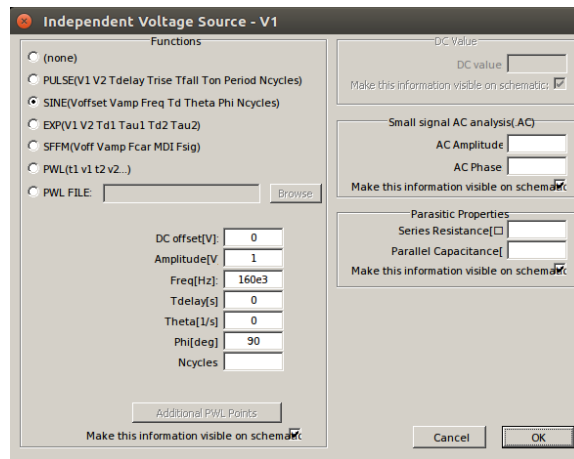
$$v_C = v_C^{(1)} + v_C^{(2)} = 2\Re \left\{ v_C^{(2)} \right\} = |V_C| \Re \left\{ e^{j2\pi f_0 t + j\phi_C} \right\} = |V_C| \cos(2\pi f_0 t + \phi_C) \quad (2.51)$$

Βλέπουμε επομένως την φυσική σημασία του πλάτους $|V_C|$ και της φάσης ϕ_C που υπολογίσαμε προηγουμένως. Αν στο κύκλωμα RC θέσουμε στην είσοδο $v_{\text{IN}} = V_0 e^{j2\pi f_0 t}$ στην έξοδο του (δηλαδή πάνω στον πυκνωτή) θα πάρουμε $v_C = V_C e^{j2\pi f_0 t}$. Το πλάτος $|V_C|$ και η φάση ϕ_C είναι το

πλάτος και η διαφορά φάσης που θα πάρουμε αν στην είσοδο του κυκλώματος θεωρήσουμε ένα πραγματικό σήμα $v_{IN} = V_0 \cos(j2\pi f_0 t)$ οπότε και θα έχουμε $v_C = |V_C| \cos(2\pi f_0 t + \phi_C)$. Μπορούμε να κάνουμε και τους σχετικούς υπολογισμούς στο LT-SPICE. Στην εικόνα 2.18 δείχνουμε το κύκλωμα που χρησιμοποιούμε για την ανάλυση στο LT-SPICE που είναι ένα απλό κύκλωμα RC στο οποίο έχουμε χρησιμοποιήσει μεταβατική ανάλυση (.tran) και ημιτονοειδή πηγή με παραμέτρους όπως φαίνονται στην εικόνα 2.19. Θέτουμε πλάτος ίσο με $V_0 = 1V$ συχνότητα ίση με $f_0 = 160kHz$ και αρχική φάση $\phi_0 = 90 = \pi/2$. Η πηγή θα παράγει το σήμα $v(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi_{i0}) = V_0 \cos(2\pi f_0 t)$ που είναι το συνημιτονοειδές σήμα που θέλουμε. Παρατηρήστε ότι έχουμε

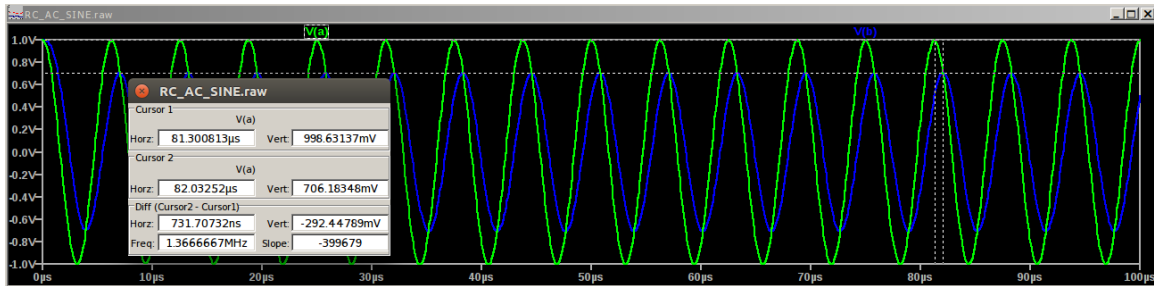


Εικόνα 2.18: Απόκριση του κυκλώματος RC σε συνημιτονοειδές σήμα.



Εικόνα 2.19: Παράμετροι της πηγής τάσης.

θέσει $f_0 = f_{3dB} \cong 160kHz$ οπότε περιμένουμε ότι το πλάτος της τάσης πάνω στον πυκνωτή θα είναι $|V_C|^2 \cong |V_0|^2/2 = \frac{1}{2}$ οπότε $|V_C| \cong \sqrt{2}/2 \cong 0.707V$ ενώ η φάση της τάσης θα είναι $\phi_C \cong -\pi/4$. Αρνητική διαφορά φάσης σημαίνει ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή θα φαίνεται να προπορεύεται από την τάση της πηγής στο χρόνο. Πράγματι ας θεωρήσουμε την κυματομορφή $\cos(2\pi f_0 t)$ και την κυματομορφή $\cos(2\pi f_0 t - \phi')$ όπου $\phi' > 0$. Η πρώτη έχει μέγιστα στα σημεία $t_m = 2\pi m + \pi/2$ ενώ η δεύτερη έχει μέγιστα στα σημεία $t'_m = 2\pi m + \pi/2 + \phi'/(2\pi f_0)$

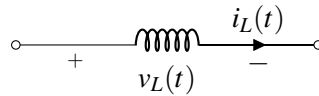


Εικόνα 2.20: Τάση εισόδου και τάση του στα άκρα του πυκνωτή.

τα οποία είναι δεξιότερα κατά $\phi'/(2\pi f_0)$ από τα μέγιστα της πρώτης. Στην περίπτωση μας $\phi' = -\phi_C = \pi/4$ και επομένως τα μέγιστα της τάσης του πυκνωτή θα είναι δεξιότερα κατά $\Delta t = (\pi/4)/(2\pi f_0) = 1/(8f_0) \cong 0.71\mu s$. Στην εικόνα 2.20 χρησιμοποιούμε τους μετρητές του LT-SPICE για να επιβεβαιώσουμε ότι το πλάτος της τάσης του πυκνωτή είναι $\cong 0.7V$ ενώ τα μέγιστα της τάσης του πυκνωτή βρίσκονται περίπου $0.7\mu s$ δεξιότερα από τα μέγιστα της τάσης εισόδου.

2.8 Φτιάχνοντας απλά φίλτρα

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία για να δείξουμε πως μπορούμε να υλοποιήσουμε απλά φίλτρα. Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί σε αρκετά μεγάλο βάθος με τους πυκνωτές και τις αντιστάσεις αλλά δεν έχουμε πει τίποτα για τα πηνία. Τα πηνία συμβολίζονται όπως δείχνει η εικόνα 2.21. Στην περίπτωση του πυκνωτή το ρεύμα ήταν ανάλογο



Εικόνα 2.21: Ένα πηνίο

της παραγώγου της τάσης στα άκρα του πυκνωτή. Τώρα συμβαίνει το ανάποδο. Η τάση είναι ανάλογη του ρεύματος που διαρρέει το στοιχείο,

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.52)$$

όπου L είναι μία σταθερά που ονομάζεται η επαγωγή του πηνίου και μετριέται σε Henry (H) που ισοδυναμούν με Ωs . Στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να δείξουμε ότι και το πηνίο στην ουσία είναι μία αντίσταση. Αν αντικαταστήσουμε $v_L = V_L e^{j2\pi f_0 t}$ και $i_L = I_L e^{j2\pi f_0 t}$ τότε $L \frac{di_L(t)}{dt} = (j2\pi f_0 L) I_L e^{j2\pi f_0 t}$ οπότε:

$$\frac{V_L}{I_L} = \frac{v_L}{i_L} = j2\pi f_0 L \quad (2.53)$$

Επομένως στο πεδίο των συχνοτήτων, το πηνίο αντιστοιχεί σε μία φανταστική αντίσταση $j2\pi f_0 L$. Για ευκολία ξαναγράφουμε την σχέση που διέπει τον πυκνωτή στο πεδίο των

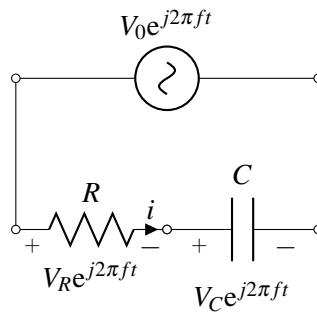
συχνοτήτων,

$$\frac{V_C}{I_C} = \frac{v_C}{i_C} = (j2\pi f_0 C)^{-1} \quad (2.54)$$

καθώς και την αντίσταση,

$$\frac{V_R}{I_R} = \frac{v_R}{i_R} = R \quad (2.55)$$

Οι εξισώσεις (2.53), (2.54) και (2.55) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μαζί με τους νόμους του Kirchoff για την ανάλυση οποιουδήποτε κυκλώματος περιέχει αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία. Είδαμε ήδη το απλό κύκλωμα RC το οποίο παρατίθεται στο 2.22. Στην ενότητα 2.5 δείξαμε ότι η σχέση



Εικόνα 2.22: Το κύκλωμα RC ως φίλτρο

που συνδέει την τάση στα άκρα του πυκνωτή με την τάση εισόδου είναι,

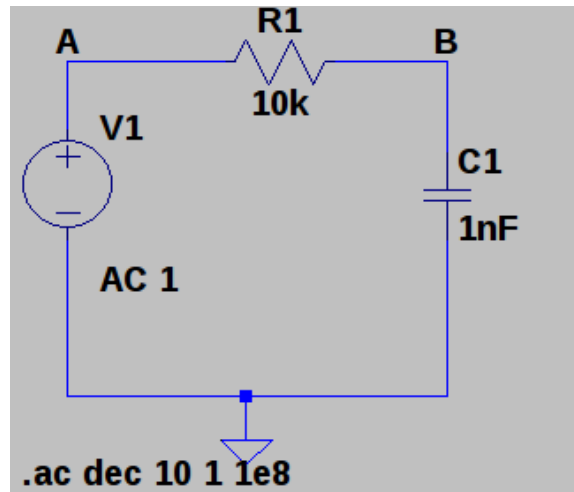
$$\frac{v_C}{v_{IN}} = \frac{1}{j2\pi f RC + 1} \quad (2.56)$$

και πως στις χαμηλές συχνότητες όλη η τάση εισόδου συγκεντρώνεται πάνω στον πυκνωτή, $v_C/v_{IN} \cong 1$. Δεδομένου ότι σύμφωνα με τον νόμο του Kirchoff, θα πρέπει να έχουμε $v_C + v_R = v_{IN}$ έπεται ότι:

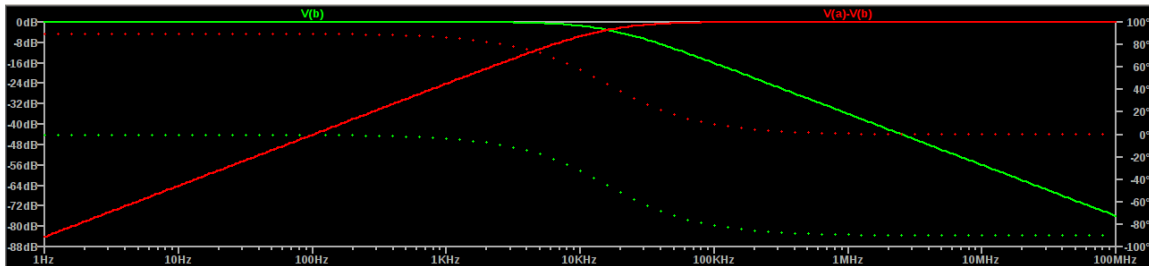
$$\frac{v_R}{v_{IN}} = \frac{v_{IN} - v_C}{v_{IN}} = 1 - \frac{1}{j2\pi f RC + 1} = \frac{j2\pi f RC}{j2\pi f RC + 1} \quad (2.57)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι στις υψηλές συχνότητες ($2\pi f RC \gg 1$) θα έχουμε $1 + j2\pi f RC + 1 \cong j2\pi f RC + 1$ οπότε $v_R/v_{IN} \cong 1$. Δηλαδή στις υψηλές συχνότητες όλη η τάση συγκεντρώνεται πάνω στην αντίσταση ενώ στις χαμηλές συχνότητες όλη η τάση συγκεντρώνεται πάνω στον πυκνωτή. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε και στο LT-SPICE χρησιμοποιώντας το κύκλωμα της εικόνας 2.23. Στην εικόνα 2.24 έχουμε παραστήσει γραφικά το αποτέλεσμα της AC ανάλυσης του κυκλώματος. Εκτός από την τάση στα άκρα του πυκνωτή έχουμε παραστήσει και την τάση στα άκρα της αντίστασης. Αυτό γίνεται κάνοντας Ctrl-A στην γραφική παράσταση και στη συνέχεια προσθέτουμε την έκφραση V(b)-V(a) που στην ουσία είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης. Η εικόνα 2.24 επαληθεύει το συμπέρασμα που είπαμε προηγουμένως, δηλαδή ότι στις υψηλές συχνότητες όλη η τάση μεταφέρεται πάνω στην αντίσταση. Οπότε φανταστείτε μία εφαρμογή όπου θα θέλαμε να διαχωρίσουμε τις υψηλές από τις χαμηλές συχνότητες του σήματος. Για παράδειγμα σε ένα ηχείο θέλουμε να

στείλουμε τα μπάσα (χαμηλές συχνότητες) σε ένα ηχείο με μεγάλο κώνο (subwoofer) ενώ τις υψηλές συχνότητες σε ένα δεύτερο ηχείο (twitter). Θα μπορούσαμε να συνδέσουμε το μεγάλο ηχείο στα άκρα του πυκνωτή και το μικρότερο ηχείο στα άκρα της αντίστασης. Στην πράξη χρησιμοποιούνται πιο εξειδικευμένα φίλτρα που περιέχουν περισσότερους πυκνωτές, πηνία και αντιστάσεις ωστόσο η λογική είναι παρόμοια. Τι θα γινόταν αν συνδεάμε τον πυκνωτή



Εικόνα 2.23: Τάση εισόδου και τάση του στα άκρα του πυκνωτή.



Εικόνα 2.24: Τάση εισόδου και τάση του στα άκρα του πυκνωτή.

παράλληλα και όχι σε σειρά με την αντίσταση όπως δείχνει η εικόνα 2.25; Στην περίπτωση αυτή η τάση θα ήταν ίδια και για τα δύο στοιχεία, δηλαδή τον πυκνωτή C και την αντίσταση R αλλά το ρεύμα θα ήταν διαφορετικό. Έτσι θα είχαμε,

$$i_R = \frac{v_{IN}}{R} \quad (2.58)$$

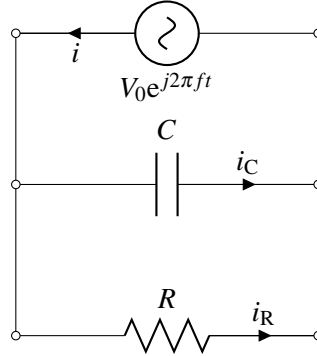
$$i_C = \frac{v_{IN}}{(j2\pi fC)^{-1}} = j2\pi fCv_{IN} \quad (2.59)$$

Αν επεξεργαστούμε λίγο τις (2.58)-(2.59) τότε μπορούμε να συνάγουμε ότι:

$$\frac{i_C}{i} = \frac{j2\pi fRC}{j2\pi fRC + 1} \quad (2.60)$$

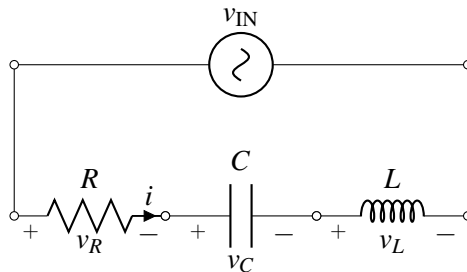
$$\frac{i_R}{i} = \frac{1}{j2\pi fRC + 1} \quad (2.61)$$

Παρατηρούμε την αναλογία με τις (2.56) και (2.57) μόνο που τώρα οι χαμηλές συχνότητες μαζεύονται στην αντίσταση και οι υψηλές στον πυκνωτή.



Εικόνα 2.25: Το παράλληλο κύκλωμα RC.

Ας δούμε τώρα ένα πιο σύνθετο παράδειγμα, το κύκλωμα RLC που όπως φαίνεται και από το όνομα του περιέχει επιπλέον και ένα πηνίο. Ξεκινάμε με τον υπολογισμό του ρεύματος i που



Εικόνα 2.26: Το κύκλωμα RLC

διαρρέει το κύκλωμα. Εφόσον τα τρία στοιχεία είναι σε σειρά, μπορούμε απλά να υπολογίσουμε την συνολική αντίσταση τους προσθέτοντας τις επιμέρους αντιστάσεις, $R_{\text{tot}} = R + (j2\pi fC)^{-1} + j2\pi fL$. Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι επομένως $i = v_{\text{IN}}/R$ δηλαδή,

$$i = \frac{v_{\text{IN}}}{R + (j2\pi fC)^{-1} + j2\pi fL} = v_{\text{IN}} \frac{j2\pi fC}{-4\pi^2 f^2(LC) + j2\pi f(RC) + 1} \quad (2.62)$$

Οι τάσεις v_R, v_C και v_L , στα άκρα της αντίστασης, του πυκνωτή και του πηνίου αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις,

$$\frac{v_R}{v_{\text{IN}}} = \frac{iR}{v_{\text{IN}}} = \frac{j2\pi f(RC)}{-4\pi^2 f^2(LC) + j2\pi f(RC) + 1} \quad (2.63)$$

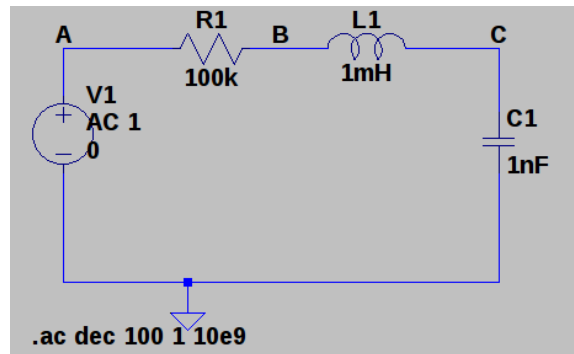
$$\frac{v_L}{v_{\text{IN}}} = \frac{i(j2\pi fL)}{v_{\text{IN}}} = \frac{-4\pi^2 f^2(LC)}{-4\pi^2 f^2(LC) + j2\pi f(RC) + 1} \quad (2.64)$$

$$\frac{v_C}{v_{IN}} = \frac{i(j2\pi C f)^{-1}}{v_{IN}} = \frac{1}{-4\pi^2 f^2(LC) + j2\pi f(RC) + 1} \quad (2.65)$$

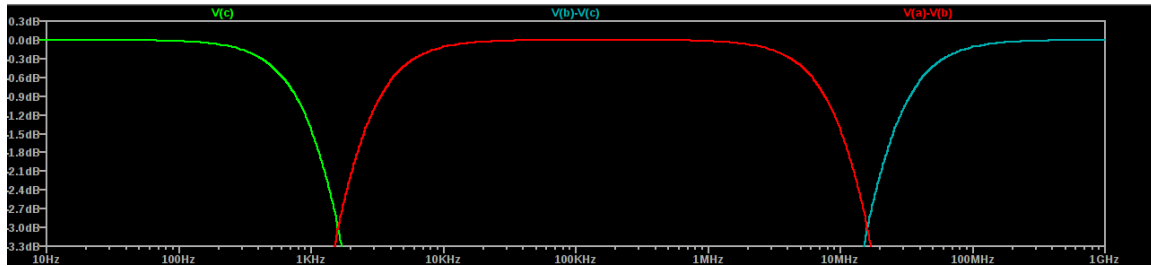
Είναι εύκολο να δούμε ότι στις πολύ μικρές συχνότητες, $2\pi f(RC) \ll 1$ θα έχουμε πάλι $v_C/v_{IN} \cong 1$ οπότε ο πυκνωτής έχει την τάση να συγκεντρώνει τις χαμηλές συχνότητες. Στις υψηλές συχνότητες, $2\pi f(RC) \gg 1$ θα έχουμε $v_L/v_{IN} \cong 1$, οπότε οι φασματικές συνιστώσες με υψηλές συχνότητες συγκεντρώνονται στο πηνίο. Μπορούμε να δούμε ποιες συχνότητες συγκεντρώνονται στην αντίσταση. Αν θέσουμε $v_R/v_{IN} = 1$ στην (2.63) θα πάρουμε $-4\pi^2 f^2(LC) + 1 = 0$ οπότε η συχνότητα f_r στην οποία έχουμε $v_R/v_{IN} = 1$ είναι η,

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.66)$$

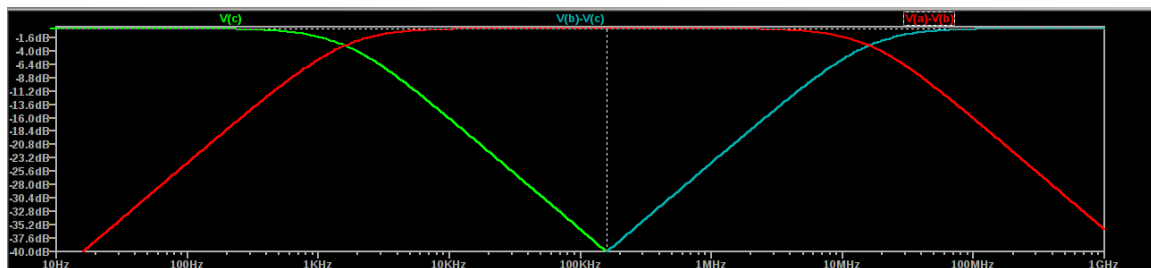
Μπορούμε να μελετήσουμε το κύκλωμα στο LT-SPICE. Στην εικόνα 2.27 δείχνουμε το κύκλωμα που θα χρησιμοποιήσουμε. Έχουμε θέσει $R = 100\text{k}\Omega$, $C = 1\text{nF}$ και $L = 1\text{mH}$. Για τις παραμέτρους αυτές έχουμε από την σχέση (2.66), $f_r = 159.2\text{kHz}$ και επομένως περιμένουμε οι συχνότητες κοντά στα 159.2kHz να συγκεντρώνονται κοντά στην αντίσταση. Αυτό φαίνεται και από το αποτέλεσμα της προσομοίωσης όπως δείχνουμε στην εικόνα 2.28. Στην εικόνα 2.29 δείχνουμε την απόκριση του κυκλώματος με μεγαλύτερη κλίμακα στον άξονα του πλάτους. Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι μακριά από την συχνότητα $f = f_r$, το φάσμα της τάσης πάνω στην αντίσταση παρουσιάζει την γνωστή εξασθένιση 20dB/decade . Επίσης και από τις δύο εικόνες προκύπτει όπως αναμέναμε ότι για μικρές συχνότητες ($f \ll 1/(2\pi RC) = 15.9\text{MHz}$) το σήμα συγκεντρώνεται πάνω στον πυκνωτή ($|v_C|^2 \cong 0\text{dB}$) ενώ για μεγάλες συχνότητες ($f \gg 1/(2\pi RC) = 15.9\text{MHz}$) συγκεντρώνεται πάνω στο πηνίο ($|v_L|^2 \cong 0\text{dB}$).



Εικόνα 2.27: Το κύκλωμα RLC στο LT-SPICE.



Εικόνα 2.28: Ανάλυση συχνοτήτων του κυκλώματος RLC.



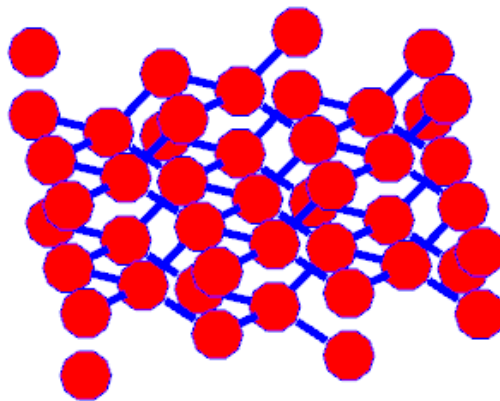
Εικόνα 2.29: Ανάλυση συχνοτήτων του κυκλώματος RLC σε μεγαλύτερη κλίμακα πλάτους.

3. Ημιαγωγικά υλικά

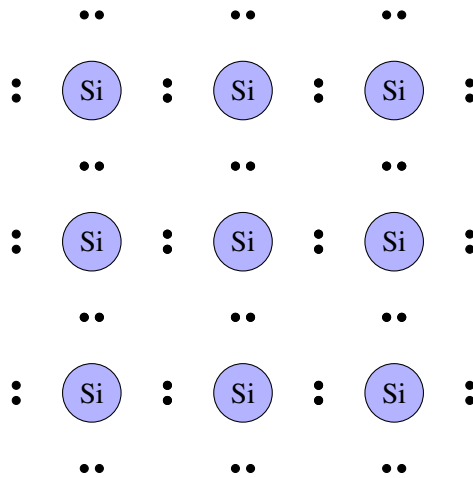
3.1 Εισαγωγή

Στο επίκεντρο της ηλεκτρονικής είναι το *πυρίτιο* (Si) το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως στην υλοποίηση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων σε ολοκληρωμένη μορφή, τα λεγόμενα *ολοκληρωμένα κυκλώματα*. Το πυρίτιο ανήκει σε μία γενικότερη κατηγορία υλικών που ονομάζονται *ημιαγωγοί* των οποίων οι ιδιότητες θα μας απασχολήσουν στο κεφάλαιο αυτό.

Το πυρίτιο έχει την ιδιότητα να σχηματίζει *κρυστάλλους* δηλαδή τα άτομα του να είναι τακτοποιημένα περιοδικά στον χώρο. Η εικόνα 3.1 επιχειρεί να δώσει μία πρώτη απεικόνιση του κρυστάλλου του πυριτίου που είναι όμως αρκετά δύσκολη καθώς πρόκειται για μία τρισδιάστατη απεικόνιση που δύσκολα μεταφέρεται στις δύο διαστάσεις. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι κάθε άτομο του πυριτίου έχει ακριβώς *τέσσερις* κοντινούς γείτονες που είναι άλλα άτομα του ίδιου υλικού. Οι δεσμοί που σχηματίζονται είναι *ομοιοπολικοί δεσμοί*. Όπως δείχνει και η εικόνα 3.2, σε κάθε δεσμό συμμετέχουν τα ηλεκτρόνια της εξωτερικής στοιβάδας δύο γειτονικών ατόμων τα οποία μέσω του δεσμού είναι κοινά και στα δύο άτομα. Εφόσον όλα τα ηλεκτρόνια συμμετέχουν

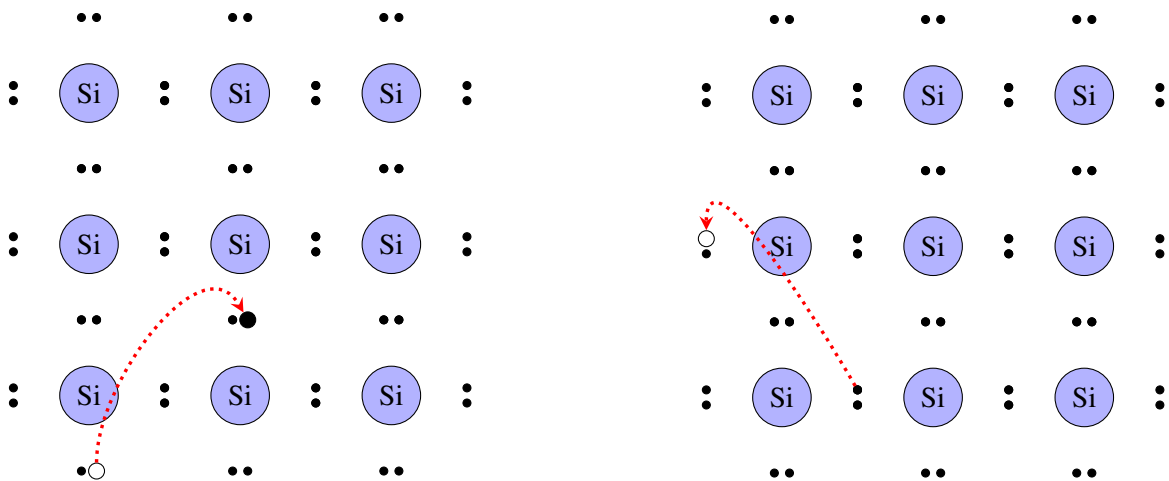


Εικόνα 3.1: Ο κρύσταλλος του πυριτίου



Εικόνα 3.2: Οι δεσμοί των ατόμων του πυριτίου

σε δεσμούς, δεν υπάρχουν φορείς ηλεκτρικού ρεύματος για να υποστηρίξουν δημιουργηθεί ηλεκτρικό ρεύμα όταν εφαρμόσουμε κάποια τάση. Ωστόσο σε θερμοκρασίες πάνω από το απόλυτο μηδέν ($T > -273^{\circ}\text{C}$) πάντα υπάρχουν κάποια ηλεκτρόνια τα οποία κινούνται ελεύθερα και επομένως μπορούν να υποστηρίξουν ηλεκτρικό ρεύμα. Στο πυρίτιο και σε θερμοκρασίες δωματίου τα ηλεκτρόνια είναι ωστόσο πολύ λίγα. Στην εικόνα 3.3 δείχνουμε την κίνηση των



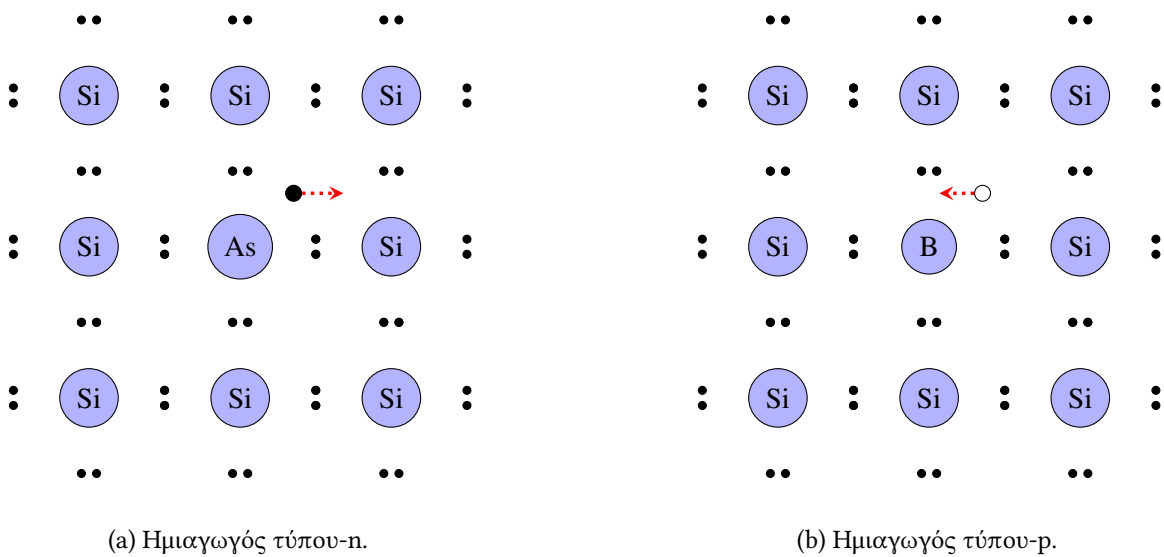
(a) Μετακίνηση ηλεκτρονίου.

(b) Μετακίνηση οπής.

Εικόνα 3.3: Μετακινήσεις φορέων.

φορέων του ηλεκτρικού ρεύματος. Όπως είπαμε και προηγουμένως ορισμένα ηλεκτρόνια έχουν αποσπασθεί από τους ομοιοπολικούς δεσμούς και είναι ελεύθερα με αποτέλεσμα να μπορούν να συμμετέχουν στην δημιουργία ηλεκτρικού ρεύματος, συχνά δε ονομάζονται *ηλεκτρόνια αγωγιμότητας*. Τα ηλεκτρόνια αυτά κινούνται στο πλέγμα και επηρεάζονται ηλεκτρικά πεδία. Κάθε ηλεκτρόνιο που απελευθερώνεται από τους δεσμούς των ατόμων αφήνει πίσω του μία *οπή* όπως δείχνει και η εικόνα 3.3a την οποία μπορεί να καταλάβει ένα άλλο ηλεκτρόνιο το

οποίο επίσης αφήνει πίσω του μία οπή. Πρόκειται για έναν δεύτερο μηχανισμό μετακίνησης ηλεκτρονίων ωστόσο μπορεί κανείς εναλλακτικά να θεωρήσει ότι μετακινείται η οπή από το ένα άτομο στο άλλο όπως δείχνει η εικόνα 3.3b. Η οπή προκαλείται από την απελευθέρωση ενός ηλεκτρονίου από ένα ηλεκτρικά ουδέτερο άτομο. Το ηλεκτρόνιο έχει αρνητικό φορτίο και επομένως η οπή (που όπως είπαμε είναι η έλλειψη ηλεκτρονίου) θα έχει θετικό φορτίο. Το ηλεκτρικό ρεύμα επομένως οφείλεται στην μετακίνηση τόσο των ελεύθερων ηλεκτρονίων όσο και των οπών. Σε θερμοκρασίες δωματίου τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και οι οπές είναι όπως είπαμε λιγιστά και επομένως δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε μεγάλα ρεύματα. Για να αυξήσουμε το ρεύμα, θα πρέπει να αυξήσουμε την συγκέντρωση των ηλεκτρονίων ή των οπών. Αυτό γίνεται με

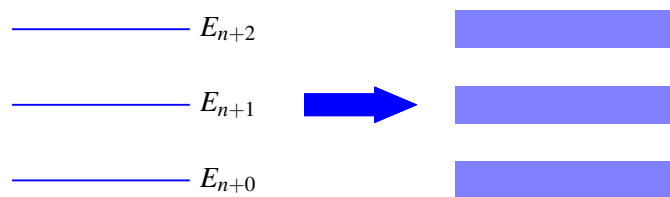


Εικόνα 3.4: Τύποι ημιαγωγών.

την εισαγωγή επιπλέον στοιχείων στον κρύσταλλο που έχουν διαφορετικές ηλεκτρικές ιδιότητες από το πυρίτιο. Στην εικόνα 3.4a βλέπουμε τι συμβαίνει όταν σε ένα σημείο του κρυστάλλου υπάρχει ένα πεντασθενές στοιχείο όπως το Αρσενικό (As). Το As δημιουργεί 4 ομοιοπολικούς δεσμούς με τα γειτονικά άτομα του Si ωστόσο επειδή έχει ένα επιπλέον ηλεκτρόνιο στην εξωτερική του στοιβάδα, το παραπάνω ηλεκτρόνιο μπορεί πολύ εύκολα να γίνει ελεύθερο και να συμμετέχει στην δημιουργία ηλεκτρικού ρεύματος. Το As στην περίπτωση αυτή αναφέρεται ως *πρόσμιξη* και ο ημιαγωγός χαρακτηρίζεται ως *τύπου n* για να τονίσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε περίσσια φορέων αρνητικού φορτίου (ηλεκτρόνια, το n προκύπτει από την αγγλική λέξη negative - αρνητικός). Στην εικόνα 3.4b βλέπουμε τι συμβαίνει όταν σε ένα σημείο του κρυστάλλου υπάρχει ένα τρισθενές στοιχείο όπως το Βόριο (B). Το B δημιουργεί ομοιοπολικούς δεσμούς με τα γειτονικά άτομα του Si ωστόσο επειδή είναι τρισθενές λείπει ένα ηλεκτρόνιο για να συμπληρώσει τέσσερις ομοιοπολικούς δεσμούς και επομένως δημιουργείται μία οπή. Ο ημιαγωγός χαρακτηρίζεται ως *τύπου p* για να τονίσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε περίσσια φορέων θετικού φορτίου (οπές, το p προκύπτει από την αγγλική λέξη positive - θετικός). Το As επίσης αναφέρεται συχνά και ως *δότης* (donor) επειδή δίνει επιπλέον ελεύθερα ηλεκτρόνια ενώ το B αναφέρεται ως *αποδέκτης* (acceptor) επειδή συνεισφέρει οπές οι οποίες μπορούν να υποδεχτούν ηλεκτρόνια.

3.2 Ενεργειακές στάθμες

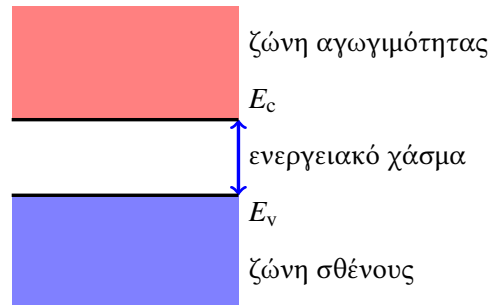
Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα το πως λειτουργούν τα διάφορα ημιαγωγικά στοιχεία που θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, θα πρέπει να ασχοληθούμε με τις ενεργειακές ιδιότητες των φορέων μας δηλαδή των ηλεκτρονίων και των οπών. Η κβαντική θεωρία λέει ότι όταν τα άτομα ενός στοιχείου είναι μακριά το ένα από το άλλο όπως για παράδειγμα στην περίπτωση ενός αερίου, τότε τα ηλεκτρόνια τους μπορούν να έχουν διακριτές τιμές ενέργειας E_n . Οι διακριτές ενέργειες εξαρτώνται από τις λεγόμενες *κβαντικές καταστάσεις* του συστήματος που περιγράφουν τις ιδιότητες των ηλεκτρονίων του ατόμου. Η κβαντική κατάσταση χαρακτηρίζεται από τέσσερις ακέραιους αριθμούς, το κύριο κβαντικό αριθμό n , τον αριθμό τροχιακής ορμής l , τον μαγνητικό αριθμό m_l και τον αριθμό του spin m_s . Μάλιστα, υπάρχει η αρχή του Pauli που μας λέει ότι δεν μπορούν ηλεκτρόνια στο σύστημα που να έχουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς. Σε κάθε κβαντική κατάσταση αντιστοιχεί ένα το πολύ ηλεκτρόνιο. Όταν τα άτομα έρχονται κοντά το ένα στο άλλο όπως συμβαίνει στον κρύσταλλο του πυριτίου τότε αρχίζουν να αλληλεπιδρούν και δημιουργούνται πολλές επιπλέον στάθμες γύρω από τις αρχικές. Έτσι οι ενεργειακές στάθμες πλέον δεν είναι και τόσο ευδιάκριτες και αντικαθίστανται από ενεργειακές ζώνες όπως δείχνει το 3.5. Κάθε ενεργειακή ζώνη αποτελείται



Εικόνα 3.5: Από τις διακριτές ενεργειακές στάθμες στις ενεργειακές ζώνες.

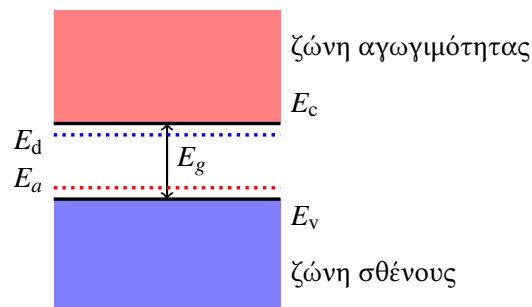
από πολλές διακριτές ενεργειακές στάθμες πολύ κοντά η μία στην άλλη. Όπως είπαμε και πιο πριν, η απαγορευτική αρχή του Pauli δεν επιτρέπει σε περισσότερα από ένα ηλεκτρόνια να βρίσκονται στην ίδια κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι οι ζώνες... καταλαμβάνονται και περιορισμένος αριθμός ηλεκτρονίων μπορεί τελικά να βρίσκεται σε αυτές. Δεν πρέπει να μας προξενεί εντύπωση ότι τα ηλεκτρόνια έχουν την τάση να καταλαμβάνουν ενεργειακές ζώνες με την χαμηλότερη δυνατή ενέργεια. Επομένως περιμένουμε οι χαμηλές ενεργειακές ζώνες να είναι περισσότερο κατειλημμένες από τις ανώτερες. Σε έναν ημιαγωγό, ξεκινάμε από τις κατώτερες ενεργειακές ζώνες είναι πλήρως κατειλημμένες φτάνουμε σε μία ζώνη η οποία είναι σχεδόν πλήρως κατειλημμένη και ονομάζεται *ζώνη σθένους* ενώ η επόμενη της είναι σχεδόν άδεια και ονομάζεται *ζώνη αγωγιμότητας*. Οι πιο ψηλές ενεργειακές ζώνες είναι σχεδόν άδειες. Στην ηλεκτρονική μας ενδιαφέρουν κυρίως οι ζώνες σθένους και αγωγιμότητας. Στην εικόνα 3.6 δίνουμε λίγη μεγαλύτερη έμφαση στις ζώνες αυτές. Η κατώτερη ενέργεια της ζώνης αγωγιμότητας συμβολίζεται με E_c ενώ η ανώτερη ενέργεια της ζώνης σθένους με E_v . Ανάμεσα στις δύο περιοχές υπάρχει μία απαγορευμένη ζώνη που ονομάζεται *ενεργειακό χάσμα*. Πρόκειται για ένα διάστημα ενεργειών από (E_v, E_c) . Το μέγεθος του χάσματος είναι το $E_g = E_c - E_v$. Τα ηλεκτρόνια απαγορεύεται να έχουν τιμές ενέργειας εντός του (E_v, E_c) . Το E_g είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό μέγεθος που καθορίζει πολλές από τις ιδιότητες του υλικού. Για το πυρίτιο έχει τιμή $E_g = 1.1\text{eV}$ (το 1eV ισούται με $1.609 \times 10^{-19}\text{J}$). Τα ηλεκτρόνια που υπάρχουν στην ζώνη αγωγιμότητας είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που δημιουργούν το ηλεκτρικό ρεύμα. Τα ηλεκτρόνια που υπάρχουν στην ζώνη σθένους είναι αυτά που δημιουργούν τους ομοιοπολικούς

δεσμούς. Φυσικά όταν εισάγουμε προσμίξεις στον κρύσταλλο όπως το As ή το B, αυτό έχει



Εικόνα 3.6: Από τις διακριτές ενεργειακές στάθμες στις ενεργειακές ζώνες.

επίπτωση και στις ενεργειακές καταστάσεις του. Στην εικόνα 3.7 δείχνουμε τις νέες ενεργειακές καταστάσεις που δημιουργούνται μέσα στο ενεργειακό χάσμα και οφείλονται σε πεντασθενή στοιχεία E_d αλλά και τρισθενή στοιχεία E_a . Η εικόνα δείχνει μία αρκετά ενδιαφέρουσα κατανομή τόσο για το E_d όσο και για το E_a : βρίσκονται πολύ κοντά στο άκρο της ζώνης αγωγιμότητας και σθένους αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στο E_d χρειάζονται πολύ μικρή ενέργεια για να μεταπέσουν στην ζώνη αγωγιμότητας και να γίνουν ελεύθερα. Αντίστοιχα τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην ζώνη σθένους πολύ εύκολα μεταπίπτουν στην E_a , δημιουργώντας μία οπή στην ζώνη σθένους. Οι ενεργειακές καταστάσεις όπως αυτές της εικόνας 3.7 που προέρχονται από προσμίξεις δοτών ή αποδεκτών που δημιουργούν ενεργειακές στάθμες E_d κοντά στο άκρο της ζώνης αγωγιμότητας E_c ή E_a κοντά στο άκρο της ζώνης σθένους E_v αντίστοιχα ονομάζονται *ρηχές* ενεργειακές καταστάσεις.



Εικόνα 3.7: Ενεργειακές καταστάσεις παρουσία προσμίξεων.

3.3 Πυκνότητα καταστάσεων και κατανομή Fermi-Dirac

Τελικά πόσα ηλεκτρόνια και πόσες οπές μπορεί να έχουμε στο υλικό μας; Συνήθως μας ενδιαφέρει η πυκνότητα των ηλεκτρονίων n που μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου και η πυκνότητα των οπών p που μετρά τον αριθμό των οπών ανά μονάδα όγκου. Για να τα υπολογίσουμε αυτά χρειάζεται να γνωρίζουμε πόσα ηλεκτρόνια μπορούμε να εναποθέσουμε στις δύο ενεργειακές ζώνες που μας ενδιαφέρουν. Οι πυκνότητα καταστάσεων D_c στην ζώνη

αγωγιμότητας μετράει τον αριθμό των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα ενέργειας, δηλαδή:

$$D_c(E) = \frac{\text{Αριθμός ηλεκτρονίων αγωγιμότητας σε όγκο } \Delta V \text{ με ενέργεια } E \text{ και } E + \Delta E}{\Delta E \Delta V} \quad (3.1)$$

με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε την πυκνότητα καταστάσεων D_v στην ζώνη σθένους,

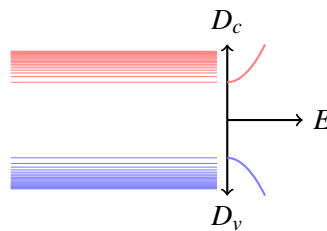
$$D_v(E) = \frac{\text{Αριθμός ηλεκτρονίων σθένους σε όγκο } \Delta V \text{ με ενέργεια } E \text{ και } E + \Delta E}{\Delta E \Delta V} \quad (3.2)$$

Αν λάβουμε υπόψη μας την απαγορευτική αρχή του Pauli μπορούμε να υπολογίσουμε τις πυκνότητες καταστάσεων με τις ακόλουθες σχέσεις (παραλείπουμε την απόδειξη):

$$D_c(E) = \frac{8\pi m_n \sqrt{2m_n(E - E_c)}}{h^3} \quad \text{όταν } E \geq E_c \quad (3.3)$$

$$D_v(E) = \frac{8\pi m_p \sqrt{2m_p(E_v - E)}}{h^3} \quad \text{όταν } E \leq E_v \quad (3.4)$$

Στις εξισώσεις (3.3) και (3.4), h είναι η σταθερά του Planck, $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$ ενώ m_n και m_p είναι οι ενεργές μάζες των ηλεκτρονίων και των οπών αντίστοιχα. Η έννοια της ενεργού μάζας ορίζεται ως εξής: στον ελεύθερο χώρο τα ηλεκτρόνια έχουν μία συγκεκριμένη και σταθερή μάζα η οποία είναι ίση με $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$. Παρουσία του κρυστάλλου το ηλεκτρόνιο υπόκειται στην επίδραση των ατόμων του κρυστάλλου ωστόσο προκύπτει ότι κινείται με σχεδόν παρόμοιο τρόπο με τον ελεύθερο χώρο μόνο που η μάζα του είναι τώρα m_n αντί για m_e . Έχουμε λοιπόν αντικαταστήσει τη μάζα του ηλεκτρονίου με μία ενεργό μάζα η οποία για το πυρίτιο είναι $m_n \cong 0.26m_e$. Μπορούμε να ορίσουμε και μία ενεργό μάζα για τις οπές που στην περίπτωση του πυριτίου είναι $m_p \cong 0.39m_e$, δηλαδή οι οπές είναι "βαρύτερες" από τα ηλεκτρόνια. Στην εικόνα



Εικόνα 3.8: Απεικόνιση της πυκνότητας καταστάσεων.

3.8 δείχνουμε ποιοτικά την μεταβολή των D_c και D_v . Κοντά στην άκρη των ζωνών αγωγιμότητας ($E = E_c$) και σθένους ($E = E_v$) οι στάθμες που απαρτίζουν τις ζώνες είναι πιο αραιές και όσο απομακρυνόμαστε από αυτές αρχίζουν και πυκνώνουν με αποτέλεσμα να αυξάνουν και τα D_c και D_v . Τα D_c και D_v παρέχουν πληροφορία για το πόσα ηλεκτρόνια χωράνε σε μία δεδομένη περιοχή ενεργειών από E μέχρι $E + \Delta E$ στις δύο ζώνες. Για να υπολογίσουμε τα n και p χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία για τις προτιμήσεις των ηλεκτρονίων. Αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια εξωτερική πηγή

ενέργειας που να αλληλεπιδρά με το σύστημα και οι συγκεντρώσεις n και p των ηλεκτρονίων και οπών δεν αλλάζουν, τότε η πιθανότητα $f(E)$ μία στάθμη ενέργειας E να είναι κατειλημμένη από ένα ηλεκτρόνιο δίνεται από την σχέση:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/(kT)}} \quad (3.5)$$

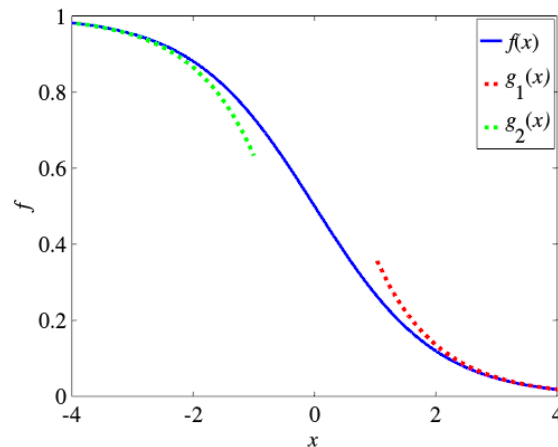
Η εξίσωση (3.5) ονομάζεται κατανομή των Fermi-Dirac. Στην εξίσωση k είναι η σταθερά του Boltzmann, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{m}^2 \text{kgs}^{-2} \text{K}^{-1}$, T είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin ($= 273 + \theta$, όπου θ η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου) ενώ E_F είναι η στάθμη Fermi. Στην εικόνα 3.9 δείχνουμε την κατανομή Fermi-Dirac συναρτήσει του $x = (E - E_F)/(kT)$ μαζί με δύο χρήσιμες προσεγγίσεις της. Για μεγάλα $x = (E - E_F)/(kT)$ θα έχουμε $e^{(E-E_F)/(kT)} + 1 \cong e^x$, οπότε

$$f(E) \cong \frac{1}{e^x} = e^{-x} = g_1(x) \quad (3.6)$$

Για μικρά $x = (E - E_F)/(kT)$ θα έχουμε $(1 + e^x)^{-1} \cong 1 - e^{-x}$ οπότε η κατανομή Fermi-Dirac προσεγγίζεται από την,

$$f(E) \cong 1 - e^{-x} = g_2(x) \quad (3.7)$$

Η εικόνα 3.9 δείχνει ότι για $x \leq -3$ η προσέγγιση $f(x) \cong g_2(x)$ είναι πολύ καλή ενώ για $x \geq 3$



Εικόνα 3.9: Η κατανομή Fermi-Dirac

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) \cong g_1(x)$. Οι προσεγγίσεις αυτές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια. Στο listing 3.1 δείχνουμε το αρχείο fermi.m του OCTAVE που χρησιμοποιήσαμε για να φτιάξουμε το σχήμα 3.9.

```

1 % Plot the Fermi-Dirac distribution and approximations
2 close all
3
4 % range of values for x=(E-Ef)/(kT)
5 x=-4:0.01:4;
6 f=1./(1+exp(x));
7
8 figure(1);
9 plot(x,f,'LineWidth',3);

```

```

10 set(gca, 'FontName', 'Free Serif', 'FontSize', 20);
11 xlabel('\itx ');
12 ylabel('\itf ');
13
14 x1=1:0.01:4;
15 f1=exp(-x1);
16 hold on;
17 plot(x1, f1, 'r--', 'LineWidth', 4);
18
19 x2=-4:0.01:-1;
20 f2=1-exp(x2);
21 hold on;
22 plot(x2, f2, 'g--', 'LineWidth', 4);
23 legend('\itf\rm(\itx\rm)', '\itg\rm_1(\itx)', '\itg\rm_2(\itx)');

```

Listing 3.1: Το αρχείο fermi.m

3.4 Πυκνότητες φορέων

Τώρα που γνωρίζουμε τις πυκνότητες καταστάσεων D_c και D_v , καθώς και την πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται σε μία ενεργειακή στάθμη E μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των ηλεκτρονίων και των οπών στις ζώνες αγωγιμότητας και σθένους αντίστοιχα. Για να το κάνουμε αυτό, ας σκεφτούμε πρώτα ένα ανάλογο με τα συρτάρια μίας ντουλάπας μέσα στα οποία βάζουμε τζιν παντελόνια. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι έχουμε N συρτάρια και κάθε συρτάρι έχει M χωρίσματα ενώ η πιθανότητα να βάλουμε τζιν παντελόνι σε κάθε χωρίσμα είναι p . Πόσος είναι ο μέσος αριθμός N_b με τζιν που έχουμε στην ντουλάπα; Είναι ένα κλασικό πρόβλημα που μπορούμε να λύσουμε χρησιμοποιώντας θεωρία πιθανοτήτων. Αρχικά βρίσκουμε τον μέσο αριθμό τζιν σε κάθε συρτάρι που είναι το γινόμενο pM . Για παράδειγμα αν έχουμε πιθανότητα 50% να βάλουμε τζιν σε κάθε χωρίσμα ($p = 0.5$) και κάθε συρτάρι έχει $M = 4$ χωρίσματα τότε ο μέσος αριθμός τζιν σε κάθε συρτάρι θα είναι $pM = 0.5 \times 4 = 2$. Στη συνέχεια απλά αθροίζουμε όλα τα τζιν στα συρτάρια για να βρούμε το μέσο αριθμό τζιν στην ντουλάπα που θα είναι $(pM)N = pMN$. Αν η ντουλάπα μας έχει 5 συρτάρια θα έχουμε $pMN = 2 \times 5 = 10$ τζιν κατά μέσο όρο μέσα στην ντουλάπα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πιθανότητα να βάλουμε ένα τζιν διαφέρει ανά συρτάρι, δηλαδή για το πρώτο συρτάρι είναι p_1 , για το δεύτερο p_2 και για το $q^{\text{οστό}}$ είναι p_q . Επίσης τα συρτάρια δεν έχουν όλα το ίδιο μέγεθος. Το πρώτο έχει M_1 χωρίσματα, το δεύτερο M_2 και το $q^{\text{οστό}}$ έχει M_q . Τότε απλά κάθε συρτάρι θα έχει διαφορετικό μέσο αριθμό τζιν. Το πρώτο θα έχει p_1M_1 , το δεύτερο p_2M_2 ενώ το $q^{\text{οστό}}$ θα έχει p_qM_q . Αθροίζοντας για όλα τα συρτάρια βρίσκουμε, $N_b = \sum_{q=1}^N p_qM_q$. Στην περίπτωση της ζώνης αγωγιμότητας τα τζιν είναι τα ηλεκτρόνια, η ντουλάπα η ζώνη αγωγιμότητας, τα συρτάρια οι ενεργειακές στάθμες E εντός της ζώνης, ο αριθμός των χωρισμάτων καθορίζεται από την πυκνότητα καταστάσεων $D_c(E)$ ενώ η πιθανότητα να βάλουμε ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε στάθμη καθορίζεται από την κατανομή Fermi-Dirac $f(E)$. Αν υποθέσουμε ότι οι στάθμες μέσα στην ζώνη αγωγιμότητας είναι E_n τότε προσεγγιστικά ο μέσος αριθμός των ηλεκτρονίων M_q ανά μονάδα όγκου θα δίνεται $D_c(E_q)\Delta E_q$ όπου ΔE_q είναι η απόσταση της στάθμης E_q από την επόμενη, $\Delta E_q = E_{q+1} - E_q$ και επομένως $M_q = D_c(E_q)(E_{q+1} - E_q)$. Οι πιθανότητες p_q δίνονται από την $p_q = f(E_q)$. Οπότε αθροίζοντας βρίσκουμε την μέση συγκέντρωση των ηλεκτρονίων,

$$n = \sum_{q=1}^N D_c(E_q)f(E_q)\Delta E_q \quad (3.8)$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι στάθμες της ζώνης E_n είναι αρκετά πυκνές κάτι που ισχύει στην πραγματικότητα τότε το άθροισμα (3.8) είναι απλά το ολοκλήρωμα της $f(E)D_c(E)$ μέσα στην ζώνη αγωγιμότητας,

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f(E)D_c(E)dE = \int_{E_c}^{\infty} n'(E)dE \quad (3.9)$$

όπου ορίζουμε την βοηθητική συνάρτηση:

$$n'(E) = f(E)D_c(E) \quad (3.10)$$

Το κάτω άκρο του ολοκληρώματος είναι ίσο με E_c επειδή αυτή είναι η μικρότερη στάθμη ενέργειας και επομένως το άθροισμα (3.8) πρέπει να ξεκινάει από αυτή ($E_1 = E_c$). Το άνω άκρο το θεωρούμε ότι είναι το συν άπειρο (∞) επειδή όπως είδαμε στην (3.6) η $f(E)$ φθίνει πολύ γρήγορα (εκθετικά e^{-x}) ενώ το D_c όπως αυτό καθορίζεται στην (3.3) αυξάνεται πιο αργά (\sqrt{x}). Άρα πολύ γρήγορα το $f(E)D_c(E)$ θα μηδενίζεται πριν φτάσουμε στο άνω άκρο της ζώνης αγωγιμότητας και δεν έχει σημασία αν στο άνω άκρο του ολοκληρώματος θεωρήσουμε το πραγματικό άκρο της ζώνης αγωγιμότητας ή το ∞ αφού η συνάρτηση θα είναι μηδέν εκεί ούτως ή αλλιώς. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των οπών p . Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα θα ασχοληθούμε με την ζώνη αγωγιμότητας και θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η οπή υπάρχει όταν δεν υπάρχει το ηλεκτρόνιο. Επομένως η πιθανότητα να έχουμε οπή είναι $1 - f(E)$. Με τους ίδιους συλλογισμούς μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι,

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} (1 - f(E))D_v(E)dE = \int_{-\infty}^{E_v} p'(E)dE \quad (3.11)$$

όπου και πάλι ορίζουμε μία βοηθητική συνάρτηση,

$$p'(E) = (1 - f(E))D_v(E) \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το OCTAVE για να υπολογίσουμε τις τιμές των n και p χρησιμοποιώντας τις (3.9) και (3.11). Για το σκοπό αυτό παραθέτουμε το listing 3.2.

```

1 % Calculate carrier concentrations for a semiconductor material
2
3 close all
4 clc
5
6 % Constants
7 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
8 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
9 mp=0.38*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
10 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
11 T=300; % temperature (Kelvin)
12 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
13 Ev=0; % Top of valence band (can be assumed zero)
14 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
15 EceV=Ev+EgeV; % Bottom of conduction band (eV)
16 EfeV=EgeV/2; % Fermi level (eV)
17
18 % Unit conversion
19 Ec=1.609e-19*EceV; % Bottom of conduction band (J)
20 Ef=1.609e-19*EfeV; % Fermi Level (J)
21 Eg=1.609e-19*EgeV; % Bottom of conduction band (J)
22
23 % useful functionals

```

```

24 f=@(E) 1./(1+exp((E-Ef)/k/T)); % Fermi-Dirac distribution
25 Dc=@(E) 8*pi*mn*sqrt(2*mn*(E-Ec))/h^3.*(E>=Ec); % conduction band density of states
26 Dv=@(E) 8*pi*mp*sqrt(2*mp*(abs(Ev-E)))/h^3.*(E<=Ev); % valence band density of states
27
28 % Calculate carrier and hole density
29 EeV=-2:0.001:3; % energy values (eV)
30 E=1.609e-19*EeV; % energy values (J)
31
32 % Calculate mean carrier densities/Joule
33 nE=f(E).*Dc(E); % electron density
34 pE=(1-f(E)).*Dv(E); % hole density
35
36 close all
37 figure(1);
38
39 % Change units to cm^-3
40 Dc_cm3=Dc(E)/1e6;
41 Dv_cm3=Dv(E)/1e6;
42 nE_cm3=nE/1e6;
43 pE_cm3=pE/1e6;
44
45 % Calculate cumulative carrier densities
46 n_cm3=cumtrapz(E,nE_cm3);
47 i=length(pE_cm3):-1:1;
48 p_cm3(i)=-cumtrapz(E(i),pE_cm3(i));
49
50 % Visualize density of states
51 figure(1);
52 plot(EeV,Dc_cm3/1e40,'LineWidth',3,EeV,Dv_cm3/1e40,'LineWidth',3);
53 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
54 xlabel('\it E \rm [eV]');
55 ylabel('\itD_c\rm or \itD_p\rm [\times 10^{40}cm^{-3}J^{-1}] ');
56 legend('\itD_c ', '\itD_p ');
57
58 % Visualize electron and hole mean densities
59 figure(2);
60 plot(EeV,nE_cm3/1e30,'LineWidth',3,EeV,pE_cm3/1e30,'LineWidth',3);
61 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
62 xlabel('\it E \rm [eV]');
63 ylabel('d\itn/\rmd\itE \rm or d\itp/\rmd\itE\rm [\times 10^{30}cm^{-3}J^{-1}] ');
64 legend('d\itn/\rmd\itE ', 'd\itp/\rmd\itE ');
65 xlim([-0.5 1.5]);
66
67 % Visualize cumulative electron and hole densities
68 figure(3);
69 plot(EeV,n_cm3/1e10,'LineWidth',3,EeV,p_cm3/1e10,'LineWidth',3);
70 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
71 xlabel('\it E\rm_1 or \it E\rm_2 \rm [eV]');
72 ylabel('\itn\rm(\itE\rm_1) or \itp\rm(\itE\rm_2) [\times 10^{10}cm^{-3}] ');
73 legend('\itn\rm(\itE\rm_1)', '\itp\rm(\itE\rm_2) ');
74 xlim([-0.5 1.5]);

```

Listing 3.2: Το αρχείο carrierc.m

. Ας δούμε λίγο τι έχουμε κάνει στο listing 3.2. Στην αρχή κάνουμε close all και clc. Αυτό σβήνει όλα τα υπάρχοντα σχήματα του OCTAVE και καθαρίζει το κείμενο στο command window. Στη συνέχεια στις γραμμές 7-16 ορίζουμε τις παραμέτρους του προβλήματος. Προσέξτε ότι έχουμε ορίσει τις ενέργειες σε eV και όχι J. Αυτό το κάνουμε επειδή όσοι ασχολούνται με ημιαγωγούς συνήθως τους βολεύουν τα eV στους υπολογισμούς τους. Προσέξτε επίσης ότι έχουμε θέσει (αυθαίρετα) την ενέργεια $E_v = 0$, δηλαδή η άνω κορυφή της ζώνης σθένους είναι στο μηδέν. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε επειδή στη φυσική έχουμε την ευχέρεια να χρησιμοποιούμε μία δική μας ενέργεια αναφοράς για να μετρούμε όλες τις άλλες ενέργειες. Αν δείτε στις εξισώσεις

(3.3), (3.4) και (3.5) δεν εμφανίζεται ποτέ μία τιμή ενέργειας μόνη της. Πάντα έχουμε διαφορές ενεργειών, π.χ. $E - E_F$ κτλ. Επομένως δεν έχει σημασία που θέτουμε το μηδέν στην ενέργεια και επιλέγουμε $E_v = 0$. Στη συνέχεια ορίζουμε την στάθμη Fermi στο ενδιάμεσο του απαγορευμένου χάσματος $E_F = (E_c - E_v)/2 = E_c/2$. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε μία άλλη τιμή ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν στο σύστημα μας. Παρακάτω θα δούμε ποια ακριβώς πρέπει να είναι η τιμή της στάθμης Fermi όταν το υλικό είναι σε θερμική ισορροπία. Στις γραμμές 19-21 κάνουμε μετατροπές μονάδων. Καλό είναι να επαναφέρουμε τις ενέργειες σε J όταν κάνουμε τους υπολογισμούς μας για να μην μπερδευτούμε. Οι γραμμές 24-26 περιέχουν εντολές που δεν έχουμε δει μέχρι τώρα. Ορίζουν συναρτήσεις στο OCTAVE. Υπάρχουν δύο είδη συναρτήσεων στο OCTAVE. Το πρώτο είναι αυτές που ορίζονται με την εντολή function. Είναι αποθηκευμένες σε ξεχωριστά αρχεία .m και είναι το αντίστοιχο των συναρτήσεων που φτιάχνουμε στη C. Υπάρχει και ένα δεύτερο είδος συναρτήσεων που ορίζεται με τον τελεστή @. Όταν έχουμε απλές περιπτώσεις, π.χ. θέλουμε να ορίσουμε μία συνάρτηση $g(x) = x^2$, χρησιμοποιούμε την εντολή $g=@(x) x.^2$. Αυτό ορίζει μία function g που τετραγωνίζει το όρισμα της. Αν θέσουμε π.χ. $a=g(2)$ το αποτέλεσμα θα είναι απλά $2^2 = 4$. Σε ορισμένες απλές περιπτώσεις αυτό το είδος συναρτήσεων μπορεί να βολεύει περισσότερο από αυτές που ορίζονται σε ένα ξεχωριστό αρχείο. Στις γραμμές 24-26 ορίζουμε τις συναρτήσεις που θα υπολογίζουν την κατανομή Fermi-Dirac $f(E)$ καθώς και τις πυκνότητες καταστάσεων $D_c(E)$ και $D_v(E)$. Στις γραμμές 29-30 ορίζουμε τις τιμές των ενεργειών E που θέλουμε να κάνουμε τους υπολογισμούς μας ενώ στις 33-34 ορίζουμε τα ορίσματα των ολοκληρωμάτων των σχέσεων (3.9) και (3.11), δηλαδή τις συναρτήσεις $n'(E) = f(E)D_c(E)$ και $p'(E) = (1 - f(E))D_v(E)$. Στη συνέχεια στις 40-43 μετατρέπουμε τις D_c , D_v , $n'(E)$ και $p'(E)$ σε J/cm^3 . Στην ηλεκτρονική οι πυκνότητες των φορέων συνήθως αναφέρονται στα βιβλία σε cm^{-3} οπότε και εμείς ακολουθούμε αυτή την τακτική. Στις γραμμές 46-48 υπολογίζουμε τα n και p βάσει των σχέσεων,

$$n(E_1) = \int_{E_c}^{E_1} f(E)D_c(E)dE = \int_{E_c}^{E_1} n'(E)dE \quad (3.13)$$

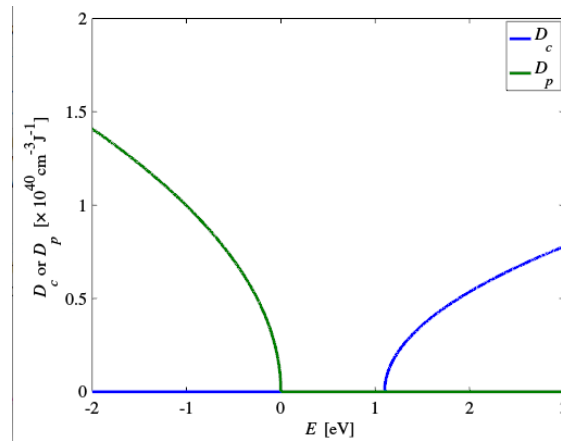
$$p(E_2) = \int_{E_2}^{E_v} (1 - f(E))D_v(E)dE = \int_{E_2}^{E_v} p'(E)dE \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιούμε το E_1 και το E_2 στις (3.13) και (3.14) αντί των ∞ και $-\infty$ στις (3.9) και (3.11) αντίστοιχα επειδή θέλουμε να δούμε πόσο καλή προσέγγιση είναι όντως το να θεωρούμε το άπειρο στο άκρο των ολοκληρωμάτων. Για την αριθμητική ολοκλήρωση χρησιμοποιούμε την συνάρτηση cumtrapz αντί της trapz. Η cumtrapz κάνει ότι ακριβώς η trapz αλλά αθροιστικά. Δηλαδή αντί να υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$ όπου τα άκρα a και b είναι είναι το πρώτο και το τελευταίο αντίστοιχα στοιχείο του διανύσματος t του OCTAVE, υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$ αντικαθιστώντας το b με κάθε μία από τις τιμές του t . Έτσι υπολογίζει αριθμητικά το $\int_a^b f(t)dt$ για πολλές τιμές του b που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το E_1 ή το E_2 . Ο υπολογισμός του (3.14) θέλει λίγο προσοχή επειδή μεταβάλλεται το κάτω άκρο και όχι το άνω άκρο του ολοκληρώματος. Ωστόσο δεν υπάρχει πρόβλημα καθότι $\int_a^b = -\int_b^a$ οπότε,

$$p(E_2) = - \int_{E_v}^{E_2} (1 - f(E))D_v(E)dE \quad (3.15)$$

Εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε την (3.15) για διάφορες τιμές του E_2 ξεκινώντας από τις υψηλές τιμές και καταλήγοντας στις χαμηλές, δηλαδή αντίστροφα από ότι το E_1 στην (3.13). Στις

εντολές 47-48 κάνουμε ακριβώς αυτό δηλαδή φτιάχνουμε τους δείκτες στην μεταβλητή i να έχουν αντίστροφη σειρά και μετά κάνουμε `cumtrapz` στο $E(i)$ που είναι το E αλλά αντεστραμμένο. Οι υπόλοιπες εντολές παράγουν τα σχήματα των εικόνων 3.10, 3.11 και 3.12. Στην εικόνα 3.10 δείχνουμε τις τιμές των πυκνοτήτων καταστάσεων D_v και D_c όπως υπολογίζονται στο OCTAVE. Δεδομένου ότι $m_p > m_n$ και ότι οι πυκνότητες καταστάσεων εξαρτάται από την ενεργό μάζα του φορέα όπως φαίνεται και από τις (3.3) και (3.4), περιμένουμε ότι θα έχουμε μεγαλύτερες εν γένει τιμές για το D_v από ότι για το D_c . Ως αποτέλεσμα θα έχουμε και μεγαλύτερες τιμές για το όρισμα $p'(E)$ του ολοκληρώματος (3.14) από ότι στο $n'(E)$ της εξίσωσης (3.13). Στην εικόνα 3.12 φαίνεται η πυκνότητα φορέων υπολογισμένη από τις (3.13) και (3.15). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι για τιμές του E_1 και του E_2 λίγο δεξιότερα του E_c και λίγο αριστερότερα του E_v αντίστοιχα, οι τιμές των $n(E_1)$ και $p(E_2)$ σταθεροποιούνται. Αυτό συμβαίνει επειδή όπως είπαμε και προηγουμένως εξαιτίας της (3.6) που δείχνει ότι η $f(E)$ φθίνει εκθετικά όσο αυξάνει το E ενώ το ίδιο συμβαίνει για το $1 - f(E)$ για μικρά E όπως δείχνει η (3.7). Οι πυκνότητες καταστάσεων μεταβάλλονται ως $D_c \sim (E - E_c)^{1/2}$ και $D_v \sim (E_v - E)^{1/2}$ δηλαδή πιο αργά από τις $f(E)$ και $1 - f(E)$ με αποτέλεσμα τα $n'(E)$ και $p'(E)$ να έχουν σημαντικές τιμές μόνο κοντά στα E_c και E_v αντίστοιχα. Επομένως είναι λογικό το ολοκλήρωμα τους σύμφωνα με τις (3.13) και (3.14) από ένα σημείο και μετά να μην επηρεάζεται από το άκρο ολοκλήρωσης E_1 και E_2 αντίστοιχα. Θα μπορούσαμε επομένως να θέσουμε απλά $E_1 = \infty$ και $E_2 = -\infty$ όπως κάναμε στις (3.9) και (3.11). Οι πυκνότητες n και p είναι το μέγιστο των $n(E_1)$ και $p(E_2)$ και υπολογίζονται από την εικόνα 3.12, $n \cong 1.7 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ και $p \cong 3 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$

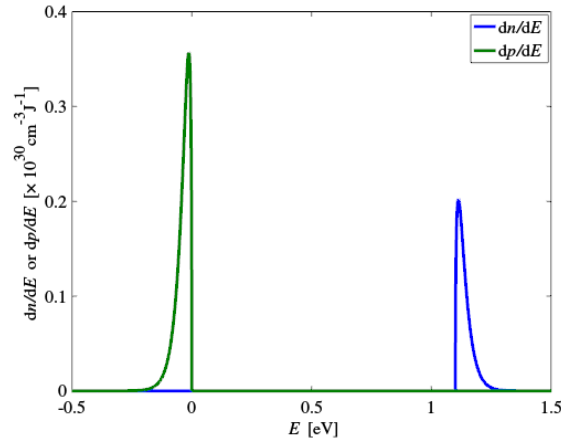


Εικόνα 3.10: Πυκνότητες καταστάσεων D_n και D_c υπολογισμένες στο OCTAVE.

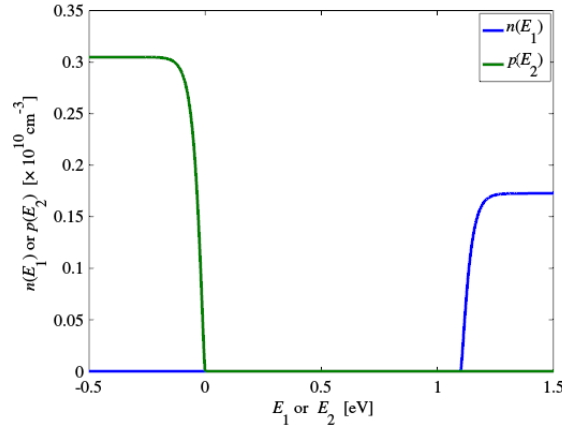
3.5 Προσεγγίσεις για τα n και p

. Αν και θα μπορούσαμε να στηριζόμαστε στο OCTAVE για τους υπολογισμούς των n και p όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, εντούτοις πολλές φορές είναι χρήσιμο να έχουμε και μία αναλυτική σχέση για αυτά. Είναι πιο εύκολο από ότι φαντάζεστε. Ξεκινώντας από την (3.9) γράφουμε,

$$n \cong \frac{8\pi m_n \sqrt{2m_n}}{h^3} \int_{E_c}^{\infty} \sqrt{E - E_c} e^{-(E - E_F)/kT} dE \quad (3.16)$$



Εικόνα 3.11: Πυκνότητες φορέων ανά μονάδα ενέργειας υπολογισμένες στο OCTAVE.



Εικόνα 3.12: Πυκνότητες φορέων υπολογισμένες στο OCTAVE.

όπου έχουμε αντικαταστήσει την προσέγγιση (3.6) για την $f(E)$. Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την (3.16) ως εξής,

$$n \cong \frac{8\pi m_n \sqrt{2m_n}}{h^3} e^{-(E_c - E_F)/kT} \int_{E_c}^{\infty} \sqrt{E - E_c} e^{-(E - E_c)/kT} dE \quad (3.17)$$

Αν θέσουμε $y = (E - E_c)/kT$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής μέσα στο ολοκλήρωμα θα έχουμε, $dE = kT dy$ ενώ το διάστημα ολοκλήρωσης θα μετασχηματιστεί από $E \in [E_c, \infty)$ σε $y \in [0, \infty)$, οπότε

$$n \cong \frac{8\pi (m_n kT)^3 / 2}{h^3} e^{-(E_c - E_F)/kT} \int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y} dy \quad (3.18)$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-y} y^{1/2} dy$ μπορεί να υπολογιστεί και ισούται με $\sqrt{\pi}/2$ (παραλείπουμε την απόδειξη, μπορείτε όμως αν θέλετε να το ψάξετε και μόνοι σας). Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα

στην (3.18) θα έχουμε,

$$n \cong 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(E_c - E_F)/kT} = N_c e^{-(E_c - E_F)/kT} \quad (3.19)$$

όπου έχουμε ορίσει,

$$N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad (3.20)$$

Στην βιβλιογραφία η παράμετρος N_c αναφέρεται ως ενεργή πυκνότητα καταστάσεων της ζώνης αγωγιμότητας. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι,

$$p \cong 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(E_F - E_v)/kT} = N_v e^{-(E_F - E_v)/kT} \quad (3.21)$$

όπου έχουμε ορίσει,

$$N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad (3.22)$$

Κατ' αναλογία η παράμετρος N_v αναφέρεται ως ενεργή πυκνότητα καταστάσεων της ζώνης σθένους. Μπορούμε να εξετάσουμε την ακρίβεια των προσεγγίσεων (3.19) και (3.21) συγκρίνοντας τα αποτελέσματα τους με τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης που κάναμε στο listing 3.2. Στο listing 3.3 δείχνουμε το OCTAVE αρχείο που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τις (3.19) και (3.21). Αν εκτελέσουμε το αρχείο, μπορούμε να δούμε στο command line ότι:

```
» n_cm3
```

```
n_cm3 = 1.7289e+09
```

```
» p_cm3
```

```
p_cm3 = 3.0548e+09
```

που είναι πολύ κοντά στα $n \cong 1.7 \times 10^9 \text{cm}^3$ και $p \cong 3 \times 10^9 \text{cm}^3$ που πήραμε από το listing 3.2.

```
1 % Approximate Calculation of the carrier concentrations for a semiconductor material
2
3 % Constants
4 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
5 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
6 mp=0.38*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
7 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
8 T=300; % temperature (Kelvin)
9 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
10 Ev=0; % Top of valence band (can be assumed zero)
11 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
12 EceV=Ev+EgeV; % Bottom of conduction band (eV)
13 EfeV=EgeV/2; % Fermi level (eV)
14
15 % Unit conversion
16 Ec=1.609e-19*EceV; % Bottom of conduction band (J)
17 Ef=1.609e-19*EfeV; % Fermi Level (J)
18 Eg=1.609e-19*EgeV; % Bottom of conduction band (J)
19
20 % Estimate effective density of states
21 Nc=2*(2*pi*mn*k*T/h^2)^(3/2);
22 Nv=2*(2*pi*mp*k*T/h^2)^(3/2);
```



```

23
24 % Calculate carrier and hole density
25 n=Nc*exp( -(Ec-Ef)/(k*T) );
26 p=Nv*exp( -(Ef-Ev)/(k*T) );
27
28 % Convert to cm^-3
29 n_cm3=n/1e6;
30 p_cm3=p/1e6;

```

Listing 3.3: Το αρχείο carrierappx.m

. Βλέπουμε επομένως ότι οι προσεγγίσεις (3.19) και (3.21) δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα. Όταν έχουμε αναλυτικές προσεγγίσεις μπορούμε να βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα που συχνά δεν προκύπτουν άμεσα από τις προσομοιώσεις. Για παράδειγμα μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι,

$$np = N_v e^{-(E_F - E_c)/(kT)} N_c e^{-(E_c - E_F)/(kT)} = N_c N_v e^{-(E_c - E_v)/(kT)} = N_c N_v e^{-E_g/(kT)} \quad (3.23)$$

Σύμφωνα με την (3.23) το γινόμενο των συγκεντρώσεων των φορέων εξαρτάται μόνο από παραμέτρους που εξαρτώνται από το υλικό, δηλαδή τα N_c , N_v και E_g και την θερμοκρασία T . Επίσης σε ένα υλικό που δεν έχει καθόλου προσμίξεις περιμένουμε όλα τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται ελεύθερα στην ζώνη αγωγιμότητας να έχουν προκύψει από ηλεκτρόνια που βρίσκονταν στην ζώνη σθένους και μέσω της θερμότητας μεταβήκανε στην ζώνη αγωγιμότητας αφήνοντας πίσω τους μία οπή. Επομένως θα πρέπει να έχουμε $n = p = n_i$ όπου το n_i αναφέρεται ως *ενδογενής συγκέντρωση φορέων* του υλικού και προκύπτει από την (3.23) ως εξής:

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_g/(2kT)} \quad (3.24)$$

Η εξίσωση (3.24) δίνει και ένα εναλλακτικό τρόπο γραφής της (3.23),

$$np = n_i^2 \quad (3.25)$$

Στους ημιαγωγούς με προσμίξεις θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τις συγκεντρώσεις των προσμίξεων. Ας υποθέσουμε ότι N_d και N_a είναι οι συγκεντρώσεις των δοτών (πεντασθενών στοιχείων όπως το As) και των αποδεκτών (τρισθενών στοιχείων) (όπως το B). Οι προσμίξεις αυτές δημιουργούν τις επιπλέον ενεργειακές καταστάσεις μέσα στο ενεργειακό χάσμα όπως είδαμε στην εικόνα 3.7. Ποια είναι η πιθανότητα p_d να βρούμε ηλεκτρόνιο στην ενεργειακή κατάσταση E_d ; Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Fermi-Dirac αντικαθιστώντας απλά $E = E_d$. Τότε θα έχουμε,

$$p_d = f(E_d) = \frac{1}{1 + e^{(E_d - E_F)/(kT)}} \quad (3.26)$$

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι για $\theta = 27^\circ\text{C}$ έχουμε $T = \theta + 273^\circ\text{K} = 300^\circ\text{K}$ τότε θα έχουμε ότι το γινόμενο kT θα ισούται περίπου με $4.14 \times 10^{-21}\text{J}$, δηλαδή 0.025eV . Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ενεργειακή κατάσταση E_d είναι πολύ ρηχή, δηλαδή βρίσκεται πολύ κοντά στην E_c , όπως δείχνει και η εικόνα 3.7. Στο πυρίτιο το χάσμα είναι $E_g = 1.1\text{eV}$ και επομένως ένα θεωρήσουμε όπως πριν ότι $E_v = 0$ θα έχουμε $E_c = E_g = 1.1\text{eV}$ ενώ το E_d θα πρέπει να είναι ελαφρώς μικρότερο του E_c , ας υποθέσουμε ότι $E_d = 1.05\text{eV}$. Για αυτές τις παραμέτρους, χρησιμοποιούμε το listing 3.4 για να υπολογίσουμε την πιθανότητα p_d που αντιστοιχεί στα διάφορα επίπεδα Fermi, E_F . Επίσης χρησιμοποιούμε την (3.19) για να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό ηλεκτρονίων n που αντιστοιχεί στις τιμές του E_F . Δεν έχουμε και πάρα πολλά να πούμε για το εν λόγω listing εκτός του ότι αντί της εντολής plot χρησιμοποιούμε την semilogy η οποία κάνει γραφική παράσταση με τον κάθετο άξονα στην λογαριθμική κλίμακα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις εικόνες 3.13 και 3.14.

```

1 % Calculate ionization probability with respect to Fermi level for shallow donor
2
3 close all
4 clc
5
6 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
7 T=300; % temperature (Kelvin)
8 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
9 Ev=0; % Top of valence band (can be assumed zero)
10 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
11 EceV=Ev+EgeV; % Bottom of conduction band (eV)
12 EfeV=EgeV/2+EgeV/100:EgeV; % Fermi level (eV)
13 EdeV=1.05; % Donor level (eV)
14
15 % Unit conversion
16 Ec=1.609e-19*EceV; % Bottom of conduction band (J)
17 Ef=1.609e-19*EfeV; % Fermi Level (J)
18 Eg=1.609e-19*EgeV; % Bottom of conduction band (J)
19 Ed=1.609e-19*EdeV; % Donor level (J)
20
21 % Estimate effective density of states
22 Nc=2*(2*pi*mn*k*T/h^2)^(3/2);
23 Nv=2*(2*pi*mp*k*T/h^2)^(3/2);
24
25 % Calculate electron density
26 n=Nc*exp( -(Ec-Ef)/(k*T) );
27
28 % Convert to cm^-3
29 n_cm3=n/1e6;
30
31 % Calculate ionization probability
32 pd=1./(1+exp( (Ed-Ef)/(k*T)));
33
34 % Plot results
35 figure(1);
36 semilogy(EfeV,pd,'LineWidth',3);
37 set(gca,'FontName','Free Serif','FontSize',20);
38 xlabel('\itE_f \rm [eV]');
39 ylabel('\itp_d ');
40 grid on
41
42 figure(2);
43 semilogy(EfeV,n_cm3,'LineWidth',3);
44 set(gca,'FontName','Free Serif','FontSize',20);
45 xlabel('\itE_f \rm [eV]');
46 ylabel('\itn \rm [cm^{-3}] ');
47 grid on

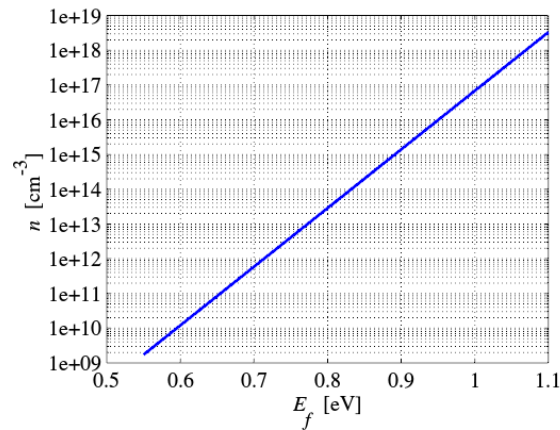
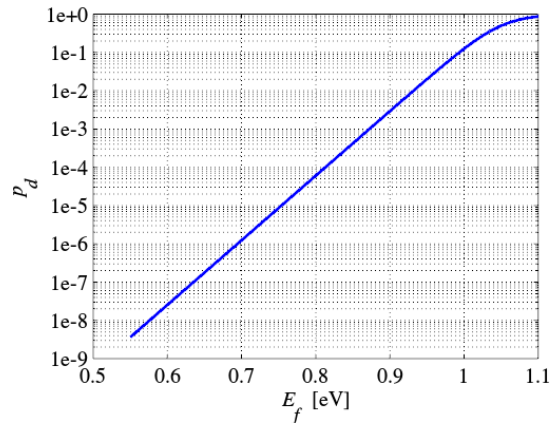
```

Listing 3.4: Το αρχείο ionization.m

. Από τις εικόνες 3.13 και 3.14 αντλούμε μερικά πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Για να γίνει μη αμελητέα η πιθανότητα p_d , π.χ. πάνω από 10%, δηλαδή $p_d \leq 0.1$ θα πρέπει η στάθμη Fermi να έρθει αρκετά κοντά στο $E_d = 1.05\text{eV}$, συγκεκριμένα θα πρέπει $E_F \leq 1\text{eV}$. Για $E_F = 1\text{eV}$ όμως η συγκέντρωση φορέων είναι $n \cong 7 \times 10^{16}\text{cm}^3$. Αυτό σημαίνει ότι πλέον το υλικό έχει έναν πολύ μεγάλο αριθμό ηλεκτρονίων στην ζώνη αγωγιμότητας. Ακόμα και σε τέτοιες υψηλές συγκεντρώσεις όμως η πιθανότητα να βρούμε ένα ηλεκτρόνιο έχει γίνει μόλις 10%. Εφόσον δεν βρίσκουμε ηλεκτρόνια στην E_d σημαίνει ότι αυτά έχουν μεταπηδήσει όλα σχεδόν στην ζώνη αγωγιμότητας. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων του ημιαγωγού χωρίς προσμίξεις δίνεται από την σχέση (3.24) και αν γράψουμε στο command line (αφού έχουμε εκτελέσει το πρόγραμμα),

» sqrt(Nc*Nv)*exp(-Eg/(k*T))/1e6

δηλαδή τον τύπο του n_i σύμφωνα με την (3.24) (διαιρούμε με 1e6 για να μετατρέψουμε τα m^{-3} σε

Εικόνα 3.13: Πυκνότητα ηλεκτρονίων για διάφορες τιμές του E_F .Εικόνα 3.14: Πιθανότητα p_d για διάφορες τιμές του E_F .

cm^{-3}) θα πάρουμε,

$$\text{ans} = 2.2981\text{e}+09$$

οπότε $n_i \cong 2.3 \times 10^9 \text{cm}^{-3}$ που είναι πολύ μικρότερο από την συγκέντρωση φορέων που υπολογίσαμε πριν, $n \cong 7 \times 10^{16} \text{cm}^{-3}$. Επομένως όχι μόνο όλοι σχεδόν οι δότες είναι άδαιοι από ηλεκτρόνια αλλά η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων που έχουν μεταπηδήσει στην ζώνη αγωγιμότητας n είναι σχεδόν ίσα με την συγκέντρωση των δοτών N_d , $n \cong N_d$. Επομένως στην συγκεκριμένη περίπτωση, η συγκέντρωση των δοτών θα είναι $N_d \cong 7 \times 10^{16} \text{cm}^{-3}$. Τι συμβαίνει όταν η πιθανότητα p_d γίνεται μεγαλύτερη καθώς αυξάνει περαιτέρω το E_F ; προφανώς σύμφωνα και με την εικόνα 3.13 αυξάνει και η συγκέντρωση των φορέων n οπότε θα αυξάνεται και το N_d (βέβαια δεν θα ισχύει $n \cong N_d$ αλλά το n θα είναι ένα κλάσμα του N_d). Μην ξεχνάμε όμως ότι όσο πυκνώνουν τα άτομα των προσμίξεων συμβαίνει αυτό που συμβαίνει και με τα άτομα στο κρύσταλλο του πυριτίου. Τελικά οι διακριτές στάθμες γίνονται ζώνες και στις ζώνες αυτές μπορεί κανείς να βρει τιμές ενέργειας για τις οποίες η πιθανότητα να βρούμε ηλεκτρόνια θα είναι μικρές. Επομένως πάλι θα έχουμε πολλά ηλεκτρόνια στην ζώνη αγωγιμότητας. Οπότε η προσέγγιση $n \cong N_d$ είναι αποδεκτή και για μεγαλύτερες τιμές του E_F . Η συγκέντρωση των οπών

θα διέπεται από την εξίσωση (3.25) από την οποία προκύπτει,

$$n \cong N_d \text{ και } p \cong \frac{n_i^2}{N_d} \quad (3.27)$$

Με το ίδιο σκεπτικό καταλήγουμε όταν έχουμε προσμίξεις αποδεκτών,

$$p \cong N_a \text{ και } n \cong \frac{n_i^2}{N_a} \quad (3.28)$$

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι επί τις ουσίας οι (3.27) και (3.28) σε συνδυασμό με τις (3.19) και (3.21) καθορίζουν την στάθμη Fermi όταν δεν έχουμε προσμίξεις. Έτσι από την (3.27) και (3.19) μπορούμε να γράψουμε,

$$E_F = E_c - kT \ln \left(\frac{N_c}{N_d} \right) \quad (3.29)$$

ενώ με τον ίδιο τρόπο έχουμε,

$$E_F = E_v + kT \ln \left(\frac{N_v}{N_a} \right) \quad (3.30)$$

Στην περίπτωση του ανόθευτου ημιαγωγού θέτουμε $n = p = n_i$ και χρησιμοποιούμε τις (3.19) και (3.21) για να βρούμε την στάθμη Fermi,

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + kT \ln \left(\frac{N_c}{N_v} \right) \quad (3.31)$$

Ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε το OCTAVE για να καταλάβουμε καλύτερα την θέση της στάθμης Fermi. Στο listing 3.5 δείχνουμε τον κώδικα που θα χρησιμοποιήσουμε. Πρόκειται για αρκετά απευθείας εφαρμογή οπότε δεν θα σχολιάσουμε και πολλά πράγματα. Στην εικόνα 3.15 βλέπουμε πως μεταβάλλεται η στάθμη Fermi συναρτήσει των N_a ή N_d . Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το N_a ή N_d η στάθμη Fermi E_F πλησιάζει στα άκρα των ζωνών σθένους και αγωγιμότητας εφόσον αντίστοιχα αυξάνουν τα n και p .

```

1 % Approximate Calculation of the carrier concentrations for a semiconductor material
2
3 close all;
4 clear all;
5 clc
6
7 % Constants
8 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
9 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
10 mp=0.38*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
11 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
12 T=300; % temperature (Kelvin)
13 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
14 Ev=0; % Top of valence band (can be assumed zero)
15 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
16 EceV=Ev+EgeV; % Bottom of conduction band (eV)
17 Na_cm3=1e15:1e15:1e17; % Acceptor concentration values (cm^-3)
18 Nd_cm3=1e15:1e15:1e17; % Donor concentration values (cm^-3)
19 q=1.609e-19; % Electron charge
20
21 % Unit conversion

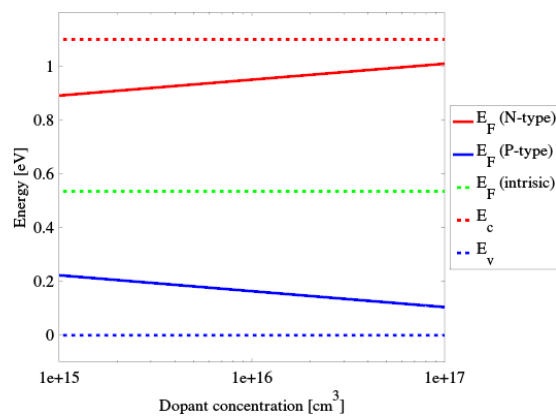
```

```

22 Ec=EceV*q; % Bottom of conduction band (J)
23 Na=Na_cm3*1e6; % Convert to m^(-3)
24 Nd=Nd_cm3*1e6;
25
26 % Estimate effective density of states
27 Nc=2*(2*pi*mm*k*T/h^2)^(3/2);
28 Nv=2*(2*pi*mp*k*T/h^2)^(3/2);
29
30 % Calculate Fermi levels
31
32 % Intrinsic level
33 EFi=(Ec+Ev)/2+k*T*log(Nc/Nv);
34 EFiEV=EFi/q;
35
36 % Ntype level
37 EFn=Ec-k*T*log(Nc./Nd);
38 EFneV=EFn/q;
39
40 % Ptype level
41 EFp=+k*T*log(Nv./Na);
42 EFpeV=EFp/q;
43
44 % Plot results
45 figure(1);
46 semilogx(Nd_cm3,EFneV,'r','LineWidth',3);
47 hold on;
48 semilogx(Na_cm3,EFpeV,'b','LineWidth',3);
49 semilogx(Na_cm3,EFieV*ones(size(Na_cm3)),'g--','LineWidth',3);
50 semilogx(Nd_cm3,EceV*ones(size(Nd_cm3)),'r--','LineWidth',3);
51 semilogx(Na_cm3,Ev*ones(size(Na_cm3)),'b--','LineWidth',3);
52 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
53 xlabel('Dopant concentration [cm^3]');
54 ylabel('Energy [eV]');
55 ylim([-0.1 1.2]);
56 legend({'E_F (N-type)', 'E_F (P-type)', 'E_F (intrinsic)', 'E_c', 'E_v'}, "
location", "eastoutside");

```

Listing 3.5: Το αρχείο fermilevel.m



Εικόνα 3.15: Στάθμη Fermi υπό διάφορες συνθήκες.

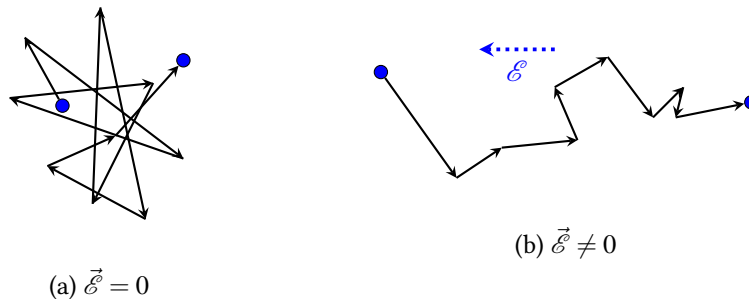
3.6 Ολίσθηση

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με τον τρόπο με τον οποίο οι φορείς (δηλαδή τα ηλεκτρόνια και οι οπές) κινούνται μέσα στον κρύσταλλο του ημιαγωγού. Υπάρχουν δύο βασικοί μηχανισμοί που αναγκάζουν τους φορείς να κινούνται: η *ολίσθηση* και η *διάχυση*. Η ολίσθηση οφείλεται στην επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}$. Όταν ένα ηλεκτρόνιο είναι στον ελεύθερο χώρο γνωρίζουμε ότι εξαιτίας του πεδίου του ασκείται μία δύναμη $\vec{F} = -q\vec{\mathcal{E}}$ όπου $-q$ είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου. Στην περίπτωση του κρυστάλλου το ηλεκτρόνιο κινείται ακόμα και απουσία ηλεκτρικού πεδίου επειδή έχει ήδη κάποια κινητική ενέργεια λόγω θερμότητας. Όπως δείχνει η εικόνα 3.16a, το ηλεκτρόνιο κάνει τυχαίες κινήσεις όταν $\vec{\mathcal{E}} = 0$ αλλάζοντας κατεύθυνση όταν συναντά διάφορες ατέλειες του κρυστάλλου. Όπως δείχνει η εικόνα 3.16a το ηλεκτρόνιο δεν δείχνει κάποια προτίμηση στην κατεύθυνση που θα πάει απλά κάνει συνεχώς ζιγκ-ζάγκ. Παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}} \neq 0$, η τυχαιότητα συνεχίζει να υφίσταται ωστόσο πλέον το ηλεκτρόνιο δείχνει μία τάση να κινείται αντίθετα προς την φορά του $\vec{\mathcal{E}}$, δεδομένου ότι το φορτίο του είναι και αρνητικό. Η μέση ταχύτητα v_n του ηλεκτρονίου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ανάλογη του \mathcal{E} , δηλαδή $v_n = -\mu_n \mathcal{E}$. Ο συντελεστής μ_n ονομάζεται κινητικότητα του ηλεκτρονίου και εξαρτάται από την θερμοκρασία και την συγκέντρωση των προσμίξεων N_a και N_d . Στην περίπτωση των οπών τα πράγματα είναι παρόμοια μόνο που οι οπές έχουν θετικό φορτίο οπότε η δύναμη που ασκείται είναι $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$ δηλαδή δεν υπάρχει το πρόσημο μείον. Η μέση ταχύτητα των οπών είναι $v_p = \mu_p \mathcal{E}$. Ο συντελεστής μ_p ονομάζεται κινητικότητα της οπής και επίσης εξαρτάται από την θερμοκρασία και τα N_a και N_d . Υπάρχουν διάφοροι εμπειρικοί τύποι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τις κινητικότητες, για παράδειγμα στην περίπτωση του πυριτίου αν υποθέσουμε ότι $T = 300^\circ\text{K}$, έχουμε:

$$\mu_n[\text{cm}^2/(\text{Vs})] \cong \frac{1318}{1 + [(N_a + N_d) \times 10^{-17}]^{0.85}} + 92 \quad (3.32)$$

$$\mu_p[\text{cm}^2/(\text{Vs})] \cong \frac{420}{1 + [(N_a + N_d) \times 0.625 \times 10^{-17}]^{0.7}} + 50 \quad (3.33)$$

όπου τα N_a και N_d μετρώνται σε cm^{-3} . Όπως είναι λογικό, η κίνηση των φορέων συνεπάγεται



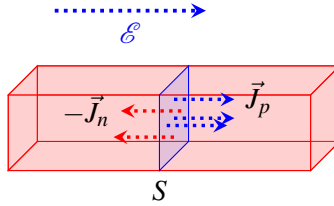
Εικόνα 3.16: Κίνηση του ηλεκτρονίου.

ηλεκτρικό ρεύμα. Ας φανταστούμε ένα ημιαγωγικό υλικό όπως δείχνει η εικόνα 3.17. Υπό την επίδραση του πεδίου $\vec{\mathcal{E}}$, από την διατομή S του υλικού περνάνε ηλεκτρόνια και οπές όπως δείχνει η εικόνα (χρησιμοποιούμε κόκκινο για τα ηλεκτρόνια που κινούνται αντίθετα στο $\vec{\mathcal{E}}$ και μπλε για τις οπές που κινούνται με την ίδια φορά με το $\vec{\mathcal{E}}$). Το ρεύμα I που περνάει από την διατομή είναι

εξ' ορισμού το συνολικό φορτίο δQ που περνάει από αυτήν προς το χρόνο δt που χρειάστηκε για να περάσει. Πόσες οπές περνάνε μέσα από την επιφάνεια μέσα σε ένα χρονικό διάστημα δt ; Φανταστείτε όλες τις οπές που βρίσκονται τουλάχιστον σε απόσταση δx αριστερά της S οι οποίες δίνονται από το γινόμενο $pS\delta x$ της μέσης συγκέντρωσης των οπών p επί τον όγκο $\delta V = S\delta x$, που ορίζεται από τα σημεία του υλικού που απέχουν δx από την S . Το φορτίο δQ_p που περιέχεται σε αυτόν τον όγκο και οφείλεται στις οπές είναι το πλήθος των οπών επί το φορτίο τους, $\delta Q_p = qpS\delta x$. Ο χρόνος που χρειάζεται για να περάσουν όλες οι οπές είναι $\delta t = \delta x/v_c$ όπου v_c είναι η μέση ταχύτητα των οπών εξαιτίας της ολίσθησης που εξετάσαμε προηγουμένως. Επομένως το ρεύμα I_p που οφείλεται στις οπές θα δίνεται από την σχέση,

$$I_p = \frac{\delta Q_p}{\delta t} = \frac{qpS\delta x}{\delta t} = qpSv_c \quad (3.34)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το ρεύμα που οφείλεται στα ηλεκτρόνια



Εικόνα 3.17: Ρεύματα σε ένα ημιαγωγικό υλικό.

λαμβάνοντας υπόψη ότι αυτά κινούνται αντίθετα από το \vec{E} πηγαίνοντας από δεξιά προς αριστερά και έχουν αρνητικό φορτίο. Αν θεωρήσουμε την συμβατική φορά για το ρεύμα που οφείλεται στα ηλεκτρόνια I_n (δηλαδή την φορά που θα είχε το θετικό φορτίο) αυτό θα έχει την ανάποδη φορά από την κίνηση των ηλεκτρονίων και επομένως θα πηγαίνει από αριστερά προς δεξιά όπως και το I_p . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε,

$$I_n = qnSv_c \quad (3.35)$$

Το συνολικό ρεύμα I είναι ίσο με,

$$I = I_n + I_p = qnSv_c + qpSv_p \quad (3.36)$$

Συνήθως όταν έχουμε να κάνουμε με υλικά μας ενδιαφέρει το ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας $J = I/S$ που ονομάζεται πυκνότητα ρεύματος και μετριέται σε A/m^2 . Η πυκνότητα ρεύματος J_p που οφείλεται στις οπές είναι,

$$J_p = \frac{I_p}{S} = qp v_p = qp \mu_p \mathcal{E} \quad (3.37)$$

ενώ η πυκνότητα ρεύματος J_n που οφείλεται στα ηλεκτρόνια είναι,

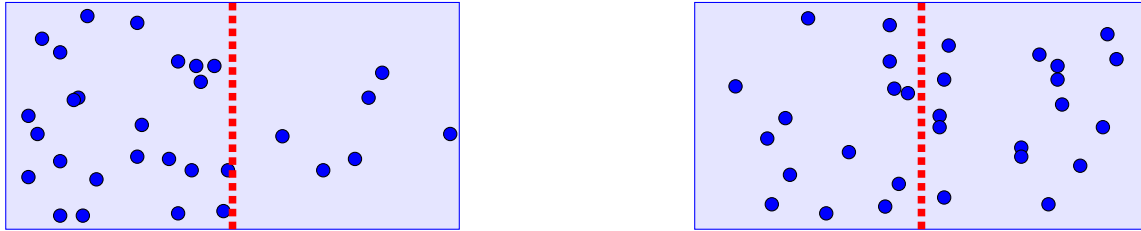
$$J_n = \frac{I_n}{S} = qn v_n = qn \mu_n \mathcal{E} \quad (3.38)$$

και η συνολική πυκνότητα ρεύματος δίνεται από την σχέση,

$$J = J_n + J_p = qn v_n + qp v_p = q(n \mu_n + p \mu_p) \mathcal{E} \quad (3.39)$$

3.7 Διάχυση

Η άλλη συνιστώσα που συνεισφέρει στο ρεύμα που υπάρχει στον ημιαγωγό είναι η διάχυση. Η διάχυση είναι το επακόλουθο του γεγονότος ότι η φύση απεχθάνεται τις ανομοιογένειες. Φανταστείτε ένα κομμάτι υλικού στη μέση του οποίου έχουμε ένα χωρίσμα όπως φαίνεται στην εικόνα 3.18. Την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε καταφέρει να απομονώσουμε αρκετούς φορείς στην



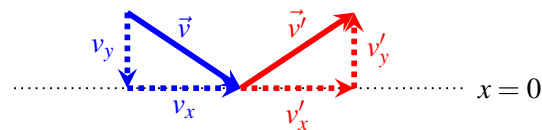
(a) κατανομή φορέων, $t = t_0$.

(b) κατανομή φορέων, $t = t_1$.

Εικόνα 3.18: Ο μηχανισμός της διάχυσης.

αριστερή πλευρά του υλικού, όπως δείχνει η εικόνα 3.18a. Στη συνέχεια αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί χωρίς κάποια παρέμβαση. Οι φορείς κινούνται τυχαία μέσα στο υλικό εξαιτίας της θερμότητας. Μετά από αρκετό χρονικό διάστημα την χρονική στιγμή $t = t_1$ το δείγμα θα παρουσιάζεται πολύ πιο ομογενοποιημένο με αποτέλεσμα περίπου ίσος αριθμός φορέων να βρίσκονται δεξιά και αριστερά του χωρίσματος όπως δείχνει η εικόνα 3.18b. Για να καταλάβουμε καλύτερα το φαινόμενο της διάχυσης χρησιμοποιούμε το OCTAVE για να προσομοιώσουμε την κίνηση των φορέων με το listing 3.6. Με το εν λόγω listing στην ουσία στήνουμε μία προσομοίωση στην οποία υλοποιούμε κάποιους βασικούς κανόνες κίνησης των φορέων, τους χωρίζουμε σε δύο μέρη μέσα στο υλικό όπως δείχνει και η εικόνα 3.18a. Στη συνέχεια κάνουμε πολλές επαναλήψεις όπου σε κάθε επανάληψη προχωράμε από λίγο τους φορείς προς τυχαίες διευθύνσεις μέσα στο υλικό. Συγκεκριμένα στις γραμμές 6-15 θέτουμε τις παραμέτρους της προσομοίωσης: N είναι ο συνολικός αριθμός των φορέων, L_x και L_y είναι οι διαστάσεις του υλικού μας κατά μήκος του άξονα των x και y αντίστοιχα, N_{dense} είναι ο αριθμός των φορέων στο αριστερό μέρος του υλικού $x \leq L_x/2$, N_{light} ο αριθμός τους στο δεξί μέρος του υλικού $x > L_x/2$, v_{mean} η μέση ταχύτητα των φορέων ανά επανάληψη, N_{steps} ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων και s είναι μία παράμετρος που έχει σχέση όπως θα δούμε και παρακάτω με την τυχαιότητα της ταχύτητας όταν ένας φορέας φτάνει στα άκρα του υλικού. Στις γραμμές 16-19 δημιουργούμε τις αρχικές θέσεις των φορέων τυχαία. Επιλέγουμε να γεννήσουμε τις θέσεις με την συνάρτηση `rand` η οποία γεννάει ομοιόμορφα δείγματα στο διάστημα $[0, 1]$. Με τον όρο ομοιόμορφα εννοούμε ότι τα δείγματα λαμβάνονται από μία ομοιομορφή κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_U(u) = 1$ όταν $u \in [0, 1]$ και $f_U(u) = 0$ όταν $u \notin [0, 1]$. Τα πρώτα N_{dense} δείγματα συντεταγμένων στον άξονα των x πολλαπλασιάζονται επί $L_x/2$ ώστε οι πρώτοι N_{dense} φορείς να έχουν συντεταγμένη $x \leq L_x/2$ δηλαδή να βρίσκονται στο αριστερό τμήμα. Οι υπόλοιπες N_{light} τιμές πολλαπλασιάζονται επί $L_x/2$ και σε αυτές προσθέτουμε $L_x/2$. Με τον τρόπο αυτό έχουν συντεταγμένη $x > L_x/2$ οπότε βρίσκονται σε δεξί μέρος. Οι συντεταγμένες y στην γραμμή 19 γεννιούνται τυχαία για όλους τους φορείς στο διάστημα $[0, L_y]$. Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία τις αρχικές ταχύτητες των φορέων. Η ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα $\vec{v} = (v_x, v_y)$ και επομένως θα έχει δύο συνιστώσες την v_x και την v_y που αποθηκεύονται στις μεταβλητές v_x και v_y αντίστοιχα. Στις γραμμές 22-25 χρησιμοποιούμε

αρχικά την `randn` αντί της `rand` η οποία παράγει δείγματα από μία Gaussian μεταβλητή και στη συνέχεια κανονικοποιούμε τα v_x και v_y έτσι ώστε το μέτρο της ταχύτητας $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ να είναι ίσο με `vmean`. Στις γραμμές 28-29 αρχικοποιούμε τις θέσεις $\vec{r} = (x, y)$ των φορέων και στην γραμμή 34 ξεκινάμε τις επαναλήψεις. Στις 37-38 προχωράμε κάθε φορά κατά v_x και v_y στον x και y άξονα αντίστοιχα. Υπό αυτή την έννοια, το `vecn` μετράει πόσο προχωράει κάθε φορέας στην διάρκεια μίας επανάληψης. Αν οι άξονες x και y μετριοούνται σε mm τότε οι ταχύτητα \vec{v} θα μετρίεται σε mm/επανάληψη. Στις γραμμές 41-46 ελέγχουμε αν ο φορέας έχει χτυπήσει σε κάποιο όριο του υλικού. Θεωρούμε ότι το υλικό οριοθετείται στο $x = 0$ (αριστερή πλευρά), $x = L_x$ (δεξιά πλευρά), $y = 0$ (κάτω πλευρά), $y = L_y$ (πάνω πλευρά). Επομένως για να φτάσει κάποιος φορέας την αριστερή ή την δεξιά πλευρά θα πρέπει $x < 0$ ή $x > L_x$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τις ταχύτητες που προκύπτουν από την ανάκλαση των φορέων στα όρια. Σ Στην



Εικόνα 3.19: Ταχύτητες που προκύπτουν από την ανάκλαση στο όριο $x = 0$.

εικόνα 3.19 βλέπουμε τις ταχύτητες των φορέων πριν και μετά την πρόσκρουση στο κάτω όριο του υλικού, $x = 0$. Αν η κρούση ήταν *ελαστική* (δηλαδή δεν χανόταν καθόλου ενέργεια) τότε σύμφωνα με την εικόνα η σχέση μεταξύ της ταχύτητας πριν την πρόσκρουση $\vec{v} = (v_x, v_y)$, και της ταχύτητας $\vec{v}' = (v'_x, v'_y)$ θα είναι,

$$v'_x = -v_x \text{ και } v'_y = v_y \quad (3.40)$$

Στο `listing` ορίζουμε την νέα ταχύτητα μετά την κρούση λαμβάνοντας υπόψη την (3.40) αλλά και έναν παράγοντα τυχαιότητας,

$$v'_x = -v_x(1 + su') \text{ και } v'_y = v_y \quad (3.41)$$

όπου το u' είναι μία Gaussian τυχαία μεταβλητή όπως αυτή που παράγεται από την `randn`. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι εισάγουμε το u' για να προσδώσουμε μία επιπλέον τυχαιότητα στον τρόπο που κινούνται οι φορείς. Ίσως η (3.41) να μην είναι η καλύτερη δυνατή φυσική περιγραφή για την πρόσκρουση των φορέων ωστόσο σε κάθε περίπτωση μπορούμε να αλλάξουμε τον τρόπο υπολογισμού των ταχυτήτων αν αυτό κρίνεται σκόπιμο. Ανάλογη στρατηγική ακολουθούμε και για τα υπόλοιπα τοιχώματα του υλικού. Στις γραμμές 49 και 52 μετρούμε τον αριθμό των φορέων αριστερά και δεξιά του διαχωριστικού, $x = L_x/2$. Οι υπόλοιπες γραμμές χρησιμοποιούνται για να κάνουμε την απεικόνιση της προσομοίωσης.

```

1 % simulation of diffusion process in 2D
2
3 close all
4 clc
5
6 N=300;           % number of carriers
7 Lx=6;           % box size along x
8 Ly=2;           % box size along y
9 Ndense=280;     % number of carriers on the left part of the box
10 Nlight=N-Ndense; % number of carriers on the right part of the box
11 vmean=0.1;     % mean carrier velocity
12 Nsteps=1000;   % number of simulation steps

```

```

13 s=0.1;           % randomness of the velocity vector
14
15 % initial positions of the carriers
16 xi=zeros(1,N);
17 xi(1:Ndense)=Lx/2*rand(1,Ndense);           % x-coordinates of carriers on the left
18 xi(Ndense+1:N)=Lx/2+Lx/2*rand(1,Nlight);    % x-coordinates of carriers on the right
19 yi=Ly*rand(1,N);                             % y-coordinates of carriers
20
21 % Assign random velocities
22 vx=randn(1,N);
23 vy=randn(1,N);
24 vx=vx./sqrt(vx.^2+vy.^2)*vmean;
25 vy=vy./sqrt(vx.^2+vy.^2)*vmean;
26
27 % position carriers at initial positions
28 x=xi;
29 y=yi;
30
31 figno=1;
32
33 % begin simulation loop
34 for m=1:Nsteps
35
36     % calculate new carrier positions
37     x=x+vx;
38     y=y+vy;
39
40     % check which carriers have hit the left or right wall
41     ix=find(x>Lx | x<0);
42     vx(ix)=-vx(ix).*(1+s*randn(1,length(ix)));
43
44     % check which carriers have hit the upper or lower wall
45     iy=find(y>Ly | y<0);
46     vy(iy)=-vy(iy).*(1+s*randn(1,length(iy)));
47
48     % find number of carriers on the left
49     cleft=length(find(x<=Lx/2));
50
51     % find number of carriers on the right
52     cright=length(find(x>Lx/2));
53
54     % visualize carriers
55     figure(figno);
56     plot(x,y,'o');
57     xlim([0 Lx]);
58     ylim([0 Ly]);
59     axis equal;
60     axis off;
61
62     % report carrier number on left and right
63     str=sprintf('left carriers: %d, right carriers: %d (step: %d)',cleft,cright,m);
64     h=title(str);
65     set(h,'FontName','Free Serif','FontSize',16);
66
67     % draw boundary
68     hold on
69     plot(Lx/2*ones(1,10),linspace(0,Ly,10),'--r','LineWidth',3);
70     hold off
71     pause(0.1);
72     drawnow;
73     if (m==1) || (m==100)
74         figno=figno+1;
75     end

```

76 end

Listing 3.6: Το αρχείο diffusion.m

. Στην εικόνα 3.20 δείχνουμε εξέλιξη της προσομοίωσης της διάχυσης. Στην εικόνα 3.20a

Εικόνα 3.20: Κατανομή των φορέων στην $m^{\text{οστή}}$ επανάληψη.

δείχνουμε την κατανομή στην πρώτη επανάληψη ενώ στην 3.20b δείχνουμε την εικόνα μετά από 100 επαναλήψεις, σαφώς πιο ομογενοποιημένη εξαιτίας της διάχυσης των φορέων. Η προσομοίωση μας βοηθάει να κατανοήσουμε τον μηχανισμό της διάχυσης. Είπαμε ότι ακόμα και απουσία του ηλεκτρικού πεδίου ($\vec{\mathcal{E}} = 0$), οι φορείς κινούνται προς τυχαίες διευθύνσεις όπως και στην περίπτωση της προσομοίωσης μας. Επομένως λόγω της τυχαίας κίνησης μετά από κάποιο χρονικό διάστημα η κατανομή των φορέων θα ομογενοποιηθεί. Μάλιστα περιμένουμε η διάχυση να δημιουργεί έντονο ρεύμα κοντά στην διαχωριστική γραμμή $x = L_x/2$ καθώς εκεί υπάρχουν πολλοί φορείς από την αριστερή πλευρά και λίγοι από την δεξιά και οι φορείς από αριστερά θα κινηθούν προς τα δεξιά εξαιτίας της θερμικής κίνησης. Μακριά από την διαχωριστική $x = L_x/2$ οι φορείς έχουν πάνω/κάτω ομοιογενή κατανομή (είτε πυκνή για $x < L_x/2$ είτε αραιοί για $x > L_x/2$) οπότε η συνισταμένη του ρεύματος που δημιουργείται θα είναι ίση με μηδέν. Επομένως όσο πιο απότομα μεταβάλλεται η κατανομή των φορέων, τόσο μεγαλύτερο ρεύμα θα δημιουργηθεί με στόχο να αναιρέσει αυτή την απότομη μεταβολή. Η παράγωγος των συγκεντρώσεων των φορέων $dn(x,t)/dx$ και $dp(x,t)/dx$ είναι το μέτρο των μεταβολών τους και επομένως δεν θα πρέπει να μας προξενεί εντύπωση ότι το ρεύμα που δημιουργείται εξαιτίας της διάχυσης είναι,

$$J_{pd} = -qD_p \frac{dp}{dx} \quad (3.42)$$

$$J_{nd} = qD_n \frac{dn}{dx} \quad (3.43)$$

Το πρόσημο των (3.42) και (3.43) εξηγείται αν λάβουμε υπόψη του ότι το ρεύμα εξαιτίας της διάχυσης πρέπει να έχει φορά τέτοια ώστε να ομογενοποιεί την συγκέντρωση των φορέων. Επομένως αν το $p(x)$ αυξάνει όσο αυξάνει το x , δηλαδή $dp/dx > 0$, η διάχυση θα πρέπει να αφαιρεί φορείς από τις μεγάλες τιμές του x και να τις μετακινεί προς τις μικρές τιμές του x , άρα το J_{pd} θα πρέπει να είναι αρνητικό. Για τα ηλεκτρόνια ισχύει το αντίθετο. Αν αυξάνει το $n(x)$ με το x , δηλαδή $dn/dx > 0$, τότε η διάχυση θα αφαιρεί φορείς από τις μεγάλες τιμές του x και θα τις μετακινεί προς τις μικρές τιμές του x αλλά τώρα τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητικό φορτίο οπότε εφόσον μετράμε το J_{nd} με την συμβατική φορά, αυτό σημαίνει ότι το J_{nd} θα πρέπει να είναι θετικό.

Οι σταθερές D_n και D_p εξαρτώνται από την θερμοκρασία και την κινητικότητα των φορέων,

$$D_p = \frac{\mu_p kT}{q} \quad (3.44)$$

$$D_n = \frac{\mu_n kT}{q} \quad (3.45)$$

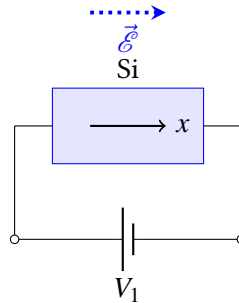
Οι σχέσεις (3.44) και (3.45) ονομάζονται και σχέσεις Einstein. Το συνολικό ρεύμα των οπών δίνεται από την σχέση,

$$J_p = q p \mu_p \mathcal{E} - q D_p \frac{dp}{dx} \quad (3.46)$$

$$J_n = q n \mu_n \mathcal{E} + q D_n \frac{dn}{dx} \quad (3.47)$$

3.8 Τι συμβαίνει όταν δεν έχουμε ισορροπία;

Πολλά από αυτά που είπαμε μέχρι τώρα βασίζονταν στην υπόθεση ότι το υλικό που εξετάζαμε βρισκόταν σε κατάσταση ισορροπίας. Τι συμβαίνει όταν δεν ισχύει αυτό; Στην εικόνα 3.21



Εικόνα 3.21: Ημιαγωγικό υλικό υπό τάση.

βλέπουμε ένα κομμάτι πυριτίου στο οποίο ασκούμε τάση V_1 . Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε θερμοδυναμική ισορροπία οπότε οι εξισώσεις που είδαμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να εφαρμοσθούν. Για παράδειγμα στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $np \neq n_i^2$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε τις ψευδό-στάθμες Fermi E_{Fn} και E_{Fp} έτσι ώστε αντί των (3.19) και (3.21) να χρησιμοποιούμε τις σχέσεις,

$$n = N_c e^{-(E_c - E_{Fn})/(kT)} \quad (3.48)$$

$$p = N_v e^{-(E_{Fp} - E_c)/(kT)} \quad (3.49)$$

Όταν έχουμε ισορροπία τότε θα πρέπει να ισχύει $np = n_i^2$ και $E_{Fn} = E_{Fp} = E_F$. Στην περίπτωση της εικόνας 3.21 μπορούμε να περιγράψουμε την επίδραση της τάσης $V(x)$ σε κάθε σημείο του

άξονα των x . Χρησιμοποιώντας την κβαντική θεωρία, μπορεί κανείς να δείξει ότι η ύπαρξη του δυναμικού $V(x)$ στην ουσία μεταβάλλει τις στάθμες E_c και E_v . Όσο μεγαλύτερο είναι το δυναμικό τόσο πιο χαμηλά βρίσκονται οι εν λόγω στάθμες και συγκεκριμένα ισχύει:

$$E_c(x) = E_c^{\text{ref}} - qV(x) \quad (3.50)$$

$$E_v(x) = E_v^{\text{ref}} - qV(x) \quad (3.51)$$

όπου οι τιμές E_c^{ref} και E_v^{ref} είναι οι τιμές των E_c και E_v απουσία δυναμικού ($V(x) = 0$). Επίσης το ηλεκτρικό πεδίο συνδέεται με το δυναμικό βάσει της σχέσης,

$$\mathcal{E} = -\frac{dV}{dx} \quad (3.52)$$

οπότε από τις (3.50) και (3.51) θα έχουμε,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \frac{dE_c}{dx} \quad (3.53)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \frac{dE_v}{dx} \quad (3.54)$$

```

1 % Calculate band diagrams across semiconductor section with voltage
2
3 close all
4 clc
5
6 Ev=0; % Top of valence band (can be assumed zero)
7 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
8 EceV=Ev+EgeV; % Bottom of conduction band (eV)
9 q=1.609e-19; % Electron charge (Cb)
10 L=1e-3; % Semiconductor sample length (m)
11 Nx=100; % Number of points in the x-axis
12 V=0.7; % Voltage difference between the two edges
13
14 % Unit conversion
15 Ec=q*EceV; % Bottom of conduction band (J)
16
17 % x-axis definition
18 x=linspace(0,L,Nx);
19
20 % Electric field distribution
21 E=V/L*ones(size(x));
22
23 % Calculate potential
24 Vx=cumtrapz(x,E);
25
26 % Calculate band edges
27 Ecx=Ec+q*cumtrapz(x,E);
28 Evx=Ev+q*cumtrapz(x,E);
29
30 % Plot results
31 figure(1);
32 plot(x/1e-3,Vx,'LineWidth',3);
33 set(gca,'FontName','Free Serif','FontSize',20);

```

```

34 ylabel('\itV\rm(\itx\rm) [V]');
35 xlabel('\itx \rm[\mum]');
36
37 figure(2);
38 plot(x/1e-3, Ecx/q, 'r', 'LineWidth', 3);
39 hold on;
40 plot(x/1e-3, Evx/q, 'b', 'LineWidth', 3);
41 hold off;
42 set(gca, 'FontName', 'Free Serif', 'FontSize', 20);
43 ylabel('\itE_c\rm(\itx\rm) or \itE_v\rm(\itx\rm) [eV]');
44 xlabel('\itx \rm[\mum]');
45 legend('E_c', 'E_v');

```

Listing 3.7: Το αρχείο bandsV.m

. Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα την επίδραση του δυναμικού στις ενεργειακές ζώνες του υλικού χρησιμοποιούμε το listing (3.7). Πρόκειται για μία απλή εφαρμογή των εξισώσεων (3.52), (3.53) και (3.54). Στις γραμμές 6-12 θεωρούμε τις παραμέτρους μας και τις σταθερές μας. Δείτε την σχετική περιγραφή του listing 3.4 για περισσότερες λεπτομέρειες. Σε σχέση με το 3.4, χρησιμοποιούμε τρεις νέες παραμέτρους. Η πρώτη το L είναι το μήκος του στρώματος του υλικού L . Η δεύτερη μεταβλητή, το N_x είναι ο αριθμός N_x στον οποίο διαιρούμε τον άξονα των x που διατρέχει το υλικό κατά μήκος του, όπως δείχνει το 3.21. Τέλος το V είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του υλικού V . Στην γραμμή 18 φτιάχνουμε τον άξονα των x και υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E} στην γραμμή 21 κατά μήκος του υλικού θεωρώντας ότι αυτό είναι σταθερό (θα δούμε αργότερα έναν πιο ακριβή τρόπο να υπολογίζουμε το \mathcal{E} σε άλλο κεφάλαιο). Από την εικόνα 3.21, βλέπουμε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ $x = L$ είναι $x = 0$ είναι ίση με V , οπότε $V(L) - V(0) = V$. Από την άλλη θεωρώντας ότι το \mathcal{E} και ολοκληρώνοντας την (3.52) ως προς x στο διάστημα $[0, L]$ θα έχουμε,

$$V(L) - V(0) = \mathcal{E}L \quad (3.55)$$

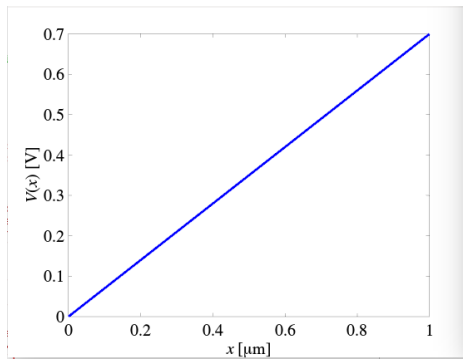
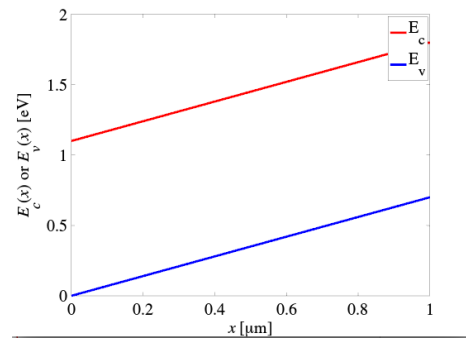
οπότε προκύπτει ότι $\mathcal{E} = V/L$. Σε κάθε σημείο επομένως του άξονα x το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι ίσο με V/L όπως υποθέτουμε και στην γραμμή 21. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την `cumtrapz` για να υπολογίσουμε το δυναμικό $V(x)$ σε κάθε σημείο του άξονα,

$$V(x) - V(0) = \int_0^x \mathcal{E}(x') dx' \quad (3.56)$$

θεωρώντας επίσης ότι $V(0) = 0$ δηλαδή ότι το σημείο $x = 0$ είναι στη γη. Δεδομένου ότι το \mathcal{E} είναι σταθερό θα μπορούσαμε απλά να υπολογίσουμε και το $V(x) = \mathcal{E}x$. Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο για τις ενεργειακές στάθμες E_c και E_v χρησιμοποιώντας την `cumtrapz` και τις (3.53) και (3.54). Μία άλλη διαδικασία που λαμβάνει χώρα στους ημιαγωγούς και σχετίζεται με την κατάσταση ισορροπίας είναι η *επανασύνδεση* των φορέων. Οι εξισώσεις (3.27) και (3.28) προσδιορίζουν τις συγκεντρώσεις των φορέων σε κατάσταση ισορροπίας όταν έχουμε προσμίξεις στο υλικό μας. Στην περίπτωση που έχουμε ανόθευτο υλικό, ξέρουμε ότι $N_a = N_d = 0$ και σε κατάσταση ισορροπίας, $n = p = n_i$. Ας συμβολίσουμε με n_0 και p_0 τον αριθμό των οπών και των ηλεκτρονίων αντίστοιχα στην κατάσταση ισορροπίας. Τότε θα έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = n_i \\ p_0 = n_i \end{array} \right\}, \text{ ανόθευτος ημιαγωγός} \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = N_d \\ p_0 = n_i^2 / N_d \end{array} \right\}, \text{ ημιαγωγός τύπου N} \quad (3.58)$$

(a) $V(x)$.(b) $E_c(x)$ και $E_v(x)$.

Εικόνα 3.22: Επίδραση της διαφοράς δυναμικού στις άκρες των ζωνών σθένους και αγωγιμότητας.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = N_a \\ n_0 = n_i^2 / N_a \end{array} \right\}, \text{ ημιαγωγός τύπου P} \quad (3.59)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δημιουργούνται από κάποια εξωτερική τάση περίσσεια φορέων δηλαδή οπών και ηλεκτρονίων. Τότε η πυκνότητες φορέων μπορούν να γραφτούν,

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n' \\ p &= p_0 + p' \end{aligned} \quad (3.60)$$

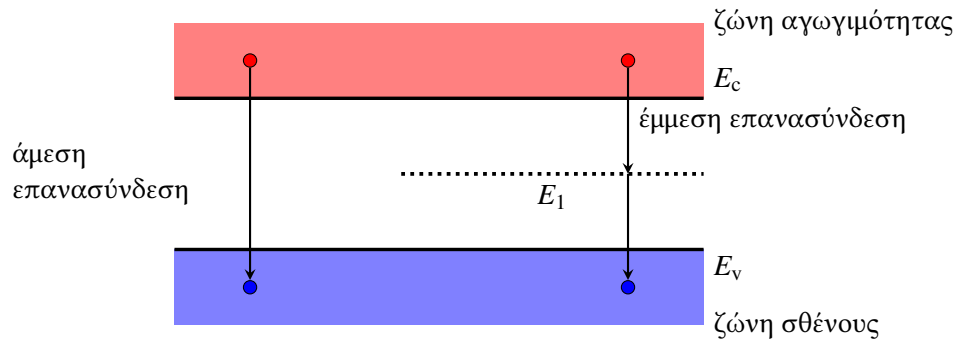
Το υλικό θα πρέπει να παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερο, επομένως

$$n' = p' \quad (3.61)$$

Όταν το εξωτερικό αίτιο που δημιουργεί τους επιπλέον φορείς πάψει να υπάρχει, οι πλεονάζουσες συγκεντρώσεις φορέων n' και p' θα πρέπει σταδιακά να μηδενιστούν και το σύστημα να καταλήξει σε κατάσταση ισορροπίας. Ο μηχανισμός με τον οποίο γίνεται αυτό ονομάζεται *επανασύνδεση*. Στην ουσία ένα ηλεκτρόνιο στην ζώνη αγωγιμότητας επανασυνδέεται με μία οπή στην ζώνη σθένους και παύουν να υπάρχουν. Στην εικόνα 3.23 δείχνουμε τα δύο είδη επανασύνδεσης, την άμεση και την έμμεση. Στην *άμεση επανασύνδεση*, η μετάβαση γίνεται απευθείας ενώ στην έμμεση επανασύνδεση η μετάβαση γίνεται μέσω κάποιων σταθμών βαθιά μέσα στο ενεργειακό χάσμα που έχουν εμφανισθεί εξαιτίας ατελειών και μη ηθελημένων προσμίξεων του κρυστάλλου. Στο πυρίτιο έχουμε κυρίως την δεύτερη κατηγορία μεταβάσεων ενώ σε άλλα υλικά συμβαίνει κυρίως η πρώτη. Το πόσο γρήγορα θα γίνει αυτό περιγράφεται τις εξισώσεις,

$$\frac{dn'}{dt} = -R_n \quad (3.62)$$

$$\frac{dp'}{dt} = -R_n = -\frac{p'}{\tau_R} \quad (3.63)$$



Εικόνα 3.23: Άμεση και έμμεση επανασύνδεση.

Στις παραπάνω σχέσεις με R_n και R_p συμβολίζουμε τον ρυθμό επανασύνδεσης των ηλεκτρονίων και των οπών αντίστοιχα. Μία απλή υπόθεση που γίνεται συχνά είναι ότι ο ρυθμός επανασύνδεσης των ηλεκτρονίων και των οπών είναι ανάλογος των πλεονάζοντων ηλεκτρονίων και οπών αντίστοιχα, δηλαδή:

$$R_n = \frac{n'}{\tau_R} \quad (3.64)$$

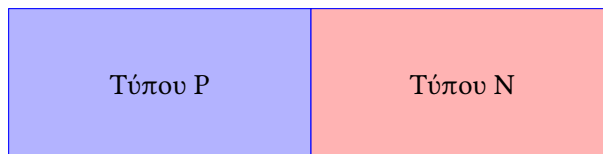
$$R_p = \frac{p'}{\tau_R} \quad (3.65)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις με τ_R συμβολίζουμε τον χρόνο επανασύνδεσης των φορέων. Ανάλογα με το υλικό, ο χρόνος επανασύνδεσης τ_R μπορεί να διαφέρει. Στην περίπτωση του πυριτίου, ο χρόνος επανασύνδεσης είναι της τάξης του $1\mu s$ αλλά μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με τις συνθήκες.

4. Η ημιαγωγική δίοδος

4.1 Εισαγωγή

Ενδιαφέροντα πράγματα συμβαίνουν όταν φέρνουμε σε επαφή δύο ή περισσότερα στρώματα ημιαγωγού με διαφορετικό είδος προσμίξεων. Στην εικόνα 4.1 βλέπουμε ένα τέτοιο παράδειγμα όπου ένα υλικό τύπου P και ένα υλικό τύπου N έχουν έρθει σε επαφή. Θα δούμε ότι η



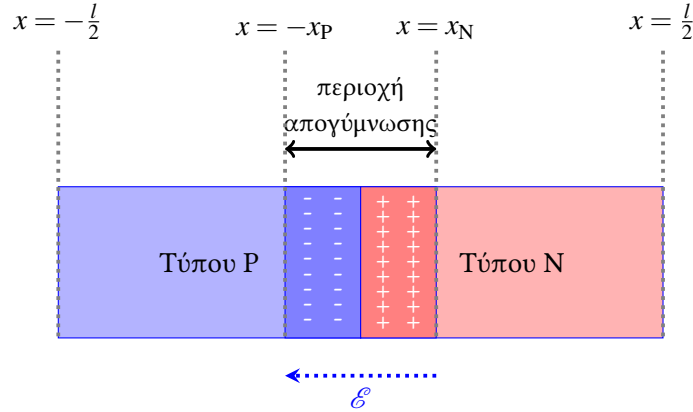
Εικόνα 4.1: Επαφή PN.

διάταξη της εικόνας 4.1 λειτουργεί ως δίοδος, δηλαδή επιτρέπει την ροή ρεύματος προς μία διεύθυνση (από το p προς το n) και δεν την επιτρέπει από την ανάποδη (από το n στο p). Είναι ένα παράδειγμα εφαρμογής των ημιαγωγικών υλικών και παρακάτω θα εξετάσουμε και άλλα παραδείγματα συμπεριλαμβανομένου και του τρανζίστορ. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τι προβλέπει η θεωρία του κεφαλαίου 3 για την λειτουργία της διόδου. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά βασικά κυκλώματα των διόδων.

4.2 Η επαφή pn σε ισορροπία

Τι συμβαίνει όταν δύο υλικά με διαφορετικές προσμίξεις έρχονται σε επαφή; Στην περίπτωση της εικόνας 4.1 αρχικά έχουμε μία μεγάλη συγκέντρωση οπών στην P-πλευρά, $p_p = N_a$ με πολύ λίγα ηλεκτρόνια $n_p = n_i^2/N_a$. Στην N-πλευρά έχουμε πολλά ηλεκτρόνια, $n_N = N_d$ και λίγες οπές $p_N = n_i^2/N_d$. Σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε από την ενότητα 3.7 η διάχυση των φορέων θα προσπαθήσει να ομογενοποιήσει την συγκέντρωση των φορέων n και p κατά μήκος της διάταξης. Το ρεύμα διάχυσης είναι έντονο εκεί που υπάρχει απότομη μεταβολή της συγκέντρωσης όπως

είδαμε από τις εξισώσεις (3.43) και (3.42). Αυτό συμβαίνει στην επαφή των δύο υλικών, οπότε εκεί θα δημιουργηθεί ένα ρεύμα διάχυσης ηλεκτρονίων που θα μεταφέρει ηλεκτρόνια από την N-πλευρά στην P-πλευρά και ένα ρεύμα διάχυσης οπών που θα μεταφέρει οπές από την P-πλευρά στην N-πλευρά. Ωστόσο πρέπει να θυμόμαστε ότι τα υλικά ήταν αρχικά ηλεκτρικά ουδέτερα οπότε κάθε φορέας που φεύγει αφήνει πίσω του ένα έλλειμμα φορτίου. Έτσι ένα ηλεκτρόνιο που μετακινείται προς την P-πλευρά αφήνει πίσω του ένα θετικό φορτίο ενώ μία οπή που μετακινείται στην N-πλευρά αφήνει πίσω της ένα αρνητικό φορτίο. Η εικόνα 4.2 δείχνει την κατάσταση όπως διαμορφώνεται από την διάχυση. Παρατηρήστε στην εικόνα 4.2 ότι η



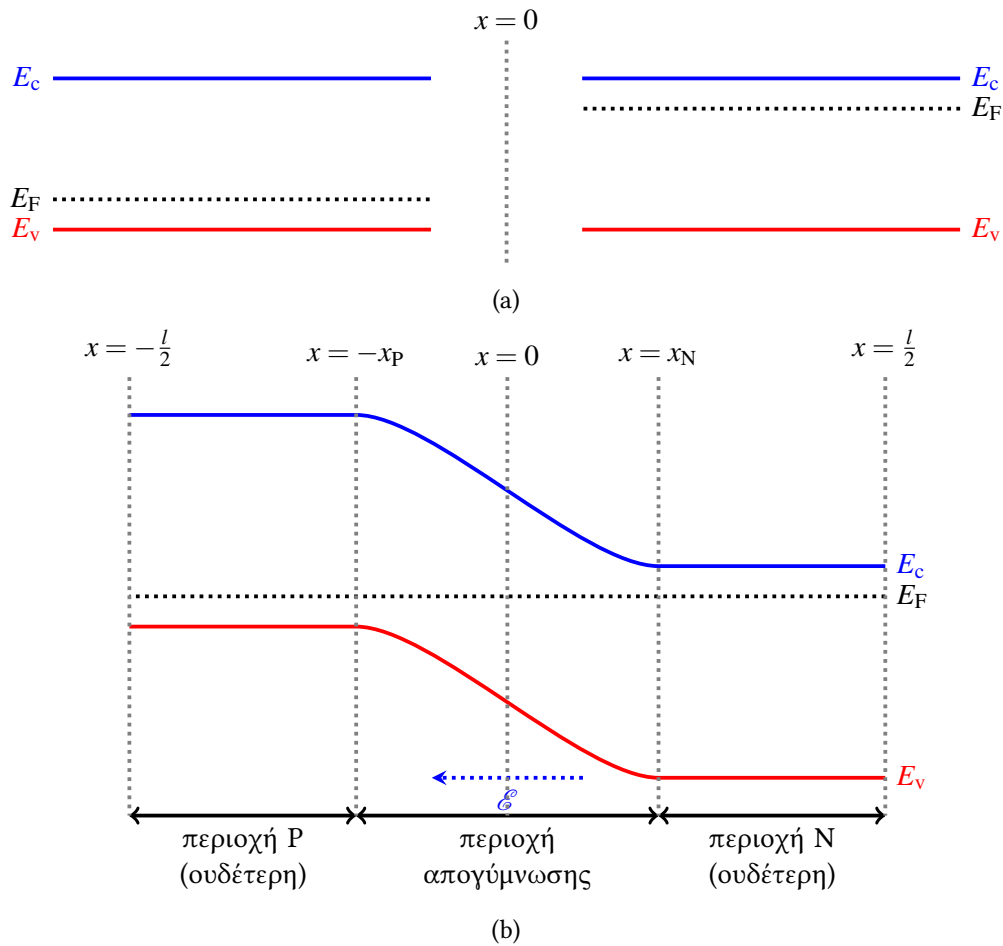
Εικόνα 4.2: Περιοχή απογύμνωσης.

δημιουργία θετικού φορτίου από την πλευρά-N και αρνητικού φορτίου στην πλευρά-P δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E} του οποίου η φορά είναι από αριστερά προς δεξιά (εφόσον το θετικό φορτίο απωθεί θετικά φορτία προς την περιοχή N). Το πεδίο μέσω της ολίσθησης των φορέων αντιτίθεται στην κίνηση οπών ηλεκτρονίων από την πλευρά P στην πλευρά N και ηλεκτρονίων από την πλευρά N στην πλευρά P. Τελικά θα επέλθει επομένως μία ισορροπία όπου το ρεύμα ολίσθησης θα εξισορροπεί πλήρως το ρεύμα διάχυσης με αποτέλεσμα το συνολικό ρεύμα να είναι μηδέν. Το ενεργειακό διάγραμμα καταστάσεων φανερώνει επιπλέον χρήσιμη πληροφορία για την λειτουργία της διόδου. Στην εικόνα 4.3 δείχνουμε τι συμβαίνει όταν φέρνουμε σε επαφή δύο υλικά με διαφορετικό είδος προσμίξεων (P και N). Αρχικά, όταν τα υλικά δεν βρίσκονται σε επαφή, η κατάσταση περιγράφεται από την εικόνα 4.3a όπου έχουμε διαφορετική στάθμη Fermi στο υλικό P και στο υλικό N σύμφωνα με αυτά που είδαμε στην ενότητα 3.15. Συγκεκριμένα στο P υλικό η στάθμη Fermi E_F είναι κοντά στο E_v ενώ στο υλικό N είναι κοντά στο E_c . Στη συνέχεια τα δύο υλικά έρχονται σε επαφή δημιουργώντας ένα ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E} κοντά στην περιοχή απογύμνωσης όπως δείχνει το 4.3b το οποίο σύμφωνα με τα όσα είδαμε στις εξισώσεις (3.53) και (3.54) θα πρέπει να μειώνει τις στάθμες E_v και E_c . Στην εικόνα 4.3b πρέπει να παρατηρήσουμε μία ενδιαφέρουσα λεπτομέρεια: η στάθμη Fermi είναι σταθερή κατά μήκος της διάταξης. Γιατί ισχύει αυτό; Ας ξεκινήσουμε με την (3.19),

$$n = N_c e^{-(E_c - E_F)/kT} \quad (4.1)$$

Αν υπολογίσουμε την παράγωγο ως προς x θα έχουμε,

$$\frac{dn}{dx} = N_c e^{-(E_c - E_F)/kT} \frac{1}{kT} \left(\frac{dE_F}{dx} - \frac{dE_c}{dx} \right) = \frac{n}{kT} \left(\frac{dE_F}{dx} - \frac{dE_c}{dx} \right) \quad (4.2)$$



Εικόνα 4.3: Διάγραμμα ενεργειακών καταστάσεων σε μία επαφή PN

Θυμηθείτε ωστόσο ότι το άκρο της ζώνης αγωγιμότητας σχετίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E} = -dV/dx$ μέσω της (3.53) και επομένως,

$$\frac{dn}{dx} = \frac{n}{kT} \left(\frac{dE_F}{dx} - q\mathcal{E} \right) \quad (4.3)$$

Παίζοντας λίγο με την (4.3) βρίσκουμε,

$$\mu_n kT \frac{dn}{dx} = \mu_n n \frac{dE_F}{dx} - q\mu_n n \mathcal{E} \quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας την (3.45) βρίσκουμε,

$$qD_n \frac{dn}{dx} + q\mu_n n \mathcal{E} = \mu_n n \frac{dE_F}{dx} \quad (4.5)$$

Ίσως αναγνωρίζετε ήδη τις δύο συνιστώσες στο πρώτο μέρος την (4.3). Η πρώτη είναι το ρεύμα διάχυσης J_{nd} σύμφωνα και με την (3.43) ενώ το δεύτερο είναι το ρεύμα ολίσθησης σύμφωνα με

την (3.38). Το άθροισμα τους είναι το συνολικό ρεύμα που οφείλεται στα ηλεκτρόνια J_n . Οπότε μπορούμε να γράψουμε,

$$\mu_n n \frac{dE_F}{dx} = J_n \quad (4.6)$$

Σύμφωνα με την (4.6) η μεταβολή της στάθμης Fermi ($dE_F/dx \neq 0$), συνεπάγεται και ένα ρεύμα ηλεκτρονίων $J_n \neq 0$. Ωστόσο σε κατάσταση ισορροπίας δεν πρέπει να έχουμε καθόλου μετακίνηση φορέων οπότε $J_n = 0$ και επομένως $dE_F/dx = 0$. Δηλαδή σε κατάσταση ισορροπίας η στάθμη Fermi E_F δεν μεταβάλλεται κατά μήκος της διάταξης.

Πόσο είναι το δυναμικό V_{bi} που αναπτύσσεται στην περιοχή απογύμνωσης; Μπορούμε να κάνουμε έναν υπολογισμό σε κατάσταση ισορροπίας. Το κλειδί είναι πάλι στη σχέση (3.19) και στο γεγονός ότι το E_c εξαρτάται από το δυναμικό σύμφωνα με την (3.50). Στην πλευρά N γνωρίζουμε ότι $n \cong N_d$ όπου N_d ενώ στην πλευρά P θα πρέπει $n \cong n_i^2/N_a$. Επομένως από την (3.19) θα έχουμε,

$$\begin{aligned} N_c e^{-(E_{cN}-E_F)/kT} &= N_d \\ N_c e^{-(E_{cP}-E_F)/kT} &= \frac{n_i^2}{N_a} \end{aligned} \quad (4.7)$$

όπου E_{cP} και E_{cN} είναι οι στάθμες της ζώνης αγωγιμότητας E_c στο αριστερότερο άκρο της περιοχής N και στο δεξιότερο άκρο της περιοχής P αντίστοιχα. Αν πάρουμε το λογάριθμο και αφαιρέσουμε την πρώτη από τη δεύτερη σχέση θα έχουμε,

$$\frac{E_{cP}-E_{cN}}{kT} = -\ln\left(\frac{N_d}{N_c}\right) + \ln\left(\frac{n_i^2}{N_a N_d}\right) = -\ln\left(\frac{N_a N_d}{n_i^2}\right) \quad (4.8)$$

Σύμφωνα με την (3.50) η διαφορά $E_{cP}-E_{cN}$ θα πρέπει να ισούται με $-qV_{bi}$. Επομένως θα έχουμε,

$$V_{bi} = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_a N_d}{n_i^2}\right) \quad (4.9)$$

```

1 % Calculation of built-in potential for a PN junction
2
3 close all;
4 clear all;
5 clc
6
7 % Constants
8 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
9 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
10 mp=0.38*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
11 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
12 T=300; % temperature (Kelvin)
13 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
14 Ev=0; % Top of valence band (can be assumed zero)
15 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
16 EceV=Ev+EgeV; % Bottom of conduction band (eV)
17 Na_cm3=1e15:2e15:1e17; % Acceptor concentration values (cm^-3)
18 Nd_cm3=1e15:2e15:1e17; % Donor concentration values (cm^-3)
19 q=1.609e-19; % Electron charge
20
21 % Unit conversion
22 Ec=EceV*q; % Bottom of conduction band (J)

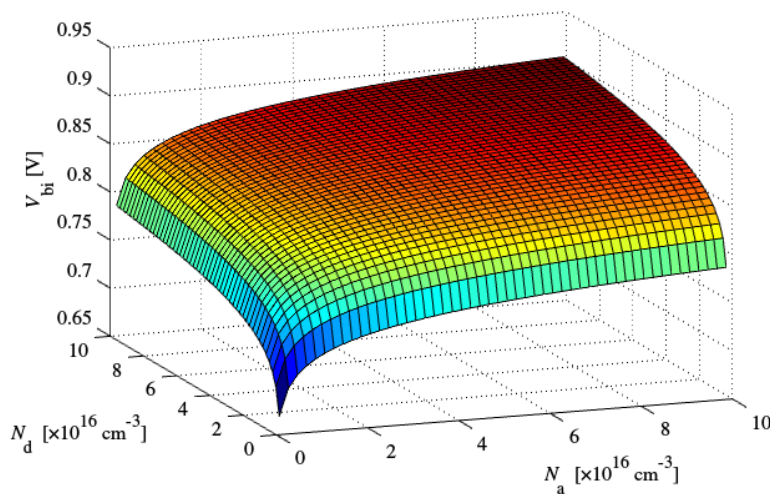
```

```

23 Eg=EgeV*q;           % bandgap (J)
24 Na=Na_cm3*1e6;      % Convert to m^(-3)
25 Nd=Nd_cm3*1e6;
26
27 % Estimate effective density of states
28 Nc=2*(2*pi*mn*k*T/h^2)^(3/2);
29 Nv=2*(2*pi*mp*k*T/h^2)^(3/2);
30
31 % Calculate intrinsic carrier level
32 ni=sqrt(Nc*Nv)*exp(-Eg/(2*k*T));
33
34 % Calculate built-in potential for all Na and Nd values
35 VbiV=zeros(length(Na),length(Nd));
36
37 for ma=1:length(Na)
38     for md=1:length(Nd)
39         VbiV(ma,md)=k*T/q*log(Na(ma)*Nd(md)/ni^2);
40     end
41 end
42
43 % plot results
44 figure(1);
45 h=surf(Na_cm3/1e16,Nd_cm3/1e16,VbiV);
46 set(gca,'FontName','Free Serif','FontSize',16);
47 xlabel('\itN\rm_a [\times 10^{16} cm^{-3}]');
48 ylabel('\itN\rm_d [\times 10^{16} cm^{-3}]');
49 zlabel('\itV\rm_{bi} [V]');
50 view(-20,20);

```

Listing 4.1: Το αρχείο Vbi.m



Εικόνα 4.4: Ενδογενής τάση μίας επαφής PN

Η σχέση (4.9) δίνει την ενδογενή τάση της επαφής PN. Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την (4.9) χρησιμοποιώντας το OCTAVE. Στο listing 4.1 δείχνουμε το σχετικό κώδικα όπου χρησιμοποιούμε την εντολή surf για να κάνουμε μία τρισδιάστατη απεικόνιση. Στην εικόνα 4.4 δείχνουμε το αποτέλεσμα των υπολογισμών. Παρατηρούμε ότι για συγκεντρώσεις προσμίξεων $N_a = N_d = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ η ενδογενής τάση της επαφής είναι $V_{bi} \cong 0.9 \text{ V}$.

4.3 Η περιοχή απογύμνωσης

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε λίγο καλύτερα τι συμβαίνει στην περιοχή απογύμνωσης της επαφής PN. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει καταρχήν να γνωρίσουμε έναν βασικό νόμο του ηλεκτρομαγνητισμού που είναι η εξίσωση Poisson. Η εξίσωση Poisson συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ με την συγκέντρωση του ηλεκτρικού φορτίου στο χώρο. Στην περίπτωση μας, το φορτίο που έχουμε δημιουργείται από τους φορείς (δηλαδή τα ηλεκτρόνια και τις οπές) αλλά και από τις προσμίξεις. Θυμηθείτε για ένα απομονωμένο υλικό τύπου N ότι όπως είδαμε στην εικόνα 3.14, στην πράξη η πιθανότητα να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο στην στάθμη E_d είναι πολύ μικρή και επομένως τα περισσότερα ηλεκτρόνια έχουν μεταναστεύσει στην ζώνη αγωγιμότητας, δηλαδή $n \cong N_d$. Με τον ίδιο τρόπο είχαμε δει ότι για ένα απομονωμένο υλικό τύπου P, θα έχουμε $n \cong N_a$. Ωστόσο τώρα που έχουμε υλικά σε επαφή όπως δείχνει η εικόνα 4.2 θα έχουμε μία διαφορετική κατάσταση εφόσον η διάχυση έχει απομακρύνει φορείς από την περιοχή απογύμνωσης, έχουμε την εμφάνιση του φορτίου. Αν θεωρήσουμε ότι στην περιοχή απογύμνωσης έχουν απομακρυνθεί όλοι οι φορείς τότε στην περιοχή απογύμνωσης από την πλευρά του P θα έχει μείνει πυκνότητα φορτίου $\rho \cong -qN_a$, αφού όλες οι οπές έχουν φύγει αφήνοντας πίσω τους το αντίστοιχο αρνητικό φορτίο, ενώ στην μεριά της περιοχής N η πυκνότητα φορτίου θα είναι $\rho \cong qN_d$. Δηλαδή η πυκνότητα φορτίου μέσα στην περιοχή απογύμνωσης, $-x_p \geq x \geq x_N$, περιγράφεται από την σχέση,

$$\rho(x) = \begin{cases} -qN_a, & \text{όταν } -x_p \leq x < 0 \\ +qN_d, & \text{όταν } x_N \geq x \geq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

όπου $x = -x_p$ και $x = x_N$ είναι το αριστερό και το δεξί άκρο της περιοχής απογύμνωσης σύμφωνα και με το 4.2. Η εξίσωση Poisson γράφεται ως εξής:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_s} \quad (4.11)$$

όπου ϵ_s είναι η διηλεκτρική σταθερά του υλικού που μετρείται σε F/m. Συνήθως η παράμετρος αυτή γράφεται και ως συνάρτηση της διηλεκτρικής σταθεράς του κενού ϵ_0 ως:

$$\epsilon_s = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (4.12)$$

όπου $\epsilon_0 \cong 8.85 \times 10^{-12}$ F/m και η ϵ_r είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού που στην περίπτωση του πυριτίου είναι $\epsilon_r \cong 12$. Η (4.11) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E} κατά μήκος της περιοχής απογύμνωσης. Στην πλευρά P, $-x_p \leq x < 0$ θα έχουμε σύμφωνα με την (4.10), $d\mathcal{E}/dx = -qN_a$ οπότε ολοκληρώνοντας θα έχουμε $\mathcal{E} = -qN_a x / \epsilon_s + c_a$ όπου η σταθερά ολοκλήρωσης c_a θα πρέπει να προσδιοριστεί από το πρόβλημα. Είναι φανερό ότι έξω από την περιοχή απογύμνωσης θα πρέπει να έχουμε $\mathcal{E} = 0$ οπότε $\mathcal{E}(-x_p) = 0$, $c_a = qN_a x_p$ και επομένως $\mathcal{E} = -qN_a(x + x_p) / \epsilon_s$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι στην N πλευρά, για $x_N \geq x \geq 0$ έχουμε $\mathcal{E} = qN_d(x - x_N) / \epsilon_s$. Επομένως το πεδίο περιγράφεται από την σχέση,

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \frac{-qN_a}{\epsilon_s}(x + x_p), & \text{όταν } -x_p \leq x < 0 \\ \frac{qN_d}{\epsilon_s}(x - x_N), & \text{όταν } x_N \geq x \geq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Υπάρχει η απαίτηση το πεδίο να είναι συνεχές στο όριο των δύο περιοχών ($x = 0$). Αντικαθιστώντας στην (4.13) θα έχουμε

$$N_a x_p = N_d x_N \quad (4.14)$$

Από την σχέση $\mathcal{E} = -dV/dx$ μπορούμε να υπολογίσουμε και το δυναμικό V κατά μήκος της περιοχής απογύμνωσης. Ολοκληρώνοντας και πάλι θα έχουμε για $-x_p \leq x < 0$ θα έχουμε $V(x) = qN_a x^2/2/\epsilon_s + qN_a x_p x/\epsilon_s + c'_a$. Αν θεωρήσουμε ότι το άκρο της περιοχής P είναι γειωμένο (θυμηθείτε ότι μπορούμε να βάλουμε μία γη σε οποιοδήποτε σημείο το κυκλώματος και να θεωρούμε ότι το σημείο αναφοράς μέτρησης των δυναμικών είναι εκεί) τότε $V(-x_p) = 0$ οπότε $c'_a = -qN_a x_p^2/2/\epsilon_s + qN_a x_p^2/\epsilon_s = qN_a x_p^2/2/\epsilon_s$. Τελικά δηλαδή, για $-x_p \leq x < 0$ θα έχουμε:

$$V(x) = \frac{qN_a x^2}{2\epsilon_s} + \frac{qN_a x_p x}{\epsilon_s} + \frac{qN_a x_p^2}{2\epsilon_s} = \frac{qN_a (x + x_p)^2}{2\epsilon_s} \quad (4.15)$$

Στην περιοχή N, θα έχουμε $V(x) = -qN_d x^2/2/\epsilon_s + qN_d x_N x/\epsilon_s + c'_d$ και ξέρουμε ότι το δυναμικό στο άκρο $x = x_N$ είναι $V(x_N) = V_{bi}$, οπότε θα πρέπει $c'_d = V_{bi} + qN_d x_N^2/2/\epsilon_s - qN_d x_N x^2/\epsilon_s = V_{bi} - qN_d x_N^2/2/\epsilon_s$. Επομένως,

$$V(x) = V_{bi} - \frac{qN_d (x - x_N)^2}{2\epsilon_s} \quad (4.16)$$

όταν $x_N \geq x \geq 0$. Συνδυάζοντας τις δύο εκφράσεις για το $V(x)$ θα πάρουμε,

$$V(x) = \begin{cases} \frac{qN_a (x + x_p)^2}{2\epsilon_s}, & \text{όταν } -x_p \leq x < 0 \\ V_{bi} - \frac{qN_d (x - x_N)^2}{2\epsilon_s}, & \text{όταν } x_N \geq x \geq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Θα πρέπει το δυναμικό να είναι συνεχές στο $x = 0$ οπότε θα έχουμε,

$$\frac{qN_a x_p^2}{2\epsilon_s} = V_{bi} - \frac{qN_d x_N^2}{2\epsilon_s} \quad (4.18)$$

Από την (4.18) μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της περιοχής απογύμνωσης $w = x_N + x_p$. Η (4.14) υποδεικνύει ότι $x_N = w \frac{N_a}{N_d + N_a}$ και $x_p = w \frac{N_d}{N_d + N_a}$. Οπότε χρησιμοποιώντας την (4.18) θα έχουμε,

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon_s V_{bi}}{q} \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right)} \quad (4.19)$$

Η (4.19) μας δίνει το μήκος της περιοχής απογύμνωσης σε μία επαφή PN.

```

1 % Calculation of depletion region characteristics at equilibrium
2
3 close all;
4 clear all;
5 clc
6
7 % Constants
8 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
9 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
10 mp=0.38*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
11 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
12 T=300; % temperature (Kelvin)
13 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
14 EgeV=1.1; % bandgap energy (eV)
15 Na_cm3=0.5e17; % Acceptor concentration values (cm^-3)
16 Nd_cm3=1e17; % Donor concentration values (cm^-3)
17 q=1.609e-19; % Electron charge
18 l=1e-6; % pn device length along x

```

```

19 er=12; % relative dielectric constant of silicon
20 e0=8.85e-12; % vacuum dielectric constant F/m
21 es=er*e0; % silicon permittivity F/m
22 Nx=1000; % number of points in the x-axis
23
24 % Unit conversion
25 Eg=EgeV*q; % bandgap (J)
26 Na=Na_cm3*1e6; % Convert to m^(-3)
27 Nd=Nd_cm3*1e6;
28 Ec=Eg;
29
30 % carrier mobilities
31 mu_n_cm2=1318/ (1 +((Na_cm3+Nd_cm3)*1e-17)^0.85) + 92;
32 mu_p_cm2=420 / (1 +((Na_cm3+Nd_cm3)*0.625*1e-17)^0.7) + 50;
33 mu_n=mu_n_cm2*1e-4;
34 mu_p=mu_p_cm2*1e-4;
35
36 % Diffusion coefficients
37 Dn=mu_n*k*T/q;
38 Dp=mu_p*k*T/q;
39
40 % Estimate effective density of states
41 Nc=2*(2*pi*mn*k*T/h^2)^(3/2);
42 Nv=2*(2*pi*mp*k*T/h^2)^(3/2);
43
44 % Calculate intrinsic carrier level
45 ni=sqrt(Nc*Nv)*exp(-Eg/(2*k*T));
46
47 % Calculate builtin voltage
48 VbiV=k*T/q*log(Na*Nd/ni^2);
49
50 % Calculate depletion layer width
51 w=sqrt(2*er*e0*VbiV / q * (1/Na+1/Nd));
52
53 % Calculate width of P and N regions
54 xP=w*Nd/(Na+Nd);
55 xN=w*Na/(Na+Nd);
56
57 % Calculate charge density, electric field, voltage and band edges
58 xx=linspace(-1/2,1/2,Nx); % x-axis
59 E=zeros(size(xx));
60 V=zeros(size(xx));
61 EceV=zeros(size(xx));
62 EveV=zeros(size(xx));
63 rho=zeros(size(xx));
64
65 for m=1:length(xx)
66 x=xx(m);
67 if (x>=-xP) && (x<0) % inside the depletion region (P-side)
68 rho(m)=-q*Na; % charge density (Cb/m^3)
69 E(m)=-q*Na/es*(x+xP); % field intensity (V/m)
70 V(m)=q*Na/es/2*(x+xP)^2; % voltage (V)
71 elseif (x>=0) && (x<=xN) % inside the depletion region (N-side)
72 rho(m)=q*Nd; % charge density (Cb/m^3)
73 E(m)=q*Nd/es*(x-xN); % field intensity (V/m)
74 V(m)=VbiV-q*Nd/es/2*(x-xN)^2; % voltage (V)
75 elseif (x>xN)
76 V(m)=VbiV; % voltage is constant outside
77 end
78 end
79
80 % Calculate energy levels across the junctions
81 Evx=-q*V;
82 Ecx=Eg+Evx;
83

```



```

84 % Convert to eV
85 EveVx=Evx/q;
86 EceVx=Ecx/q;
87
88 % Fermi levels in P and N side (should be equal)
89 EFN=Evx(1)+k*T*log(Nv/Na);
90 EFP=Ecx(length(xx))-k*T*log(Nc/Nd);
91
92 % convert to eV
93 EFNeV=EFN/q;
94 EFPeV=EFP/q;
95
96 % Calculate carrier density across the junctions
97 nx=Nc*exp(-(Ecx-EFN)/k/T);
98 px=Nv*exp(-(EFN-Evx)/k/T);
99
100 % convert to cm^-3
101 nx_cm3=nx/1e6;
102 px_cm3=px/1e6;
103
104 % calculate currents
105 Jndrift=mu_n*q*nx.*E;
106 Jpdrift=mu_p*q*px.*E;
107
108 % calculate diffusion currents
109 dx=xx(2)-xx(1);
110 dndx=diff(nx)/dx;
111 dpdx=diff(px)/dx;
112 Jndiffusion=q*Dn*dndx;
113 Jpdiffusion=-q*Dp*dpdx;
114
115 figure(1);
116 plot(xx/1e-6,E,'LineWidth',3);
117 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
118 xlabel('\it x\rm [\mum]');
119 ylabel('\it E\rm(\itx\rm) [V/m]');
120 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
121
122 figure(2);
123 plot(xx/1e-6,V,'LineWidth',3);
124 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
125 xlabel('\it x\rm [\mum]');
126 ylabel('\it V\rm(\itx\rm)\rm [V]');
127 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
128
129 figure(3);
130 plot(xx/1e-6,rho,'LineWidth',3);
131 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
132 xlabel('\it x\rm [\mum]');
133 ylabel('\it \rho\rm(\itx\rm) [Cb/m^{3}]');
134 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
135
136 figure(4);
137 plot(xx/1e-6,EceVx,'r','LineWidth',3);
138 hold on;
139 plot(xx/1e-6,EveVx,'b','LineWidth',3);
140 plot(xx/1e-6,EFNeV*ones(size(xx)),'k--','LineWidth',3);
141 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
142 xlabel('\it x\rm [\mum]');
143 ylabel('Energy [eV]');
144 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
145 h=legend('E\rm_c','E\rm_v','E\rm_F');
146
147 figure(5);
148 semilogy(xx/1e-6,nx_cm3,'r','LineWidth',3);

```

```

149 hold on;
150 semilogy(xx/1e-6,px_cm3,'b','LineWidth',3);
151 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
152 xlabel('\it x\rm [\mum]');
153 ylabel('Carrier Density [cm^{-3}]');
154 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
155 h=legend('\itn ','\itp ');
156
157 figure(6);
158 xd=xx(1:length(xx)-1)+dx/2;
159 plot(xd/1e-6,Jndiffusion/1e4/1e6,'r','LineWidth',3);
160 hold on;
161 plot(xd/1e-6,Jpdiffusion/1e4/1e6,'b','LineWidth',3);
162 plot(xx/1e-6,Jndrift/1e4/1e6,'r--','LineWidth',3);
163 plot(xx/1e-6,Jpdrift/1e4/1e6,'b--','LineWidth',3);
164 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
165 xlabel('\it x\rm [\mum]');
166 ylabel('Current Density [\times 10^6 A/cm^2]');
167 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
168 h=legend('\itJ\rm_n^{diff} ','\itJ\rm_p^{diff} ','\itJ\rm_n^{drift} ','\itJ\rm_p^{drift} ');

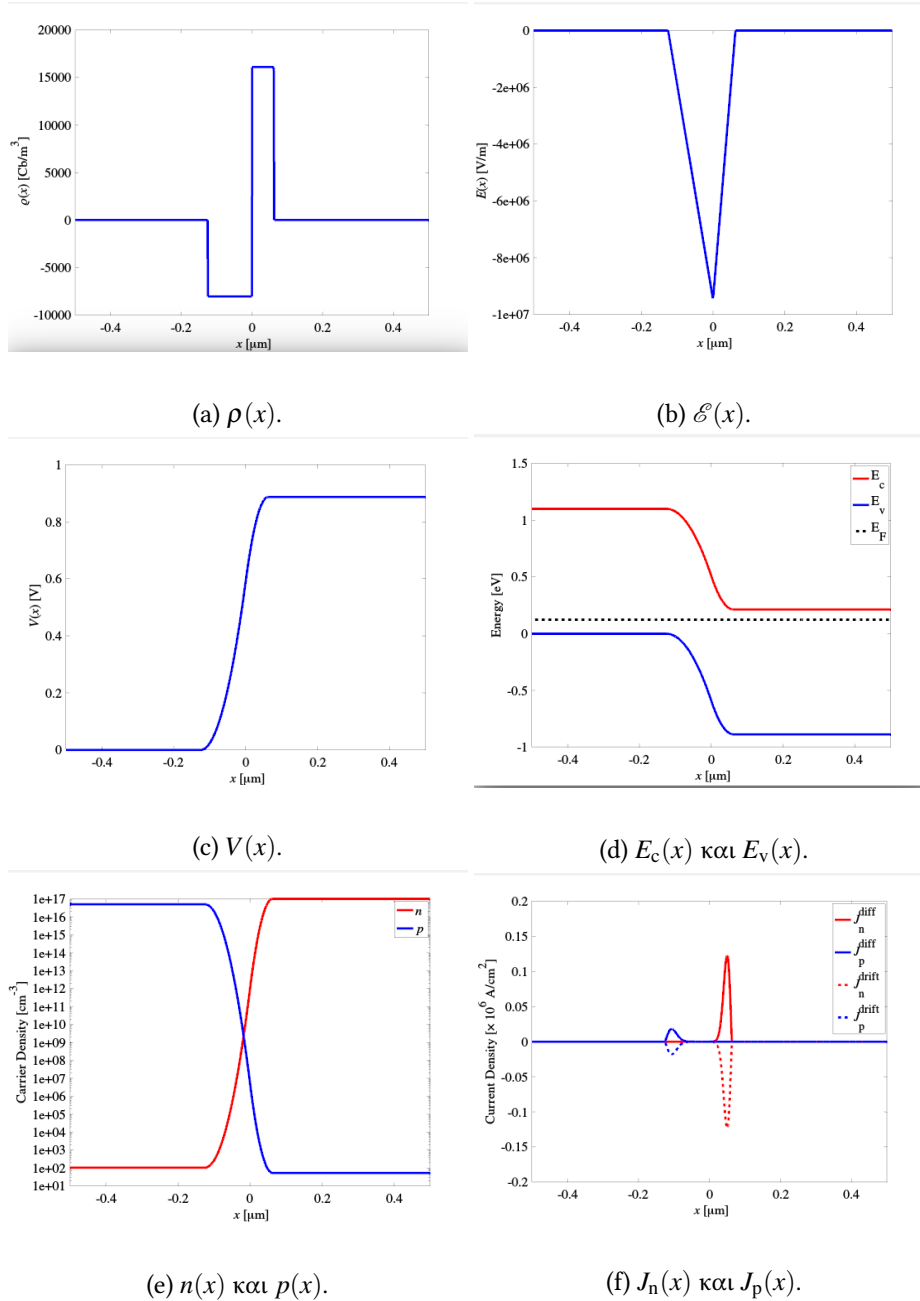
```

Listing 4.2: Το αρχείο depletionregion.m

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το OCTAVE για να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς και να καταλάβουμε καλύτερα τα αποτελέσματα αυτά. Στο listing 4.2 δείχνουμε τον κώδικα που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την πυκνότητα φορτίου ρ το ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E} και την τάση V κατά μήκος της επαφής. Ο κώδικας είναι πάνω-κάτω μία άμεση εφαρμογή των σχέσεων (4.10), (4.13) και (4.17) οπότε δεν θα σχολιάσουμε κάτι πολύ συγκεκριμένο για αυτόν (δείτε και τα σχόλια που έχουμε προσθέσει). Παρατηρούμε στην εικόνα 4.5 τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τον κώδικα του listing 4.2. Η εικόνα 4.5a παρουσιάζει την πυκνότητα φορτίου που έχουμε υποθέσει σύμφωνα και με την (4.10). Στην περιοχή απογύμνωσης, στην P πλευρά (αριστερά του $x = 0$) έχουμε έλλειψη θετικού φορτίου αφού έχουν φύγει όλοι οι φορείς (οπές) ενώ το ανάποδο συμβαίνει στην πλευρά N όπου έχουν φύγει τα ηλεκτρόνια και επομένως έχουμε έλλειψη αρνητικού φορτίου. Το ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}(x)$ στην εικόνα 4.5b είναι μία τριγωνική συνάρτηση του x και είναι πάντα αρνητικό όπως άλλωστε υποδεικνύει και η εικόνα 4.2. Το δυναμικό $V(x)$ στην εικόνα 4.5c κατά μήκος του άξονα των x είναι μηδέν μέχρι να φτάσουμε στην P πλευρά της περιοχής απογύμνωσης, αυξάνει μέσα σε αυτήν και τελικά σταθεροποιείται στην τιμή $V_{bi} \cong 0.9V$ όταν απομακρυνόμαστε από την περιοχή απογύμνωσης. Οι σχέσεις (3.50) και (3.51) μας δίνουν τις ενεργειακές στάθμες E_c και E_v σε όλη την διάταξη. Στην εικόνα 4.5d δείχνουμε την μεταβολή των σταθμών αυτών. Μπορούμε επιπλέον να χρησιμοποιήσουμε τις (3.19) και (3.21) για να υπολογίσουμε τις πυκνότητες των φορέων κατά μήκος της διάταξης $n(x)$ και $p(x)$ και το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα 4.5e. Τέλος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις (3.43),(3.42),(3.47) και (3.46) για να υπολογίσουμε τα ρεύματα ολίσθησης και διάχυσης, όπως φαίνεται στην εικόνα (4.5f).

Υπάρχουν δύο πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα που μπορούμε να συνάγουμε από την εικόνα 4.5. Το πρώτο είναι ότι η πυκνότητα των φορέων φθίνει εκθετικά μέσα στην περιοχή απογύμνωσης όπως δείχνει η εικόνα 4.5e. Το δεύτερο είναι ότι το ρεύμα εξαιτίας της διάχυσης είναι αντίθετο του ρεύματος ολίσθησης και για τα δύο είδη φορέων οπότε οι συνισταμένες τους είναι μηδέν, $J_n = J_p = 0$ κάτι που είναι αναμενόμενο εφόσον η δίοδος είναι σε ισορροπία και επομένως το συνολικό ρεύμα θα πρέπει να είναι μηδέν εφόσον η ολίσθηση αναιρεί την διάχυση.

Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα τις τιμές της πυκνότητας ρεύματος της εικόνας $J_n J_p$ ως υποθέσουμε ότι η δίοδος μας δεν βρίσκεται σε ισορροπία και διαρρέεται τελικά από κάποιο



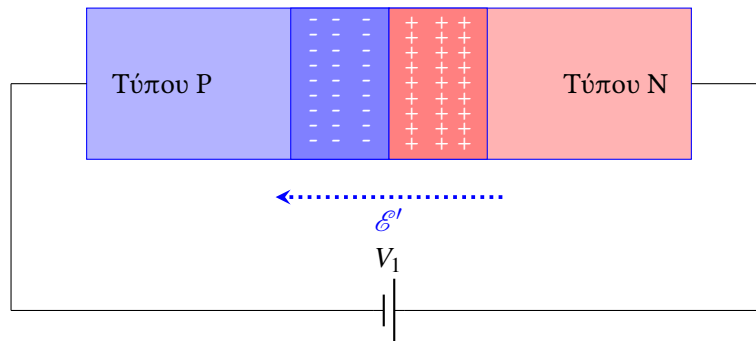
Εικόνα 4.5: Υπολογισμοί σε μία επαφή PN.

ρεύμα $i_D = 10\text{mA}$. Αν θεωρήσουμε μία επιφάνεια διατομής της διόδου $S = 10^{-4}\text{cm}^2$ τότε η πυκνότητα ρεύματος που αντιστοιχεί στο ρεύμα αυτό είναι $J = i_D/S = 10^2\text{A/cm}^2$. Στην περιοχή απογύμνωσης όπως φαίνεται στην εικόνα συναντάμε σε ορισμένα σημεία πολύ μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας ρεύματος οι οποίες αλληλοαναιρούνται.

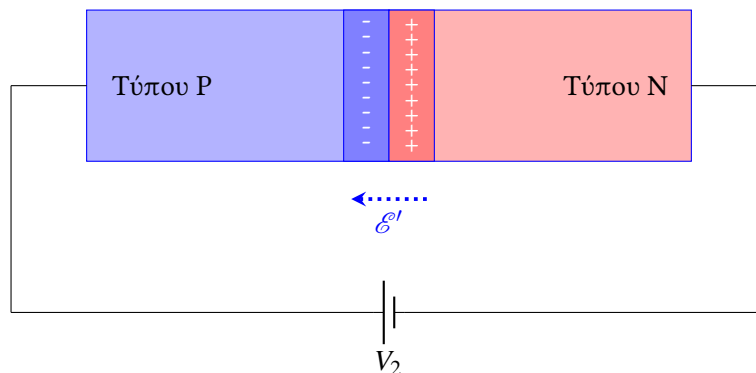
4.4 Η επαφή pn υπό τάση

Στις προηγούμενες ενότητες 4.3 περιγράψαμε τι συμβαίνει όταν η διόδος βρίσκεται 4.2 περιγράψαμε τι συμβαίνει όταν η επαφή pn βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Τι συμβαίνει όμως όταν εφαρμόζουμε κάποια τάση σε αυτή;

Πολλά εξαρτώνται από την φορά της τάσης. Στην εικόνα 4.7 έχουμε συνδέσει μία πηγή η οποία τείνει να δημιουργήσει ρεύμα από το N προς το P. Η φορά του πεδίου \mathcal{E}' που δημιουργεί η πηγή θα ενισχύσει επομένως το ήδη υπάρχον πεδίο στην περιοχή απογύμνωσης \mathcal{E} και θα έχουμε $|\mathcal{E}'| > |\mathcal{E}|$. Το πεδίο αυτό θα επηρεάζει την ισορροπία στην περιοχή απογύμνωσης. Θα πρέπει τώρα να έχουμε περισσότερο θετικό φορτίο στην περιοχή N και περισσότερο αρνητικό φορτίο στην περιοχή P το οποίο να είναι σε αντιστοιχία με το μεγαλύτερο $|\mathcal{E}'|$. Για να γίνει αυτό θα πρέπει η περιοχή απογύμνωσης να έχει μεγαλώσει. Η αντίστροφη διαδικασία θα πρέπει να



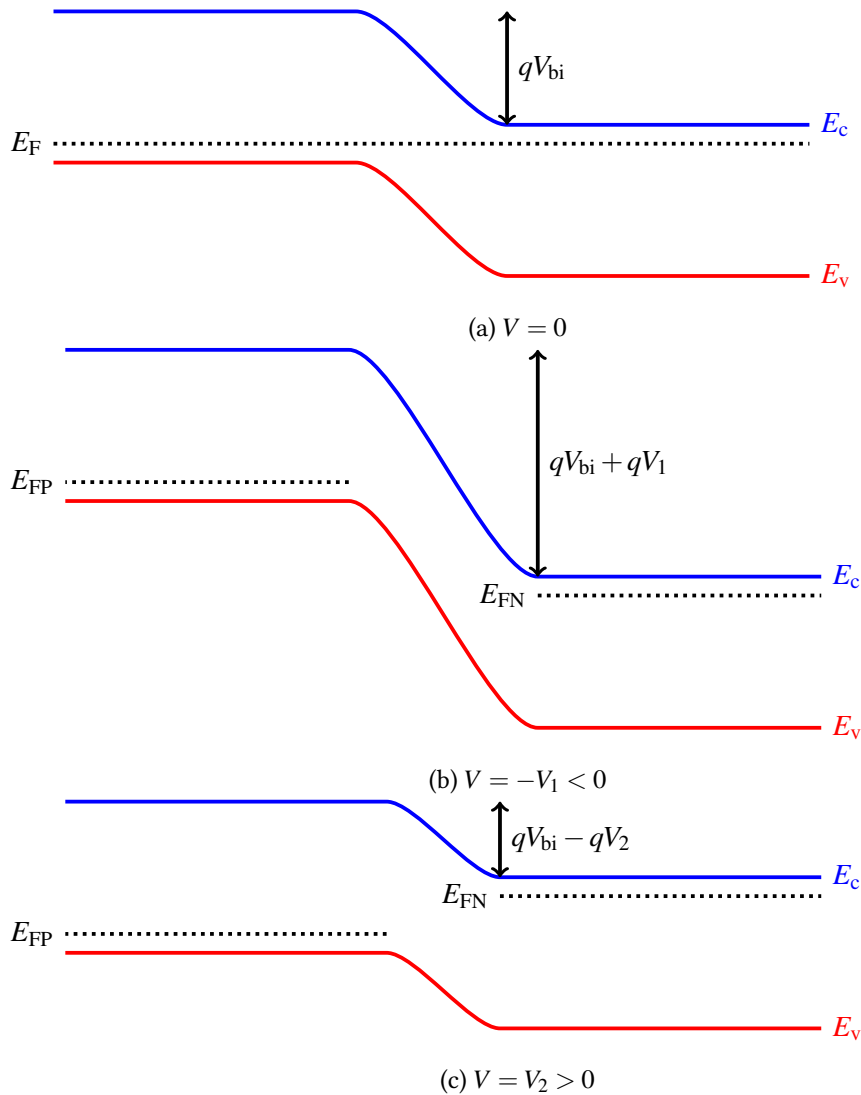
Εικόνα 4.6: Ανάστροφη τάση.



Εικόνα 4.7: Ορθή τάση.

συμβαίνει όταν η πηγή τείνει να δημιουργήσει ρεύμα από το P προς το N. Τότε θα έχουμε $|\mathcal{E}'| <$

$|\mathcal{E}'|$ και το πεδίο αυτό θα πρέπει να αντιστοιχεί σε λιγότερο πεδίο στην περιοχή απογύμνωσης και επομένως και σε μικρότερη περιοχή απογύμνωσης. Η διάχυση τώρα μπορεί να δράσει πιο ελεύθερα και να μεταφέρει περισσότερες οπές από το P προς το N και ηλεκτρόνια από το N στο P καθότι το πεδίο είναι ασθενέστερο.



Εικόνα 4.8: Ενεργειακά διαγράμματα κατά μήκος της επαφής PN

Ας δούμε τώρα λίγο καλύτερα τι συμβαίνει θεωρώντας τα ενεργειακά διαγράμματα. Στην εικόνα 4.8 δείχνουμε τι συμβαίνει με τις στάθμες E_c και E_v κατά μήκος της διάταξης. Στην εικόνα 4.8a έχουμε την γνώριμη κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας όπου οι στάθμες E_c και E_v είναι υψηλότερες στην αριστερή περιοχή (P περιοχή) και χαμηλώνουν στην δεξιά (N περιοχή) εξαιτίας του δυναμικού V_{bi} . Επίσης η στάθμη E_F είναι συνεχής κατά μήκος της διόδου. Στην εικόνα 4.8b έχουν ανάστροφη πόλωση $V = V_1 < 0$ η οποία ενισχύει το ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E}' και το βύθισμα των E_c και E_v είναι πιο έντονο. Αντίθετα στην εικόνα 4.7 έχουμε ορθή πόλωση $V = V_2 > 0$ η

οποία ελαττώνει το βύθισμα των των E_c και E_v καθώς το πεδίο \mathcal{E}' είναι τώρα μικρότερο. Είναι φανερό ότι οι φορείς συναντούν πολύ μεγαλύτερη αντίσταση στην περίπτωση του 4.8b. Για να καταφέρει ένα ηλεκτρόνιο που είναι στην ζώνη αγωγιμότητας στην δεξιά περιοχή (περιοχή N) να βρεθεί στην αριστερή περιοχή (περιοχή P) θα πρέπει να έχει ενέργεια E που να του επιτρέψει να βρεθεί στην ζώνη αγωγιμότητας στην αριστερή πλευρά η οποία βρίσκεται πιο πάνω κατά $qV_{bi} + qV_1$. Η κατάσταση είναι πολύ πιο εύκολη για τα ηλεκτρόνια στην περιοχή N στην περίπτωση της εικόνας 4.8c όπου έχουμε ορθή πόλωση, καθώς τώρα η ενέργεια E που πρέπει να έχει το ηλεκτρόνιο είναι μικρότερη για να περάσει στην αριστερή πλευρά.

Πρωτού προχωρήσουμε ως σημειώσουμε μία χρήσιμη λεπτομέρεια την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω. Σύμφωνα με την (4.6) η μεταβολή σε eV στη στάθμη Fermi E_{FN}/q που αντιστοιχεί στα ηλεκτρόνια προκύπτει από το ρεύμα J_n των ηλεκτρονίων. Ας παίξουμε λίγο παραπάνω με την (4.6) για να δείξουμε ότι,

$$\frac{dE_{FN}}{dx} \frac{1}{q} = \frac{J_n}{n\mu_n q \mathcal{E}} = \frac{J_n}{J_n^{\text{drift}}} \mathcal{E} \quad (4.20)$$

Η (4.20) δείχνει ότι η μεταβολή της στάθμης Fermi σε eV μπορεί να εκφραστεί ως το πηλίκο του συνολικού ρεύματος των ηλεκτρονίων J_n προς τη συνιστώσα του ρεύματος που οφείλεται στην ολίσθηση, $J_n^{\text{drift}} = n\mu_n q \mathcal{E}$. Ωστόσο όπως είδαμε στο τέλος της ενότητας 4.3 περιμένουμε το συνολικό ρεύμα J_n να είναι πολύ μικρότερο του ρεύματος ολίσθησης J_n^{drift} και επομένως η μεταβολή της στάθμης Fermi E_{FN} των ηλεκτρονίων θα είναι μικρή κατά μήκος της περιοχής απογύμνωσης ενώ το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για την στάθμη των οπών E_{FP} . Αυτό έχει μία ενδιαφέρουσα συνέπεια για τις συγκεντρώσεις των φορέων στα άκρα της περιοχής απογύμνωσης. Πράγματι από την (3.48) προκύπτει ότι η πυκνότητα ηλεκτρονίων στο αριστερό άκρο της περιοχής P, $x = -x_p$ είναι:

$$n(-x_p) = N_c e^{-(E_c(-x_p) - E_{FN}(-x_p))/(kT)} \quad (4.21)$$

Στο δεξιό άκρο της διάταξης, $x = l/2$ χρησιμοποιούμε την ίδια σχέση για να γράψουμε,

$$n(l/2) = N_c e^{-(E_c(l/2) - E_{FN}(l/2))/(kT)} \quad (4.22)$$

Ωστόσο όπως είπαμε η στάθμη Fermi δεν μεταβάλλεται καθώς πηγαίνουμε από την περιοχή N μέσα στην περιοχή απογύμνωσης οπότε, $E_{FN}(-x_p) = E_{FN}(l/2)$. Διαιρώντας κατά μέλη τις (4.22) και (4.21) έπεται ότι,

$$n(-x_p) = n(l/2) e^{-(E_c(-x_p) - E_c(l/2))/(kT)} = n(l/2) e^{-q(V_{bi} - V)/(kT)} \quad (4.23)$$

όπου σύμφωνα με την εικόνα 4.5d θα έχουμε $E_c(-x_p) - E_c(l/2) = -q(V_{bi} - V)/(kT)$. Θα βαρύνουμε λίγο παραπάνω το παιχνίδι τώρα. Στα άκρα της διάταξης $x = -l/2$ και $x = l/2$ θα πρέπει να τοποθετήσουμε μεταλλικές επιφάνειες για να μπορέσουμε να συνδέσουμε την διάταξη στο εξωτερικό κύκλωμα. Οπότε η ωραία περιοδικότητα του κρυστάλλου διακόπτεται και αυτό έχει ως αποτέλεσμα σε εκείνα τα σημεία να εμφανίζονται πολλές ευκαιρίες επανασύνδεσης για τους φορείς εξαιτίας νέων καταστάσεων που δημιουργούνται μέσα στο χάσμα όπως δείχνει η εικόνα 3.23. Η επανασύνδεση είναι τόσο έντονη που αναγκάζει όλους τους νέους φορείς που εμφανίζονται να επανασυνδέονται αμέσως με αποτέλεσμα η τιμή των n και p στα σημεία αυτά να είναι αυτή της θερμοδυναμικής ισορροπίας, δηλαδή $n(l/2) \cong N_d$ και $n(-l/2) \cong n_i^2/N_d$. Από την (4.9) μπορούμε να γράψουμε,

$$N_d e^{-qV_{bi}/kT} = \frac{n_i^2}{N_a} = n(-l/2) \quad (4.24)$$

Συνδυάζοντας τις (4.24) και (4.23) λαμβάνουμε την εξής σχέση για την συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στο αριστερό άκρο της περιοχής απογύμνωσης,

$$n(-x_p) = n(-l/2)e^{qV/(kT)} = \frac{n_i^2}{N_a} e^{qV/(kT)} \quad (4.25)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συνάγουμε ότι για τις οπές στο δεξιό άκρο της περιοχής απογύμνωσης $x = x_N$, θα έχουμε:

$$p(x_N) = p(l/2)e^{qV/(kT)} = \frac{n_i^2}{N_d} e^{qV/(kT)} \quad (4.26)$$

Θα δούμε ότι οι σχέσεις (4.25) και (4.26) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την συνέχεια. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις (4.25) και (4.26) έτσι ώστε να αφορούν τις συγκεντρώσεις των πλεονάζοντων φορέων $n' = n - n_0$ και $p' = p - p_0$ όπου n_0 και p_0 είναι οι συγκεντρώσεις στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Θα έχουμε,

$$n'(-x_p) = n(-x_p) - \frac{n_i^2}{N_a} = \frac{n_i^2}{N_a} (e^{qV/(kT)} - 1) \quad (4.27)$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε για το $p'(x)$,

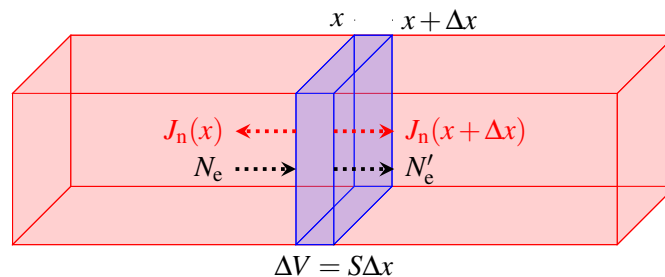
$$p'(x_N) = \frac{n_i^2}{N_d} (e^{qV/(kT)} - 1) \quad (4.28)$$

Επίσης στις άκρες τις διάταξης και εφόσον όπως είπαμε θα πρέπει να μην έχουμε πλεονάζοντες φορείς,

$$n'(l/2) = p'(-l/2) = 0 \quad (4.29)$$

4.5 Η εξίσωση συνέχειας

Για να καταλάβουμε την σχέση μεταξύ του ρεύματος I και της τάσης V που έχουμε στην διόδο θα χρειαστούμε την *εξίσωση συνέχειας*. Η εξίσωση συνέχειας περιγράφει την σχέση μεταξύ της πυκνότητας του ρεύματος J και της επανασύνδεσης των φορέων. Στην εικόνα 4.9 δείχνουμε την μεταφορά των ηλεκτρονίων μέσα σε υλικό τύπου N. Ας σκεφτούμε λίγο τι συμβαίνει όταν



Εικόνα 4.9: Βοηθητικό διάγραμμα για την εξίσωση συνέχειας.

κινούνται τα ηλεκτρόνια μέσα στο υλικό. Θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο $\Delta V = S\Delta x$ που

διαγράφεται λαμβάνοντας την διατομή S του υλικού στις θέσεις x και $x + \Delta x$ όπως δείχνει και η εικόνα 4.9. Στη θέση x και την χρονική στιγμή t θεωρούμε ότι έχουμε N_e ηλεκτρόνια στην διατομή του υλικού ενώ μετά από χρόνο Δt τα ηλεκτρόνια που έχουμε στην διατομή στην θέση $x + \Delta x$ είναι N'_e . Στην εικόνα 4.9 δείχνουμε και την φορά του ρεύματος J_n η οποία είναι αντίθετη από την φορά μετακίνησης των ηλεκτρονίων (θυμηθείτε ότι το J_n δείχνει την συμβατική φορά του ρεύματος και τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητικό φορτίο). Το ρεύμα J_n πρέπει να σχετίζεται με τον αριθμό των φορέων. Θυμηθείτε ότι η πυκνότητα ρεύματος των ηλεκτρονίων μετράει το πόσο φορτίο ΔQ περνάει από την διατομή S στο χρονικό διάστημα Δt και οφείλεται στα ηλεκτρόνια. Για να βρούμε το N_e , θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη πυκνότητα ρεύματος $J_n(x, t)$ επί την επιφάνεια S και το χρόνο Δt για να βρούμε πόσο φορτίο έπεσε και στη συνέχεια να διαιρέσουμε με το στοιχειώδες φορτίο του ηλεκτρονίου q . Επομένως θα έχουμε $N_e = -J_n(x, t)S\Delta t/q$ όπου το μείον μπαίνει επειδή το ρεύμα είναι αρνητικό σύμφωνα με την εικόνα 4.9. Κάποια από τα ηλεκτρόνια αυτά επανασυνδέονται όπως είδαμε στην σχέση (3.62). Αν ο ρυθμός επανασύνδεσης ανά μονάδα όγκου είναι R_n τότε ο αριθμός των φορέων που έχουν επανασυνδεθεί είναι $R_n\Delta V\Delta t$. Επομένως δεξιά του στοιχειώδους όγκου ΔV εξέρχονται $N'_e = N_e - R_n\Delta V\Delta t = N_e - R_nS\Delta x\Delta t$. Αυτός ο αριθμός φορέων θα πρέπει να ισούται και με $N'_e = -J_n(x + \Delta x, t + \Delta t)S\Delta t/q$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε,

$$-\frac{1}{q}J_n(x + \Delta x, t + \Delta t)S\Delta t + \frac{1}{q}J_n(x, t)S\Delta t = -R_nS\Delta x\Delta t \quad (4.30)$$

Στην (4.30) μπορούμε να κάνουμε δύο απλοποιήσεις: καταρχήν μπορούμε να απαλείψουμε τον κοινό όρο $S\Delta t$ από αμφότερα τα μέλη. Μετά θα κάνουμε την υπόθεση ότι το ρεύμα $J_n(x, t)$ δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλαδή $J_n(x, t) = J_n(x)$. Αυτό σημαίνει ότι για παράδειγμα δεν βάζουμε στην είσοδο της διάοδος κάποια εναλλασσόμενη πηγή αλλά μία πηγή σταθερής τάσης. Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε:

$$-\frac{1}{q} \frac{J_n(x + \Delta x) - J_n(x)}{\Delta x} = -R_n \quad (4.31)$$

και παίρνοντας το όριο για $\Delta x \rightarrow 0$, θα έχουμε:

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_n}{dx} = R_n \quad (4.32)$$

Η εξίσωση (4.32) είναι η εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια. Μία παρόμοια εξίσωση μπορούμε να γράψουμε και για τις οπές,

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_p}{dx} = -R_p \quad (4.33)$$

Οι εξισώσεις συνέχειας συνδέουν την μεταβολή του ρεύματος των οπών και των ηλεκτρονίων με τους αντίστοιχους ρυθμούς επανασύνδεσης. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ρεύμα J_n οφείλεται κυρίως στην διάχυση των φορέων και επομένως σύμφωνα με την (3.43):

$$J_n \cong qD_n \frac{dn}{dx} \quad (4.34)$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε από την (4.32) ότι:

$$D_n \frac{d^2n}{dx^2} = R_n \quad (4.35)$$

Ο ρυθμός επανασύνδεσης R_n δίνεται από την σχέση (3.64). Η συγκέντρωση των επιπλέον ηλεκτρονίων n' είναι η διαφορά μεταξύ της συγκέντρωσης n με την συγκέντρωση n_0 στην κατάσταση ισορροπίας, $n' = n - n_0$. Εφόσον $dn'/dx = dn/dx$, η (4.35) γράφεται ως εξής:

$$\frac{d^2 n'}{dx^2} = \frac{n'}{\tau_R D_n} \quad (4.36)$$

Η (4.36) είναι μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Ίσως φαίνεται δύσκολη αλλά είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι έχει λύσεις της μορφής,

$$n'(x) = Ae^{-x/L_n} + Be^{x/L_n} \quad (4.37)$$

όπου το μήκος L_n ονομάζεται *μήκος διάχυσης* για τα ηλεκτρόνια και δίνεται από την σχέση,

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_R} \quad (4.38)$$

Οι σταθερές A και B καθορίζονται όπως θα δούμε και στη συνέχεια από τιμές του $n'(x)$ σε δύο σημεία του άξονα των x . Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η (4.37) είναι λύση της (4.36) με απευθείας αντικατάσταση. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση συνέχειας για τις οπές όταν λαμβάνουμε υπόψη μόνο την διάχυση γράφεται,

$$\frac{d^2 p'}{dx^2} = \frac{p'}{\tau_R D_p} \quad (4.39)$$

και έχει λύση της μορφής,

$$p'(x) = Ce^{-x/L_p} + De^{x/L_p} \quad (4.40)$$

όπου το μήκος L_p είναι το μήκος διάχυσης για τις οπές και δίνεται από την σχέση,

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_R} \quad (4.41)$$

4.6 Σχέση ρεύματος-τάσης

Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε την σχέση ρεύματος-τάσης που διαρρέει την δίοδο μας. Ξεκινάμε με το γεγονός ότι η ανταλλαγή των φορέων λόγω διάχυσης θα πρέπει να συμβαίνει κυρίως κοντά στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο περιοχών όπου και σχηματίζεται η περιοχή απογύμνωσης. Μέσα σε αυτή την περιοχή αναπτύσσεται το πεδίο \mathcal{E} το οποίο αντιστέκεται στην διάχυση των φορέων ενώ μακριά από αυτήν το πεδίο είναι αμελητέο $\mathcal{E} \cong 0$. Είναι αρκετά δύσκολο να λυθούν οι εξισώσεις συνέχειας μέσα στην περιοχή απογύμνωσης καθώς το $\mathcal{E} \neq 0$ θα πρέπει ληφθεί υπόψη στην (4.32) και (4.33). Συνήθως όμως η περιοχή απογύμνωσης έχει πολύ μικρό μήκος και μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της στην μεταβολή του ρεύματος επειδή οι επανασυνδέσεις εκεί θα είναι περιορισμένες. Παρακάτω θα θεωρήσουμε ότι τα J_n και J_p είναι σταθερά κατά μήκος της περιοχής απογύμνωσης.

Στις περιοχές έξω από την περιοχή απογύμνωσης που στην P πλευρά είναι από $x = -l/2$ μέχρι $x = -x_p$ και $x = x_n$ μέχρι $x = l/2$ θα έχουμε $\mathcal{E} \cong 0$ και επομένως τα ρεύματα ολίσθησης θα είναι σχεδόν μηδέν, $J_n^{\text{drift}} = n\mu_n q \mathcal{E} \cong 0$ και $J_p^{\text{drift}} = p\mu_p q \mathcal{E} \cong 0$. Στις περιοχές αυτές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τις λύσεις (4.40) και (4.37) και να προσδιορίσουμε τις σταθερές A ,

B , C και D από τις τιμές των $n'(x)$ και $p'(x)$ στις θέσεις που αντιστοιχούν στις (4.27), (4.28) και (4.29).

Σε ότι αφορά το $n'(x)$, στην P πλευρά θα έχουμε,

$$Ae^{l/2/L_n} + Be^{-l/2/L_n} = 0 \quad (4.42)$$

$$Ae^{x_p/L_n} + Be^{-x_p/L_n} = \frac{n_i^2}{N_a} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \quad (4.43)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις αν θέσουμε $\kappa = n_i^2(e^{qV/(kT)} - 1)/N_a$ μπορούμε να βρούμε $A = -Be^{-l/L_n}$ και χρησιμοποιώντας την (4.43) βρίσκουμε,

$$-Be^{-l/L_n} + Be^{-x_p/L_n} = \kappa \quad (4.44)$$

Ο συντελεστής e^{-l/L_n} είναι πολύ μικρότερος από τον e^{-x_p/L_n} επειδή το μήκος της διάταξης l εν γένει είναι πολύ μεγαλύτερο από την περιοχή απογύμνωσης. Επομένως,

$$B \cong \kappa e^{x_p/L_n} = \frac{n_i^2}{N_a} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) e^{x_p/L_n} \quad (4.45)$$

$$A \cong -\kappa e^{-l/L_n} = -\frac{n_i^2}{N_a} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) e^{-l/L_n} \quad (4.46)$$

οπότε τελικά

$$n'(x) = \frac{n_i^2}{N_a} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \left(-e^{-\frac{x+x_p-l}{L_n}} + e^{\frac{x+x_p}{L_n}} \right) \quad (4.47)$$

Εφόσον είμαστε αριστερά της περιοχής απογύμνωσης, $x \leq -x_p$, μπορούμε να αγνοήσουμε τον πρώτο όρο και να γράψουμε,

$$n'(x) \cong \frac{n_i^2}{N_a} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) e^{\frac{x+x_p}{L_n}} \quad (4.48)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι δεξιά της περιοχής απογύμνωσης, $x \geq x_N$,

$$p'(x) \cong \frac{n_i^2}{N_d} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) e^{-\frac{x-x_N}{L_p}} \quad (4.49)$$

Η μεταβολή dJ/dx του συνολικού ρεύματος $J = J_p + J_n$ που διαρρέει την διάταξη είναι,

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{dJ_n}{dx} + \frac{dJ_p}{dx} = R_n - R_p \quad (4.50)$$

Η (4.50) υποδεικνύει ότι η μεταβολή του συνολικού ρεύματος κατά μήκος της διάταξης καθορίζεται από την διαφορά $R_n - R_p$ των ρυθμών επανασυνδέσεων των οπών και των ηλεκτρονίων. Δεδομένου ότι κάθε ηλεκτρόνιο πρέπει να επανασυνδέεται με μία οπή θα πρέπει οι ρυθμοί αυτοί να είναι ίδιοι, $R_n - R_p = 0$. Επομένως θα έχουμε $\frac{dJ}{dx} = 0$, δηλαδή το συνολικό ρεύμα

$J = J_p + J_n$ θα παραμένει σταθερό. Αριστερά της περιοχής απογύμνωσης, $x \leq -x_p$ το ρεύμα των ηλεκτρονίων θα οφείλεται εξολοκλήρου στην διάχυση οπότε θα έχουμε, Εφόσον είμαστε αριστερά της περιοχής απογύμνωσης, $x \leq -x_p$, μπορούμε να αγνοήσουμε τον πρώτο όρο και να γράψουμε,

$$J_n = qD_n \frac{dn'}{dx} = \frac{qn_i^2}{N_a} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \frac{D_n}{L_n} e^{-\frac{x+x_p}{L_n}}, \text{ για } x \leq -x_p \quad (4.51)$$

Δεξιά της περιοχής απογύμνωσης, $x \geq x_n$ το ρεύμα εξαιτίας των οπών θα είναι,

$$J_p = -qD_p \frac{dp'}{dx} = \frac{qn_i^2}{N_d} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \frac{D_p}{L_p} e^{-\frac{x-x_n}{L_p}}, \text{ για } x \geq x_n \quad (4.52)$$

Όπως εξηγήσαμε και παραπάνω, τα ρεύματα θεωρούνται προσεγγιστικά σταθερά στην περιοχή απογύμνωσης οπότε,

$$J_p(-x_p) = J_p(x_n) = \frac{qn_i^2 D_p}{N_d L_p} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \quad (4.53)$$

$$J_n(x_n) = J_n(-x_p) = \frac{qn_i^2 D_n}{N_a L_n} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \quad (4.54)$$

Η συνολική πυκνότητα ρεύματος J , δίνεται από την σχέση:

$$J = J_p(-x_p) + J_n(-x_p) = J_p(x_n) + J_n(x_n) = \left(\frac{qn_i^2 D_n}{N_a L_n} + \frac{qn_i^2 D_p}{N_d L_p} \right) \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \quad (4.55)$$

Το ρεύμα που i_D που διαρρέει την δίοδο είναι,

$$i_D = JS = qn_i^2 S \left(\frac{D_n}{N_a L_n} + \frac{D_p}{N_d L_p} \right) \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \quad (4.56)$$

```

1 % Calculation of depletion region characteristics at equilibrium
2
3 close all;
4 clear all;
5 clc
6
7 % Constants
8 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
9 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
10 mp=0.39*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
11 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
12 T=300; % temperature (Kelvin)
13 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
14 Na_cm3=1e17; % Acceptor concentration values (cm^-3)
15 Nd_cm3=1e17; % Donor concentration values (cm^-3)
16 q=1.609e-19; % Electron charge
17 l=1e-3; % pn device length along x
18 er=12; % relative dielectric constant of silicon
19 e0=8.85e-12; % vacuum dielectric constant F/m
20 es=er*e0; % silicon permittivity F/m
21 Nx=1000; % number of points in the x-axis
22 V=-0.5; % Forward voltage [V]

```

```

23 tau=1e-6; % Recombination rate [s]
24 S_cm2=1e-4; % diode cross-section [cm^2]
25 EgeV=1.1; % Gap length [eV]
26
27 % Unit conversion
28 Na=Na_cm3*1e6; % Convert to m^(-3)
29 Nd=Nd_cm3*1e6;
30 S=S_cm2/1e4; % m^2
31 Eg=EgeV*q; % J
32
33 % carrier mobilities
34 mu_n_cm2=1318/ (1 +((Na_cm3+Nd_cm3)*1e-17)^0.85) + 92;
35 mu_p_cm2=420 / (1 +((Na_cm3+Nd_cm3)*0.625*1e-17)^0.7) + 50;
36 mu_n=mu_n_cm2*1e-4;
37 mu_p=mu_p_cm2*1e-4;
38
39 % Diffusion coefficients
40 Dn=mu_n*k*T/q;
41 Dp=mu_p*k*T/q;
42
43 % Estimate effective density of states
44 Nc=2.8e25;
45 Nv=1.04e25;
46
47 % Calculate intrinsic carrier level
48 ni=sqrt(Nc*Nv)*exp(-Eg/(2*k*T));
49
50 % Calculate builtin voltage
51 VbiV=k*T/q*log(Na*Nd/ni^2);
52
53 % Voltages for the diode characteristic
54 VV=-2:0.001:VbiV;
55
56 % Calculate depletion layer width
57 w=sqrt( 2*er*e0*(VbiV-V) / q * (1/Na+1/Nd));
58
59 % Calculate width of P and N regions
60 xP=w*Nd/(Na+Nd);
61 xN=w*Na/(Na+Nd);
62
63 % Carrier densities at thermal equilibrium
64 neqN=Nd;
65 neqP=ni^2/Nd;
66 peqP=Na;
67 peqN=ni^2/Na;
68
69 % Diffusion lengths
70 Ln=sqrt(Dn*tau);
71 Lp=sqrt(Dp*tau);
72
73 % x-axis
74 xx=linspace(-1/2,1/2,Nx); % x-axis
75
76 % create vectors for diode parameters
77 Jn=zeros(size(xx));
78 Jp=zeros(size(xx));
79
80 % current densities at edge of depletion region
81 Jp_edge=q*ni^2*Dp/Nd/Lp*(exp(q*V/k/T)-1);
82 Jn_edge=q*ni^2*Dn/Na/Ln*(exp(q*V/k/T)-1);
83
84 % total current
85 Jtot=Jp_edge+Jn_edge;
86
87 for m=1:length(xx)

```

```

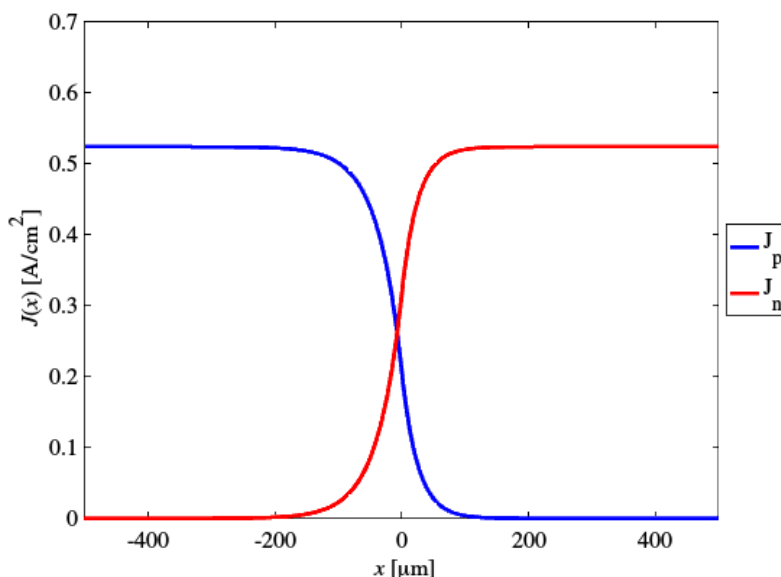
88  x=xx(m);
89  if (x>=-xP) && (x<xN)                % inside the depletion region
90      Jn(m)=Jn_edge;
91      Jp(m)=Jp_edge;
92  elseif (x<-xP)                       % outside the depletion region (P-side)
93      Jn(m)=q*ni^2/Na*(exp(q*V/k/T)-1)*Dn/Ln*exp(-(x+xP)/Ln);
94      Jp(m)=Jtot-Jn(m);
95  elseif (x>xN)
96      Jp(m)=q*ni^2/Nd*(exp(q*V/k/T)-1)*Dp/Lp*exp(-(x-xN)/Lp);
97      Jn(m)=Jtot-Jp(m);
98  end
99  end
100
101 % Diode characteristic
102 Js=q*ni^2*Dp/Nd/Lp+q*ni^2*Dn/Na/Ln;
103 iD=S*Js*(exp(q*V/k/T)-1);
104
105 figure(1);
106 plot(xx/1e-6,Jp/1e4,'LineWidth',3);
107 hold on
108 plot(xx/1e-6,Jn/1e4,'r','LineWidth',3);
109 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
110 xlabel('\it x\rm [\umum]');
111 ylabel('\it J\rm(\itx\rm) [A/cm^2]');
112 xlim([-1/2/1e-6 1/2/1e-6]);
113 legend({'J\rm_p','J\rm_n'},"location","eastoutside");
114
115 figure(2);
116 plot(VV,iD/1e-3,'LineWidth',3);
117 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
118 xlabel('\it v\rm_D [V]');
119 ylabel('\it i\rm_D [mA]');

```

Listing 4.3: Το αρχείο diodecurrent.m

Ας πιάσουμε τώρα το αγαπημένο μας OCTAVE για να δούμε αφενός μεν πως είναι η κατανομή του ρεύματος μέσα στη δίοδο και αφετέρου για να δούμε την σχέση ρεύματος/τάση στα άκρα της διόδου $i_D = f(V)$. Χρησιμοποιούμε το listing 4.3, το οποίο αποτελεί απευθείας εφαρμογή των σχέσεων που είδαμε στο κεφάλαιο αυτό. Έχει ίσως σημασία να σχολιάσουμε ορισμένα σημεία του κώδικα. Στις γραμμές 7-51 υπολογίζουμε όπως έχουμε κάνει αρκετές φορές μέχρι τώρα τις παραμέτρους του υλικού μας. Σκοπός μας είναι να δείξουμε την κατανομή των ρευμάτων μέσα στην διάταξη για μία τιμή του V που βρίσκεται στην μεταβλητή V του OCTAVE αλλά και την γραφική παράσταση της (4.56) για διάφορες τιμές του V τις οποίες αποθηκεύουμε στο διάνυσμα VV του OCTAVE. Υπολογίζουμε το μήκος της περιοχής απογύμνωσης με την 4.19 μόνο που τώρα και εφαρμόζουμε τάση V στην δίοδο, το V_{bi} θα πρέπει να αντικατασταθεί από το $V_{bi} - V$ όπως άλλωστε υποδεικνύει και η εικόνα 4.8c. Επίσης στις γραμμές 81,82 υπολογίζουμε τα ρεύματα (4.54) και (4.53) καθώς και το συνολικό ρεύμα J στην γραμμή 85.

Στην εικόνα 4.10 δείχνουμε τις τιμές της πυκνότητας ρεύματος που υπολογίζονται από τον κώδικα του OCTAVE ενώ στην 4.11 δείχνουμε την σχέση ρεύματος τάσης $i_D = f(V)$. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε την μεταβολή του ρεύματος μέσα στην διάταξη: στην περιοχή P το ρεύμα των οπών J_p είναι πολύ ισχυρό αλλά καθώς πλησιάζουμε στο όριο μεταξύ των δύο υλικών ($x = 0$) αρχίζει και μειώνεται και μετά από λίγο γίνεται πολύ μικρό καθώς περνάμε στην πλευρά N. Το ρεύμα των ηλεκτρονίων J_n ακολουθεί την αντίστροφη πορεία. Επομένως στην περιοχή P το ρεύμα οφείλεται κυρίως στις οπές και τα ηλεκτρόνια είναι η μειοψηφία ενώ στην περιοχή N το ρεύμα οφείλεται στα ηλεκτρόνια και οι οπές τώρα είναι η μειοψηφία. Για τον λόγο αυτό τα ηλεκτρόνια χαρακτηρίζονται ως φορείς μειοψηφίας στην P πλευρά ενώ οι οπές ως φορείς

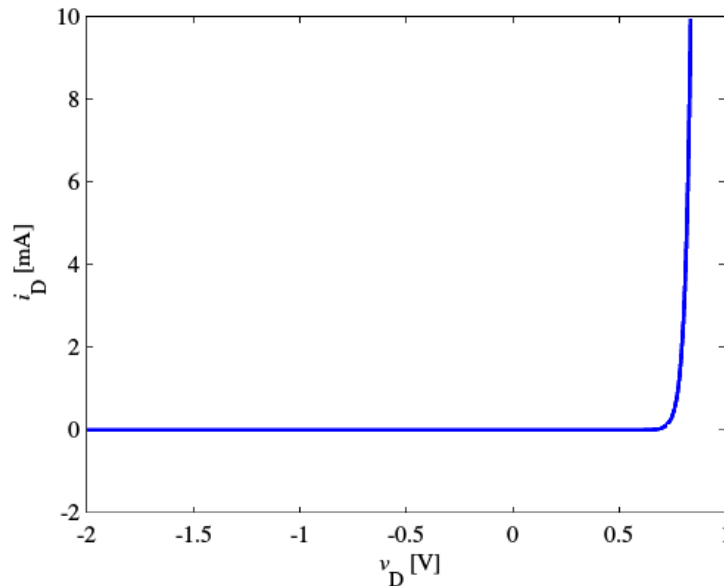


Εικόνα 4.10: Ρεύματα κατά μήκος της διάταξης για ορθή τάση πόλωσης $V = 0.7V$.

μειοψηφίας στην N πλευρά.

Πιο ενδιαφέρονσα είναι η χαρακτηριστική ρεύματος/τάσης που βλέπουμε στην εικόνα 4.11. Παρατηρούμε το εξής φαινόμενο: όταν η τάση είναι μικρότερη από 0.5V τότε το ρεύμα είναι πολύ μικρό (σχεδόν μηδενικό). Όταν η τάση αυξάνει κοντά στα 0.7V τότε έχουμε μία κατακόρυφη αύξηση του ρεύματος. Αυτό δείχνει την... διπλή προσωπικότητα της διάοδος. Όταν είμαστε κάτω από τα 0.5V στην ουσία η διάοδος λειτουργεί ως μία πολύ μεγάλη αντίσταση R . Όταν ξεπεράσουμε ένα κατώφλι θετικής τάσης η διάοδος μπορεί να περάσει πολύ μεγάλο ρεύμα και επομένως λειτουργεί ως μία πολύ μικρή αντίσταση.

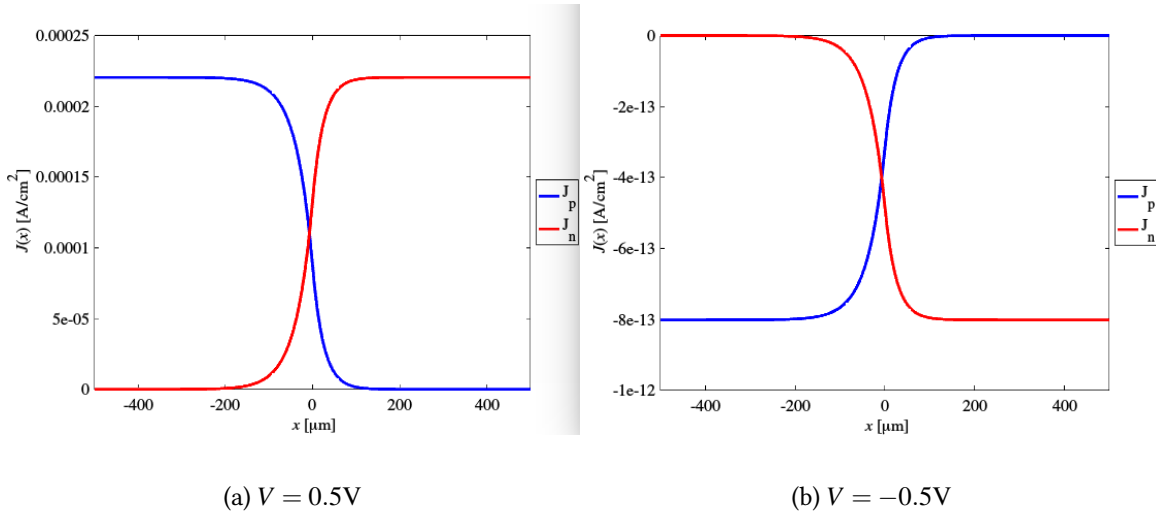
Μπορούμε πολύ απλά να δούμε τι συμβαίνει όταν έχουμε τάση μικρότερη των 0.7V χρησιμοποιώντας πάλι τον κώδικα του listing 4.3 αλλάζοντας την τιμή της μεταβλητής V του OCTAVE στην γραμμή 22. Στην εικόνα 4.12a βλέπουμε τα ρεύματα J_n και J_p όταν η τάση στα άκρα της διάοδος είναι ίση με $V = 0.5V$. Τα ρεύματα έχουν παρόμοια κατανομή όπως και στην εικόνα 4.10 αλλά έχουν πολύ μικρότερη τιμή. Η σαφώς μικρότερη τιμή του ρεύματος οφείλεται στο ότι η διαφορά μεταξύ των άκρων E_c και E_v στις δύο περιοχές που σύμφωνα με την εικόνα 4.8c ισούται με $q(V_{bi} - V)$ είναι τώρα μεγαλύτερη από ότι όταν $V = 0.7V$ και επομένως οι φορείς δυσκολεύονται στην μετακίνηση τους. Στην εικόνα 4.12b βλέπουμε τι συμβαίνει όταν η τάση στα άκρα της διάοδος είναι ίση με $V = -0.5V$. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι τώρα τα ρεύματα είναι πολύ μικρά και αρνητικά. Στην περίπτωση αυτή και σύμφωνα με την εικόνα 4.8b η διαφορά στις ενεργειακές στάθμες είναι ακόμα μεγαλύτερη με αποτέλεσμα να μην μπορούν ηλεκτρόνια από την περιοχή N να μετακινηθούν στην περιοχή P ή οπές από την περιοχή P να μετακινηθούν στην περιοχή N. Το μόνο ρεύμα που υποστηρίζεται είναι το ρεύμα των ηλεκτρονίων στην περιοχή P που μετακινούνται στην περιοχή N και των οπών στην περιοχή N που μετακινούνται στην P. Επειδή όμως και στις δύο περιπτώσεις οι φορείς αυτοί είναι πολύ λίγοι το ρεύμα που υποστηρίζεται είναι αμελητέο και επειδή οι φορείς κινούνται αντίθετα από ότι πριν, έχει αρνητικό πρόσημο.



Εικόνα 4.11: Σχέση ρεύματος-τάσης της διόδου

4.7 Το βασικό κύκλωμα RD

Είναι καιρός να αφήσουμε τον μικρόκοσμο (φορείς, προσμίξεις, κτλ) και να γυρίσουμε στα κυκλώματα. Στην εικόνα 4.13 βλέπουμε το πρώτο μας κύκλωμα με δίοδο. Η δίοδος συμβολίζεται με ένα βέλος που πηγαίνει από την περιοχή P στην περιοχή N, δηλαδή μας δείχνει πως πηγαίνει η συμβατική φορά του ρεύματος i_D όταν έχουμε ορθή πόλωση. Η δίοδος ευνοεί την ροή ρεύματος από το P στο N και αντιστέκεται στην αντίθετη φορά. Εδώ έχουμε μία πηγή τάσης η οποία μάλιστα είναι εναλλασσόμενη και επομένως το πρόσημο της τάσης εναλλάσσεται. Στην εικόνα 4.13a η φορά της τάσης τείνει να δημιουργήσει ρεύμα i_D προς τη φορά που ευνοεί η δίοδος και στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η δίοδος είναι *πολωμένη ορθά*. Εδώ περιμένουμε το ρεύμα i_D να είναι μεγάλο. Στην εικόνα 4.13b δείχνουμε την περίπτωση όπου η πηγή έχει ανάστροφη φορά και το ρεύμα που τείνει να δημιουργηθεί είναι αντίθετο προς την φορά που ευνοεί η δίοδος. Επομένως στην περίπτωση αυτή περιμένουμε να έχουμε πολύ μικρό ρεύμα και λέμε πως η δίοδος είναι *πολωμένη ανάστροφα*. Στην εικόνα 4.14 βλέπουμε την ανάλυση του κυκλώματος RD στο LT-SPICE. Η εικόνα 4.13 δείχνει πως έχουμε υλοποιήσει το κύκλωμα στο LT-SPICE ενώ η εικόνα 4.14b δείχνει τις κυματομορφές τάσης στα διάφορα σημεία του κυκλώματος. Για την δίοδο επιλέξαμε το μοντέλο του LT-SPICE, 1N914 που αντιστοιχεί σε μία δίοδο πυριτίου. Πρόκειται για δημοφιλή τύπο διόδου που διατίθεται στο εμπόριο. Η γκρι κυματομορφή αντιστοιχεί στην τάση εισόδου και είναι μία απλή συνημιτονοειδής τάση με πλάτος 3V και συχνότητα 160KHz. Η κόκκινη κυματομορφή αντιστοιχεί στην τάση στα άκρα της διόδου. Εδώ βλέπουμε κάτι πολύ ενδιαφέρον. Όταν η τάση εισόδου είναι αρνητική, η τάση της διόδου ακολουθεί πολύ πιστά την τάση εισόδου καθώς συμπίπτουν στο διάγραμμα. Μόλις η τάση εισόδου όμως περάσει μία συγκεκριμένη στάθμη περίπου ίση με 0.7V τότε η τάση στα άκρα της διόδου σχεδόν σταθεροποιείται στα 0.7V. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να ερμηνευθεί ποιοτικά από την εικόνα 4.11. Όταν η δίοδος είναι πολωμένη ανάστροφα, δηλαδή η τάση εισόδου είναι αρνητική, το ρεύμα που περνάει από



Εικόνα 4.12: Τα ρεύματα J_n και J_p για διαφορετικές τιμές τάσης V .

την διάοδο είναι αμελητέο και επομένως όπως είχαμε αναφέρει, η διάοδος παρουσιάζει μία μεγάλη αντίσταση R_D η οποία είναι σε σειρά με μία αντίσταση $R_1 = 50\Omega$. Είναι λοιπόν φυσικό η μεγάλη αντίσταση να τραβήξει όλη τη τάση που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα και επομένως σε αρνητικές τάσεις η τάση της διάοδος θα είναι ίση με την τάση της πηγής. Η τάση στα άκρα της αντίστασης R_1 είναι σχεδόν ίση με μηδέν. Στην εικόνα 4.11 το ρεύμα συνεχίζει να είναι αμελητέο για μικρές θετικές τιμές τάσης, ωστόσο από μία τιμή και έπειτα αυξάνει κατακόρυφα. Στην περιοχή αυτή, κοντά στα $0.7 - 0.8V$ η διάοδος διατηρεί σχεδόν σταθερή τάση στα άκρα της και δεν ξεφεύγει από τα $0.7 - 0.8V$. Στην περίπτωση αυτή όλη η υπόλοιπη τάση της πηγής πηγαίνει στην αντίσταση R_1 . Επομένως όπως δείχνει και η εικόνα 4.14 όταν η τάση εισόδου είναι θετικότερη των $0.7 - 0.8V$ η τάση της πηγής μεταφέρεται επί της ουσίας πάνω στην R_1 μείον την πτώση τάσης της διάοδος που είναι $0.7 - 0.8V$. Συνοψίζοντας:

- Όταν η τάση v_{IN} είναι θετική και μεγαλύτερη από $0.7 - 0.8V$, τότε η διάοδος άγει και η τάση v_R πάνω στην αντίσταση είναι ίση με την v_{IN} μείον $\cong 0.7 - 0.8V$.
- Όταν η τάση v_{IN} είναι αρνητική τότε η διάοδος δεν άγει και η τάση v_R πάνω στην αντίσταση είναι σχεδόν ίση με μηδέν.

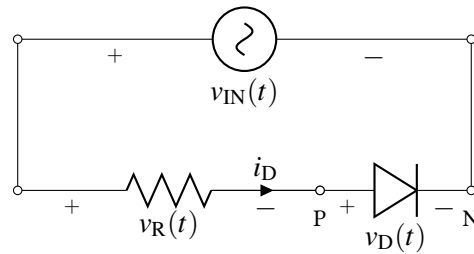
Υπό μία έννοια το κύκλωμα RD αφήνει να περάσουν μόνο οι θετικές τιμές της τάσης στην αντίσταση R ενώ κόβει τις αρνητικές. Στην ηλεκτρονική, λέμε ότι το κύκλωμα κάνει *απλή ανόρθωση*. Υπάρχει τρόπος να εξηγήσουμε την συμπεριφορά αυτή; Η πρώτη σκέψη που έχουμε είναι να εφαρμόσουμε τον νόμο του Kirchhoff για τις τάσεις οπότε $v_{IN}(t) = v_R(t) + v_D(t)$ και να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τόσο η αντίσταση όσο και η διάοδος διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα,

$$i_D = \frac{v_R}{R} = \frac{v_{IN} - v_D}{R} = I_S (e^{q v_D / (kT)} - 1) \quad (4.57)$$

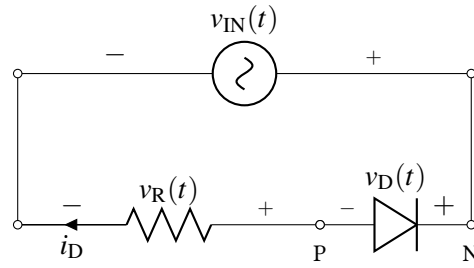
όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (4.56) και για συντομία έχουμε ορίσει την παράμετρο,

$$I_S = q n_i^2 S \left(\frac{D_n}{N_a L_n} + \frac{D_p}{N_d L_p} \right) \quad (4.58)$$

Παρατηρώντας την (4.57) αναγνωρίζουμε το πρόβλημα: έχουμε σε μία εξίσωση με την άγνωστη



(a) Ορθή πόλωση



(b) Ανάστροφη πόλωση

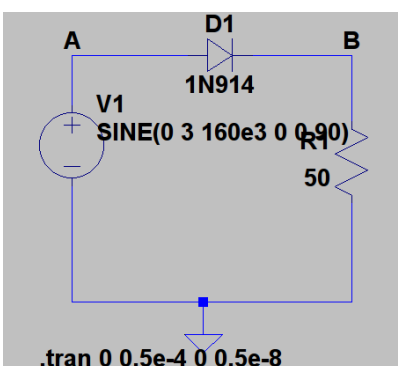
Εικόνα 4.13: Ένα κύκλωμα RD

τάση v_D στο αριστερό μέλος και στο δεξί μέλος την ίδια τάση στον εκθέτη. Δεν υπάρχει επομένως εύκολος τρόπος να υπολογίσουμε την v_D με μαθηματικό τρόπο.

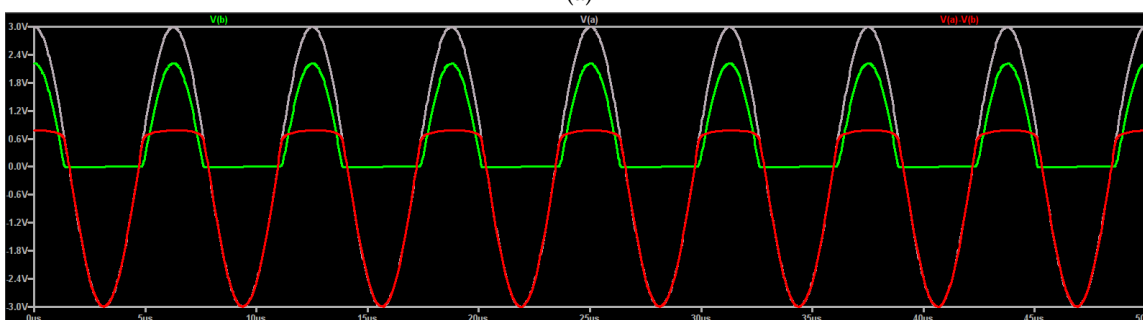
Στην περίπτωση αυτή οι ηλεκτρονικοί καταφεύγουν πολλές φορές σε αυτό που λέμε την *γραφική μέθοδο*. Προσπαθούμε δηλαδή να υπολογίσουμε "στο περίπου" τι συμβαίνει ζωγραφίζοντας την χαρακτηριστική της διόδου όπως αυτή της εικόνας 4.11. Στην εικόνα 4.15 έχουμε απεικονίσει (στο περίπου...) την χαρακτηριστική με κόκκινο χρώμα. Οι υπόλοιπες γραφικές αντιστοιχούν στον νόμο του Kirchhoff,

$$i_D R + v_D - v_{IN} = 0 \quad (4.59)$$

Η (4.59) αναπαρίσταται σε ένα σύστημα συντεταγμένων (v_D, i_D) ως μία ευθεία η οποία περνάει από τα σημεία $(0, v_{IN}/R)$ και $(v_{IN}, 0)$. Στην ηλεκτρονική η ευθεία αυτή ονομάζεται *ευθεία φόρτου*. Για να βρούμε την τάση v_D στα άκρα της διόδου και το ρεύμα i_D θα πρέπει να ικανοποιηθεί και ο νόμος του Kirchhoff στην (4.59) και η χαρακτηριστική της διόδου. Επομένως αναζητούμε το *σημείο τομής* των δύο γραφικών παραστάσεων. Αν για μία συγκεκριμένη τιμή της τάσης $v_{IN} > 0$ ο νόμος του Kirchhoff αντιστοιχεί στην μπλε ευθεία του σχήματος, τότε το σημείο τομής είναι το A_1 . Για να βρούμε την τάση και το ρεύμα στα άκρα της διόδου απλά υπολογίζουμε τις συντεταγμένες (v_1, i_1) του σημείου A_1 . Ας φανταστούμε τώρα τι συμβαίνει όταν η τάση v_{IN} αυξάνει. Τότε τα σημεία τομής της ευθείας φόρτου $(0, v_{IN}/R)$ και $(v_{IN}, 0)$ μετακινούνται πιο ψηλά στον άξονα των i_D και δεξιότερα στον άξονα των v_D αντίστοιχα. Η νέα ευθεία φόρτου είναι τώρα ζωγραφισμένη με πράσινο χρώμα, ενώ το σημείο τομής έχει μετακινηθεί από το A_1 στο A_2 που έχει συντεταγμένες (v_2, i_2) . Αν δει κανείς το διάγραμμα της εικόνας 4.15 θα δεις ότι κατά την μετάβαση από το A_1 στο A_2 το ρεύμα αυξάνεται σημαντικά ενώ η τάση αυξάνει λιγότερο εξαιτίας του ότι η κόκκινη καμπύλη που περιγράφει την χαρακτηριστική της διόδου ανεβαίνει απότομα (επομένως μικρές μεταβολές στην τάση συνεπάγονται μεγάλες μεταβολές ρεύματος). Εξαιτίας μάλιστα της εκθετικής αύξησης του ρεύματος όπως αυτή περιγράφεται από την εξίσωση (4.57) η



(a)



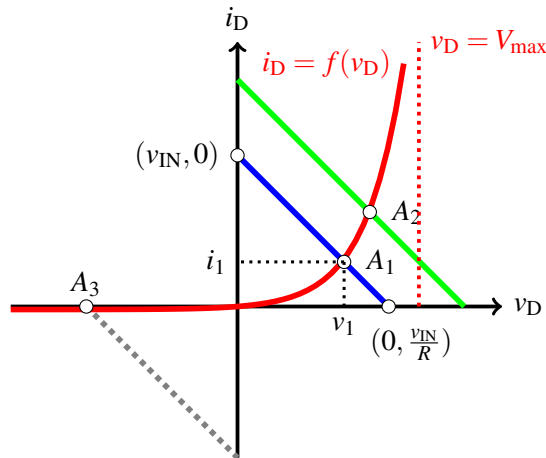
(b)

Εικόνα 4.14: Το κύκλωμα RD στο LT-SPICE

αύξηση του ρεύματος γίνεται όλο και πιο απότομη με αποτέλεσμα στην πράξη, η τάση στα άκρα της διάοδος δύσκολα να μπορεί να ξεπεράσει μία μέγιστη τιμή V_{\max} , καθώς στην περίπτωση αυτή το ρεύμα θα είναι τόσο μεγάλο που θα κάψει την διάοδο. Η ύπαρξη της αντίστασης που συνδέουμε σε σειρά με την πηγή τάσης, εξασφαλίζει ότι η διάοδος δεν θα καεί όταν η πηγή ξεπεράσει την τάση $v_{IN} \geq V_{\max}$. Στην περίπτωση αυτή η αντίσταση θα επωμιστεί την πλεονάζουσα τάση. Για το λόγο αυτό, έχουμε την συμπεριφορά που βλέπουμε στις θετικές τάσεις v_{IN} .

Στις αρνητικές τάσεις $v_D < 0$ η καμπύλη της διάοδος (κόκκινη καμπύλη) είναι πολύ κοντά στον οριζόντιο άξονα των v_D . Όταν $v_{IN} < 0$ η ευθεία φόρτου θα είναι όπως δείχνει η γκρι διακεκομμένη ευθεία στην εικόνα 4.15. Επομένως το σημείο τομής των δύο καμπυλών A_3 με συντεταγμένες (v_3, i_3) είναι σχεδόν πάνω στον άξονα των v_D . Η ευθεία φόρτου τέμνει τον άξονα των v_D στο σημείο $(v_{IN}, 0)$ το οποίο v_{IN} είναι τώρα αρνητικό. Εφόσον το A_3 ταυτίζεται σχεδόν με αυτό το σημείο θα έχουμε ότι η τάση στα άκρα της διάοδος θα είναι $v_D = v_3 \cong v_{IN}$ και επομένως όταν $v_{IN} < 0$ όλη η τάση εισόδου θα πηγαίνει πάνω στην διάοδο και η πτώση τάσης πάνω στην αντίσταση θα είναι μηδέν. Αυτό εξηγεί την συμπεριφορά που βλέπουμε στην εικόνα 4.14b για αρνητικές τάσεις εισόδου. Συνοψίζοντας:

- όταν το v_{IN} είναι μεγαλύτερο από μία τάση $V_{\text{thr}} = 0.7 - 0.8V$ τότε η τάση πάνω στην αντίσταση ισούται προσεγγιστικά με $v_{IN} - V_{\text{thr}}$.
- όταν το v_{IN} είναι μικρότερο από μία τάση $V_{\text{thr}} = 0.7 - 0.8V$ τότε η τάση πάνω στην αντίσταση ισούται πρακτικά με μηδέν.



Εικόνα 4.15: Ανάλυση του κυκλώματος RD μέσω της γραφικής μεθόδου.

δηλαδή:

$$v_R = \begin{cases} v_{IN} - V_{thr}, & \text{όταν } v_{IN} \geq V_{thr} \\ 0, & \text{όταν } v_{IN} < V_{thr} \end{cases} \quad (4.60)$$

4.8 Ανάλυση μικρού σήματος

Στην ενότητα αυτή θα δούμε ένα παράδειγμα της εφαρμογής της ανάλυσης μικρού σήματος που μας βοηθάει στην απλοποίηση της ανάλυσης των κυκλωμάτων σε περιπτώσεις όπως αυτές του κυκλώματος RD όπου δεν μπορούμε να βρούμε με μαθηματικό τρόπο αναλυτικές ακριβείς λύσεις που περιγράφουν την λειτουργία του κυκλώματος. Η ανάλυση μικρού σήματος υποθέτει ότι το συνολικό σήμα (π.χ. σήμα τάσης, ρεύματος κτλ) είναι ένα άθροισμα μίας μεγάλης συνεχούς (δηλαδή σταθερής με το χρόνο συνιστώσας) και μίας εναλλασσόμενης δηλαδή μεταβαλλόμενης με το χρόνο συνιστώσας η οποία είναι πολύ μικρότερη από την συνεχή συνιστώσα. Από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιούμε την εξής αναπαράσταση των μεγεθών:

- *Συνεχείς* (DC) συνιστώσες αναπαρίστανται με κεφαλαίο γράμμα και κεφαλαίους δείκτες, π.χ. I_D , V_S , V_{BE} .
- *Εναλλασσόμενες* (AC) συνιστώσες αναπαρίστανται με μικρό γράμμα και μικρούς δείκτες, π.χ. i_d , v_s , v_{be} .
- *Τα συνολικά σήματα* (AC+DC) αναπαρίστανται με μικρό γράμμα και κεφαλαίους δείκτες, π.χ. i_D , v_S , v_{BE} .

Δεδομένου ότι το συνολικό σήμα ισούται με το άθροισμα της AC και της DC συνιστώσας, θα έχουμε $i_D = i_d + I_D$, $v_S = v_s + V_S$ και $v_{BE} = v_{be} + V_{BE}$.

Στην περίπτωση της διόδου, αν υποθέσουμε ότι τάση στα άκρα της διόδου v_D είναι το άθροισμα μίας μεγάλης DC τάσης V_D και μίας μικρής AC συνιστώσας, v_d δηλαδή $v_D = V_D + v_d$ θα έχουμε από την (4.57):

$$i_D = I_S (e^{q(v_d + V_D)/(kT)} - 1) = I_S (e^{qv_d/(kT)} e^{qV_D/(kT)} - 1) \quad (4.61)$$

Στην (4.61) θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $e^x \cong 1 + x$ που ισχύει για πολύ μικρά x . Για παράδειγμα για $x = 0.1$ θα έχουμε $e^{0.1} = 1.1052$ και $1 + x = 1.1$ οπότε η προσέγγιση ισχύει μέχρι

το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο. Για ακόμα μικρότερα x η προσέγγιση είναι ακόμα καλύτερη. Για μεγαλύτερα x αρχίζουμε να έχουμε αποκλίσεις, για παράδειγμα όταν $x = 0.4$ θα έχουμε, $e^{0.4} = 1.4918$ ενώ $1 + x = 1.4$ οπότε η διαφορά είναι πλέον στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο. Αν υποθέσουμε επομένως ότι $qv_d/(kT) \leq 0.1$ τότε θα έχουμε,

$$e^{qv_d/(kT)} \cong 1 + \frac{qv_d}{kT} \quad (4.62)$$

Αντικαθιστώντας την (4.62) στην (4.61) θα έχουμε:

$$i_D = I_S(e^{qV_D/(kT)} - 1) + v_d \frac{qI_S}{kT} e^{qV_D/(kT)} \quad (4.63)$$

Στην σχέση (4.63) μπορούμε να δούμε ότι ο πρώτος όρος $I_S(e^{qV_D/(kT)} - 1)$ είναι στην ουσία η τιμή του ρεύματος όταν δεν έχουμε καθόλου AC συνιστώσα ($v_d = 0$). Οπότε είναι η DC συνιστώσα του ρεύματος I_D ,

$$I_D = I_S(e^{qV_D/(kT)} - 1) \quad (4.64)$$

και η σχέση (4.63) γράφεται:

$$i_D = I_D + \frac{v_d}{r_d} \quad (4.65)$$

όπου έχουμε ορίσει την παράμετρο r_d ως εξής:

$$\frac{1}{r_d} = \frac{qI_S}{kT} e^{qV_D/(kT)} \quad (4.66)$$

Δεδομένου ότι $i_D = i_d + I_D$ θα έχουμε,

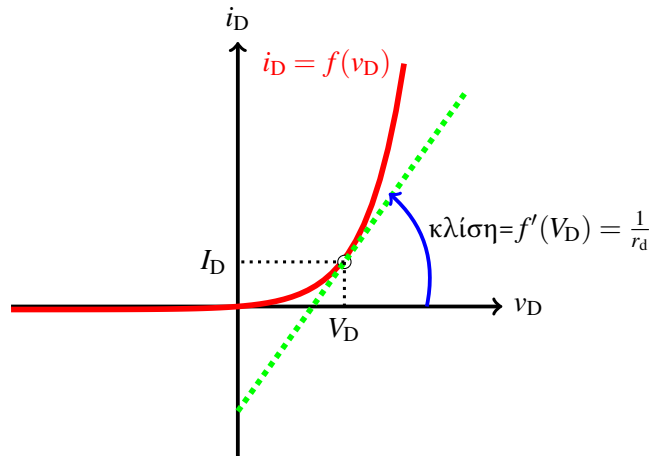
$$i_d = i_D - I_D = \frac{v_d}{r_d} \quad (4.67)$$

Επομένως, οι μικρές μεταβολές της τάσης v_d γύρω από μία μεγάλη DC τιμή V_D και οι μεταβολές του ρεύματος i_d γύρω από την DC του τιμή, I_D σχετίζονται με έναν νόμο του Ohm σύμφωνα με την (4.67). Η διάοδος σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αντικατασταθεί από μία αντίσταση. Θα μπορούσαμε όσο και αν φαίνεται περίεργο να κάνουμε μία παρόμοια ανάλυση και σε οποιοδήποτε άλλο ηλεκτρονικό στοιχείο X διέπεται από μία σχέση της μορφής $i_X = f(v_X)$. Στα μαθηματικά υπάρχει το θεώρημα του Taylor που μας λέει ότι μία οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί ως άθροισμα όλων των παραγώγων της σε ένα σημείο x_0 αρκεί να υπάρχουν βέβαια αυτοί οι παράγωγοι. Μπορούμε να γράψουμε,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (4.68)$$

όπου με $n!$ συμβολίζουμε το παραγοντικό του n , δηλαδή $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots 2 \times 1$ και με $g^{(n)}(x_0)$ την $n^{\text{οστή}}$ παράγωγο της $g(x)$ στο $x = x_0$. Αν υποθέσουμε ότι το x είναι αρκετά κοντά στο x_0 τότε όπως είδαμε και στην περίπτωση του εκθετικού στην σχέση (4.62), οι όροι υψηλότερης τάξης $(x - x_0)^2$, $(x - x_0)^3$ κτλ θα είναι αμελητέοι σε σχέση με τον όρο $(x - x_0)$ στην (4.68). Επομένως στην περίπτωση αυτή θα έχουμε,

$$g(x) \cong g(x_0) + g^{(1)}(x_0)(x - x_0) \quad (4.69)$$

Εικόνα 4.16: Ερμηνεία της αντίστασης r_d .

Στην περίπτωση της σχέσης $i_X = f(v_X)$ θέτουμε $x_0 = V_X$ και $x = v_X$ οπότε η 4.69 γράφεται,

$$i_X = i(v_X) \cong f(V_D) + f^{(1)}(V_X)(v_X - V_X) = I_X + v_X f^{(1)}(V_X) \quad (4.70)$$

Από την (4.70) προκύπτει ότι,

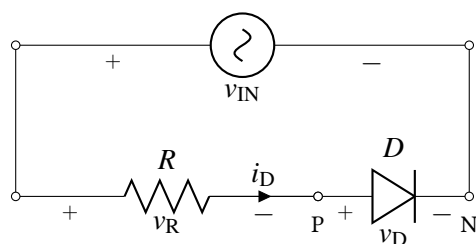
$$i_x = i_X - I_X = v_X f^{(1)}(V_X) = \frac{v_X}{r_x} \quad (4.71)$$

όπου έχουμε θέσει την αντίσταση r_x ,

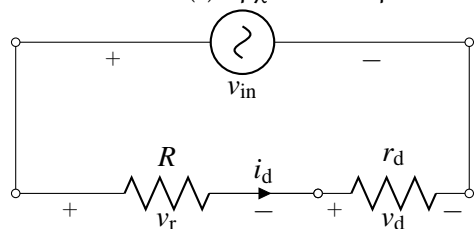
$$\frac{1}{r_x} = f^{(1)}(V_X) \quad (4.72)$$

Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι στην περίπτωση της διόδου όπου η $f(v_D)$ δίνεται από την (4.63) η αντίσταση $r_x = r_d$ καθορίζεται από την (4.66). Η αντίσταση r_x είναι η αντίσταση που περιγράφει το στοιχείο για τα AC σήματα και ονομάζεται *AC αντίσταση*. Θα δούμε στη συνέχεια πως η AC αντίσταση r_d της διόδου βοηθάει στην ανάλυση του κυκλώματος. Πριν το κάνουμε όμως αυτό αξίζει να ερμηνεύσουμε σχηματικά την r_x . Στην εικόνα 4.16 δείχνουμε την γεωμετρική ερμηνεία του αντιστρόφου $\frac{1}{r_d}$ στην περίπτωση της διόδου. Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε η παράγωγος $f^{(1)}(V_D) = f'(V_D) = \frac{1}{r_d}$ είναι η κλίση της συνάρτησης στο σημείο (V_D, I_D) (δηλαδή η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό) που εικονίζεται στην εικόνα 4.16 με πράσινη διακεκομμένη γραμμή.

Έχοντας υπόψη ότι το $\frac{1}{r_d}$ προκύπτει από την κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο λειτουργίας (V_D, I_D) μπορούμε να καταλάβουμε ότι αν αυτό βρίσκεται στην περιοχή όπου το ρεύμα αυξάνει κατακόρυφα (ελαφρώς θετικές τιμές τάσης v_D) τότε η κλίση $\frac{1}{r_d}$ θα είναι μεγάλη και επομένως το r_d ενώ στην περίπτωση της ανάστροφης πόλωσης (αρνητικά v_D) τότε ρεύμα δεν μεταβάλλεται πρακτικά με την τάση και η κλίση της εφαπτόμενης είναι σχεδόν ίση με μηδέν άρα το r_d πολύ μεγάλο. Στην εικόνα 4.17 δείχνουμε την εφαρμογή της σχέσης (4.67). Στο αρχικό μας κύκλωμα στην εικόνα 4.17a έχουμε την διόδο D και την αντίσταση R συνδεδεμένες σε σειρά. Στα άκρα τους εφαρμόζεται η τάση v_{IN} που περιέχει AC και DC συνιστώσες. Σε αυτή την μορφή του δεν έχουμε και πολλά να πράγματα για το κύκλωμα και το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι μία



(a) Αρχικό κύκλωμα



(b) AC ισοδύναμο

Εικόνα 4.17: Ένα κύκλωμα RD

γραφική ανάλυση ή να χρησιμοποιήσουμε το LT-SPICE όπως κάναμε στην ενότητα 4.7. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο εκθετικός νόμος που διέπει την σχέση ρεύματος-τάσης (4.57) δεν βοηθάει στην απευθείας επίλυση του νόμων του Kirchoff. Στην εικόνα 4.17b δείχνουμε το AC ισοδύναμο του κυκλώματος, δηλαδή το κύκλωμα που "βλέπουν" τα AC σήματα. Για το λόγο αυτό οι συνιστώσες του ρεύματος και της τάσης, όπως το i_D και το v_{IN} έχουν αντικατασταθεί από τις AC συνιστώσες τους, i_d και v_{in} . Όπως βλέπετε η διάοδος έχει αντικατασταθεί από μία αντίσταση r_d . Αυτό συμβαίνει επειδή για το AC κύκλωμα η διάοδος είναι πλέον μία απλή αντίσταση. Βλέπουμε επομένως ότι το AC ισοδύναμο του κυκλώματος RD είναι ένας απλός διαιρέτης τάσης. Στο listing 4.4 υπολογίζουμε την αντίσταση r_d που αντιστοιχεί σε μία διάοδο ανάλογα με την τάση στα άκρα της, χρησιμοποιώντας το OCTAVE και την εξίσωση 4.57.

```

1 % Calculation of diode AC resistance
2
3 close all;
4 clear all;
5 clc
6
7 % Constants
8 me=9.1e-31; % Free electron mass (Kg)
9 mn=0.26*me; % Effective electron mass for Si (Kg)
10 mp=0.39*me; % Effective hole mass for Si (Kg)
11 k=1.38e-23; % Boltzmann constant (m^2/Kg^2/K)
12 T=300; % temperature (Kelvin)
13 h=6.626e-34; % Planck's constant (m^2*Kg/s)
14 Na_cm3=1e17; % Acceptor concentration values (cm^-3)
15 Nd_cm3=1e17; % Donor concentration values (cm^-3)
16 q=1.609e-19; % Electron charge
17 er=12; % relative dielectric constant of silicon
18 V=-0.5; % Forward voltage [V]
19 tau=1e-6; % Recombination rate [s]
20 S_cm2=1e-4; % diode cross-section [cm^2]
21 EgeV=1.1; % Gap length [eV]
22
23 % Unit conversion

```

```

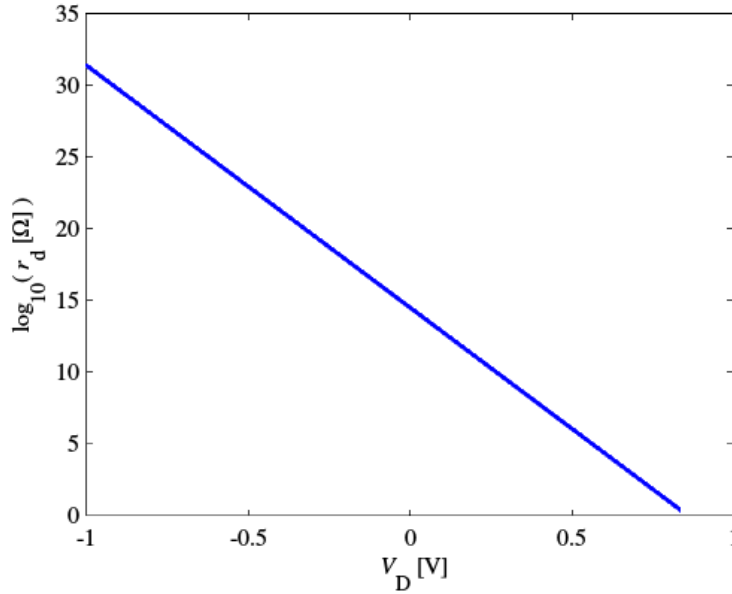
24 Na=Na_cm3*1e6;           % Convert to m^(-3)
25 Nd=Nd_cm3*1e6;
26 S=S_cm2/1e4;           % m^2
27 Eg=EgeV*q;             % J
28
29 % carrier mobilities
30 mu_n_cm2=1318/ (1 +((Na_cm3+Nd_cm3)*1e-17)^0.85) + 92;
31 mu_p_cm2=420 / (1 +((Na_cm3+Nd_cm3)*0.625*1e-17)^0.7) + 50;
32 mu_n=mu_n_cm2*1e-4;
33 mu_p=mu_p_cm2*1e-4;
34
35 % Diffusion coefficients
36 Dn=mu_n*k*T/q;
37 Dp=mu_p*k*T/q;
38
39 % Estimate effective density of states
40 Nc=2.8e25;
41 Nv=1.04e25;
42
43 % Calculate intrinsic carrier level
44 ni=sqrt(Nc*Nv)*exp(-Eg/(2*k*T));
45
46 % Calculate builtin voltage
47 VbiV=k*T/q*log(Na*Nd/ni^2);
48
49 % Voltages for the diode characteristic
50 VV=-1:0.001:VbiV;
51
52 % Diffusion lengths
53 Ln=sqrt(Dn*tau);
54 Lp=sqrt(Dp*tau);
55
56 % Diode characteristics
57 Js=q*ni^2*Dp/Nd/Lp+q*ni^2*Dn/Na/Ln;
58 iD=S*Js*(exp(q*VV/k/T)-1);
59 rd=1./(q*S*Js/(k*T)*exp(q*VV/k/T));
60
61 figure(1);
62 plot(VV,iD/1e-3,'LineWidth',3);
63 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
64 xlabel('\it v\rm_D [V]');
65 ylabel('\it i\rm_D [mA]');
66
67 figure(2);
68 plot(VV,log10(rd),'LineWidth',3);
69 set(gca,'FontSize',16,'FontName','Free Serif');
70 xlabel('\it V\rm_D [V]');
71 ylabel('\log_{10}(\it r\rm_d [\Omega])');

```

Listing 4.4: Το αρχείο dioderesistance.m

Στην εικόνα 4.18 έχουμε παραστήσει γραφικά την r_d για τις διάφορες τιμές της τάσης V_D όπως προκύπτει από το listing 4.4. Παρατηρούμε ότι για αρνητικές τιμές, η r_d είναι τεράστια φτάνοντας $10^{31} \Omega$ (!) όταν $V_D = -1V$. Όταν ωστόσο η τάση είναι θετική, η αντίσταση είναι πολύ μικρότερη και γίνεται της τάξης των μερικών Ω όταν η τάση είναι κοντά στα $V_D = 0.8V$. Αυτό είναι σύμφωνο και με την συμπεριφορά της διόδου όπως την γνωρίσαμε στην ενότητα 4.6 εφόσον στην πρώτη περίπτωση η διόδος είναι ανάστροφα πολωμένη (πολύ μεγάλη αντίσταση) ενώ στην δεύτερη είναι ορθά πολωμένη (μικρή αντίσταση) σύμφωνα και με αυτά που προκύπτουν από την γεωμετρική ερμηνεία του $\frac{1}{r_d}$ που συζητήσαμε και παραπάνω.

Εφόσον το AC κύκλωμα είναι ένας διαιρέτης τάσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση



Εικόνα 4.18: AC αντίσταση μίας διάοδος.

(1.4) για να βρούμε την AC τάση πάνω στην διάοδο,

$$v_d = \frac{r_d}{R + r_d} v_{in} \quad (4.73)$$

Η σχέση (4.73) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την τάση πάνω στην διάοδο αν ξέρουμε την τιμή της αντίστασης r_d . Ωστόσο θα πρέπει να σημειωθεί ότι η σχέση ισχύει για πολύ μικρά AC σήματα και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε άλλες περιπτώσεις.

4.9 Ανόρθωση με γέφυρα

Στην περίπτωση του απλού κυκλώματος RD που είδαμε στην ενότητα 4.7 η τάση πάνω στην αντίσταση v_R ακολουθούσε την τάση εισόδου v_{IN} μόνο στις θετικές τιμές της τάσης εισόδου, $v_{IN} > 0$. Στις αρνητικές ημιπεριόδους του v_{IN} η τάση πάνω στην αντίσταση ήταν πρακτικά μηδέν, $v_{IN} \cong 0$. Στην εξίσωση 1.16 είδαμε ότι η μέση ισχύς είναι ανάλογη του V_{RMS}^2 το οποίο σύμφωνα με την (1.19) εξαρτάται από το ολοκλήρωμα της τάσης στην διάρκεια μίας περιόδου. Στην περίπτωση του $v_{IN} = V_0 \sin(2\pi f_0 t)$ όπου έχουμε μία ημιτονοειδή τάση είδαμε ότι το V_{RMS} είναι ίσο με $V_0/\sqrt{2}$, σύμφωνα και με την σχέση (1.23). Στην περίπτωση του κυκλώματος RD μπορούμε, αν αγνοήσουμε την πτώση τάσης της τάξης των $V_{thr} = 0.7 - 0.8V$ στην σχέση (4.60), να θεωρήσουμε ότι η τάση πάνω στην αντίσταση δίνεται από την σχέση:

$$v_R = \begin{cases} v_{IN}, & \text{όταν } v_{IN} \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } v_{IN} < 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

Η σχέση (4.74) ισχύει όταν το πλάτος V_0 της v_{IN} είναι πολύ μεγαλύτερο του V_{thr} . Με αυτή την προσέγγιση είναι εύκολο να υπολογίσουμε την ενεργό τιμή της τάσης για το v_R . Η ενεργός τιμή

$V_{\text{RMS,R}}$ της v_{R} δίνεται από την σχέση:

$$V_{\text{RMS,R}}^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v_{\text{R}}^2 dt \quad (4.75)$$

Στην ουσία κάνουμε ότι κάναμε για την περίπτωση της $v_{\text{IN}} = V_0 \sin(2\pi f_0 t)$ μόνο που τώρα η τάση v_{R} είναι μηδενική στο διάστημα από $[T_0/2, T_0]$. Επομένως το ολοκλήρωμα $\int_0^{T_0} v_{\text{R}}^2 dt = \int_0^{T_0/2} v_{\text{R}}^2 dt$ είναι απλά το μισό του $\int_0^{T_0} v_{\text{IN}}^2 dt$ το οποίο δίνεται από την (1.22). Δηλαδή:

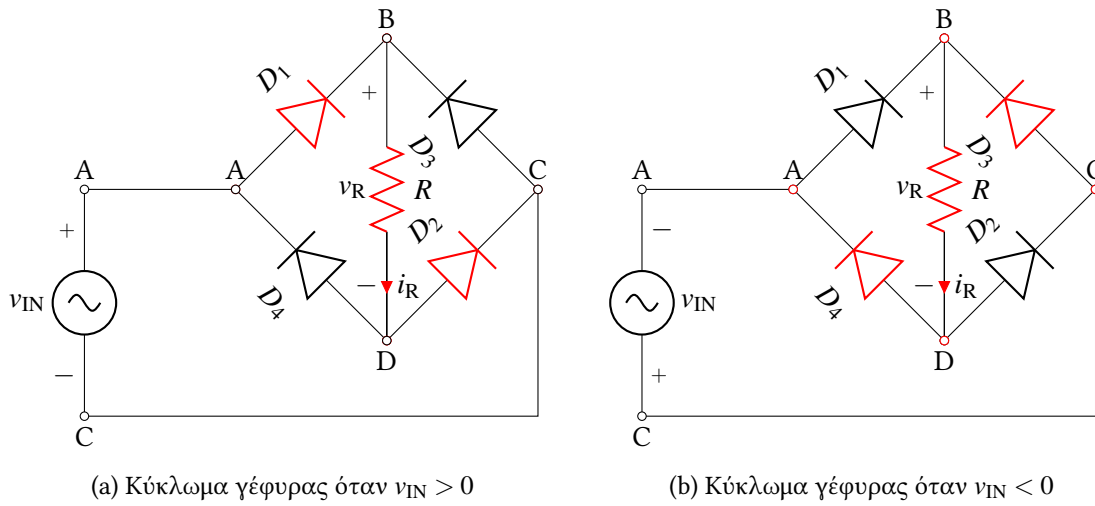
$$V_{\text{RMS,R}}^2 = \frac{V_0^2}{4} \quad (4.76)$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την *απόδοση ισχύος* $\eta = P_{\text{OUT}}/P_{\text{IN}}$ ως τον λόγο της μέσης ισχύος εξόδου P_{OUT} η οποία είναι $\frac{V_0^2}{4R}$ προς την μέση ισχύ της εισόδου $\frac{V_0^2}{2R}$ οπότε θα πάρουμε $\eta = \frac{1}{2}$. Δηλαδή όταν κάνουμε ανόρθωση με το κύκλωμα της ενότητας 4.7 χάνουμε περίπου την μισή ισχύ (Θα δούμε παρακάτω ότι στην πράξη χάνουμε ακόμα περισσότερη).

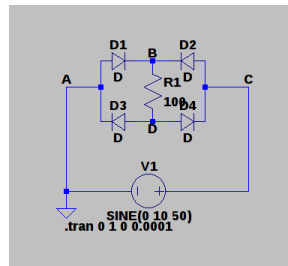
Στην εικόνα 4.19 δείχνουμε ένα εναλλακτικό κύκλωμα που κάνει *πλήρη* ανόρθωση. Στην βιβλιογραφία το κύκλωμα αυτό αναφέρεται ως γέφυρα διόδων και το συναντάμε πολύ συχνά στην πράξη. Η αρχή λειτουργίας του κυκλώματος είναι αρκετά ενδιαφέροντα. Ας θεωρήσουμε ότι η τάση στην είσοδο του κυκλώματος είναι $v_{\text{IN}} > 0$ όπως δείχνουμε στην εικόνα 4.19a. Τότε το σημείο A στο κύκλωμα έχει υψηλότερο δυναμικό από ότι το σημείο C και η πηγή v_{IN} τείνει να δημιουργήσει ρεύμα το οποίο θα ρέει από το A προς το C. Στο σημείο A υπάρχει μία διακλάδωση που δημιουργείται από τις διόδους D_1 και D_4 . Περιμένουμε ότι το δυναμικό στο σημείο B και στο σημείο D θα είναι *χαμηλότερο* από ότι στο σημείο A καθότι δεν υπάρχει άλλη πηγή τάσης στο κύκλωμα. Επομένως θα πρέπει η μεν D_1 να είναι ορθά πολωμένη ενώ η D_4 ανάστροφα πολωμένη και όλο το ρεύμα θα περάσει από την D_1 και θα φτάσει στο σημείο B. Στο σημείο B υπάρχει μία διακλάδωση και το ρεύμα έχει την δυνατότητα να πάει είτε στην αντίσταση R η οποία αποτελεί και την έξοδο του κυκλώματος είτε στην δίοδο D_3 . Ωστόσο επειδή το δυναμικό στο C είναι το χαμηλότερο δυναμικό στο κύκλωμα (αφού συνδέεται με το μείον της πηγής) έπεται ότι η D_3 θα είναι ανάστροφα πολωμένη και το σύνολο του ρεύματος θα κατευθυνθεί στην R και θα φτάσει στο σημείο D. Στο σημείο αυτό μπορεί να κατευθυνθεί είτε στο σημείο C μέσω της D_2 είτε στο σημείο μέσω της D_4 η οποία όμως είναι ανάστροφα πολωμένη αφού το δυναμικό στο A είναι μεγαλύτερο από ότι στο D. Καταλαβαίνουμε επομένως ότι κατευθύνεται όλο το ρεύμα θα κατευθυνθεί στο σημείο C μέσω της D_2 .

Στην εικόνα 4.19b δείχνουμε τι συμβαίνει όταν $v_{\text{IN}} < 0$. Με την ίδια λογική βλέπουμε ότι το ρεύμα περνάει από την D_3 μετά από την R και στο τέλος από την D_4 . Είναι όμως ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε την φορά του ρεύματος: είναι και στις δύο περιπτώσεις η ίδια, δηλαδή πάει από το B στο D. Αυτό σημαίνει ότι η τάση στα άκρα της αντίστασης θα έχει πάντα την ίδια φορά και θα ισούται με την τάση εισόδου v_{IN} μείον την πτώση τάσης σε δύο διόδους, στην περίπτωση της εικόνας 4.19a των διόδων D_1 και D_2 ενώ στην περίπτωση της εικόνας 4.19b των διόδων D_3 και D_4 .

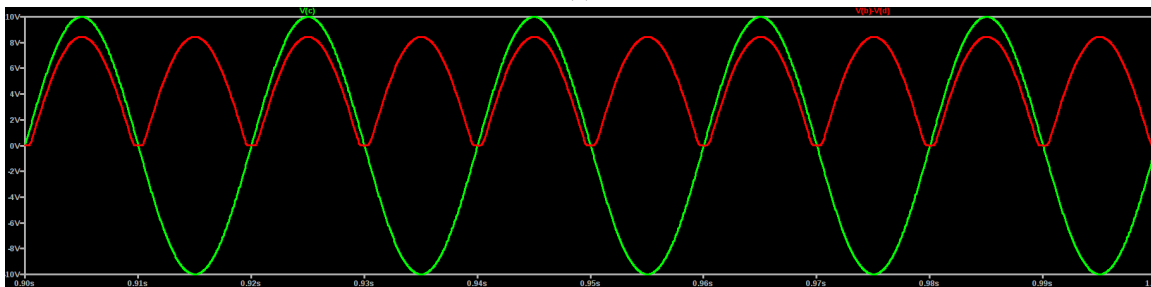
Στην εικόνα 4.20 δείχνουμε την προσομοίωση του κυκλώματος της γέφυρας στο LT-SPICE. Κάνουμε μία μεταβατική ανάλυση όπου στην είσοδο βάζουμε μία ημιτονοειδή τάση με πλάτος 10V και συχνότητα 50Hz. Στην εικόνα 4.20a δείχνουμε το κύκλωμα όπως έχει υλοποιηθεί στο LT-SPICE ενώ στην εικόνα 4.20b δείχνουμε τις κυματομορφές εισόδου (με πράσινο χρώμα) και εξόδου (με κόκκινο χρώμα). Βλέπουμε ότι η κυματομορφή εξόδου πάνω στην αντίσταση έχει πάντα θετικό πρόσημο και η μέγιστη τιμή της τάσης υπολείπεται κατά 1.6V της μέγιστης τάσης



Εικόνα 4.19: Ανόρθωση με γέφυρα.



(a)



(b)

Εικόνα 4.20: Το κύκλωμα γέφυρας στο LT-SPICE

εισόδου εξαιτίας της πτώσης τάσης πάνω στις διόδους. Παρατηρούμε επίσης ότι η τάση έχει σταθερό πρόσημο και είναι μη μηδενική και στις αρνητικές ημιοπεριόδους της τάσης εισόδου v_{IN} .

Αν θεωρήσουμε ότι η τάση εισόδου $v_{IN} = V_0 \cos(2\pi f_0 t)$ έχει μεγάλο πλάτος V_0 τότε μπορούμε να αγνοήσουμε σε πρώτη φάση την πτώση τάση πάνω στις διόδους. Στην περίπτωση αυτή η

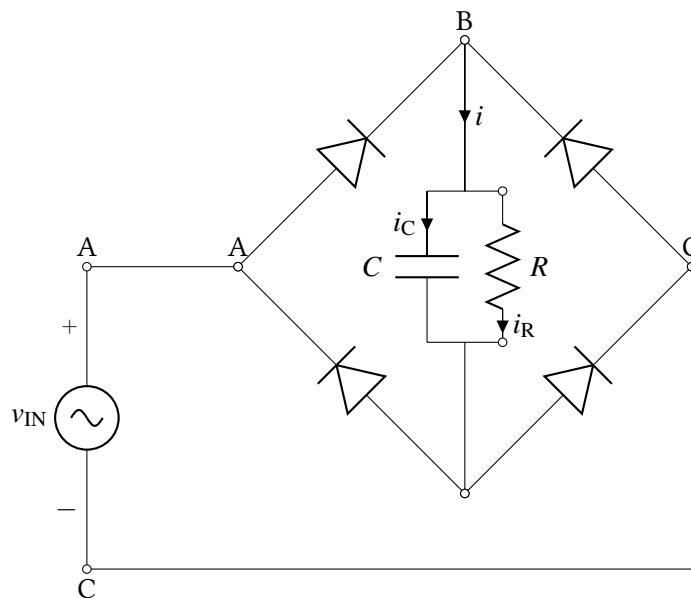
τάση εξόδου μπορεί απλά να προσεγγιστεί από την σχέση:

$$v_R = \begin{cases} v_{IN}, & \text{όταν } v_{IN} \geq 0 \\ -v_{IN}, & \text{όταν } v_{IN} < 0 \end{cases} = |v_{IN}| \quad (4.77)$$

ενώ το ρεύμα εξόδου θα δίνεται από την σχέση

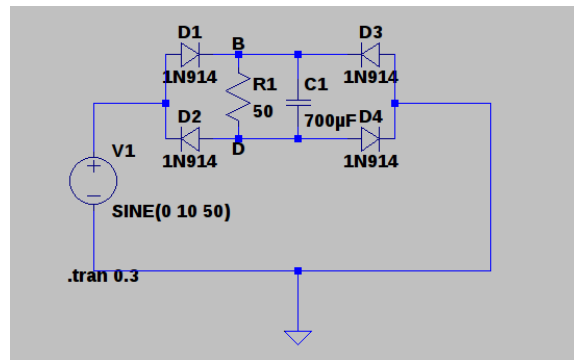
$$i_R \cong \frac{|v_{IN}|}{R} \quad (4.78)$$

οπότε όταν υπολογίζουμε την ενεργό τάση σύμφωνα με την (4.75) δεν θα χάνουμε την αρνητική ημιπερίοδο όπως κάναμε στην περίπτωση του απλού κυκλώματος RD οπότε η απόδοση η θα είναι ιδανικά ίση με μονάδα.

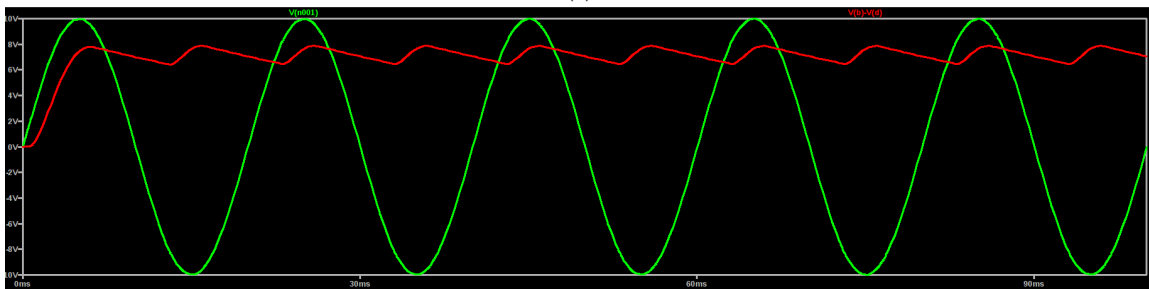


Εικόνα 4.21: Κύκλωμα γέφυρας με πυκνωτή εξομάλυνσης

Σε ένα πρακτικό κύκλωμα τροφοδοσίας δεν μας ενδιαφέρει βέβαια απλά η τάση να μην αλλάζει πρόσημο αλλά να παραμένει όσο το δυνατόν πιο σταθερή. Το πρώτο βήμα επομένως είναι να αφαιρέσουμε τις υψηλές συχνότητες του ρεύματος πάνω στην αντίσταση R . Για το σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα κύκλωμα πυκνωτή συνδεδεμένου παράλληλα με την αντίσταση που είδαμε στην ενότητα 2.8. Το κύκλωμα εμφανίζεται στην εικόνα 4.21. Είναι το κλασικό κύκλωμα γέφυρας διόδων μόνο που έχουμε προσθέσει έναν πυκνωτή παράλληλα με την αντίσταση. Στην εικόνα 4.22 βλέπουμε το κύκλωμα όπως το έχουμε υλοποιήσει στο LT-SPICE καθώς και τις κυματομορφές τάσης στην είσοδο και στην αντίσταση. Παρατηρούμε ότι η τάση πάνω στην αντίσταση παρουσιάζει τώρα μικρότερες διακυμάνσεις καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται με σχετικά αργό ρυθμό. Προσέξτε ότι έχουμε επιλέξει την τιμή της αντίστασης R και του πυκνωτή C έτσι ώστε η σταθερά χρόνου $f_{3dB} = 1/(2\pi RC)$ να είναι ίση με $f_{3dB} \cong 6.3\text{Hz}$ δηλαδή πολύ μικρότερη από την συχνότητα της πηγής δηλαδή 50Hz . Αυτό εγγυάται ότι ο ρυθμός εκφόρτισης του πυκνωτή θα είναι πολύ πιο αργός από τις μεταβολές της πηγής. Η τάση εξόδου στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο πυκνωτής *εξομαλύνει* την τάση.



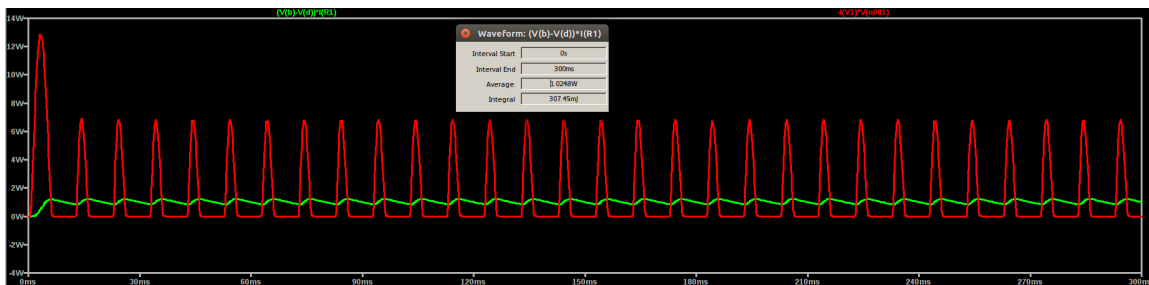
(a)



(b)

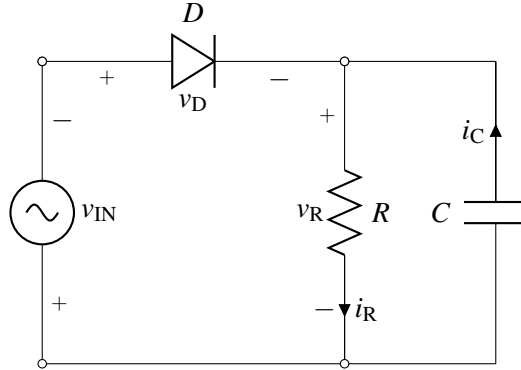
Εικόνα 4.22: Το κύκλωμα γέφυρας στο LT-SPICE

Πόση είναι η απόδοση του εν λόγω συστήματος η ; Δηλαδή από την ισχύ που παρέχουμε με την πηγή τάσης v_{IN} μετατρέπεται σε ωφέλιμη ισχύ πάνω στην αντίσταση R ; Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση ενέργεια στο LT-SPICE κάνοντας γραφική παράσταση της ισχύος εισόδου $v_{IN}i_{IN}$ και της ισχύος εξόδου $v_{R}i_{R}$ που στην περίπτωση του κυκλώματος στο LT-SPICE είναι οι κυματομορφές που δείχνουμε στην εικόνα 4.23. Πατώντας το πλήκτρο Ctrl και κάνοντας κλικ πάνω στο όνομα της πρώτης κυματομορφής βρίσκουμε ότι η μέση ισχύς εξόδου είναι 1.0248W ενώ η μέση ισχύς εισόδου είναι 1.4538W οπότε η απόδοση είναι $\eta = 1.0248/1.4538 = 0.704$ δηλαδή 70.4%.



Εικόνα 4.23: Υπολογισμός της ισχύος εισόδου και εξόδου στο κύκλωμα της γέφυρας διόδων.

Πόση είναι η καλύτερη δυνατή απόδοση που μπορούμε να πετύχουμε με την χρήση του πυκνωτή όταν κάνουμε χρήση του κυκλώματος απλής ανόρθωσης RD που δείχνουμε στην εικόνα 4.24 και με το κύκλωμα της γέφυρας στην εικόνα 4.21;



Εικόνα 4.24: Κύκλωμα RD με προσθήκη πυκνωτή.

Ας σκεφτούμε λίγο τι κάνει ο πυκνωτής στην απλούστερη περίπτωση του κυκλώματος στην εικόνα 4.21. Όπως είδαμε στην ενότητα 2.8, πάνω στην αντίσταση παραμένουν οι χαμηλές συχνότητες του ρεύματος. Αν θεωρήσουμε ότι η διόδος παρουσιάζει πολύ μικρή πτώση τάσης, $v_D \cong 0$, τότε χωρίς τον πυκνωτή ο ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση είναι:

$$i_R = \begin{cases} \frac{v_{IN}}{R}, & \text{όταν } v_{IN} \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } v_{IN} < 0 \end{cases} \quad (4.79)$$

Όπως είδαμε και στην σχέση 4.80 το σήμα μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier, σύμφωνα με την σχέση:

$$i_R(t) = \sum_k I_k e^{j2\pi f_k t} \quad (4.80)$$

Ιδανικά εμείς θα θέλαμε να κρατήσουμε μόνο τον όρο που αντιστοιχεί στο DC, δηλαδή στη συχνότητα $f_0 = 0\text{Hz}$. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει ο πυκνωτής μας να έχει πολύ μεγάλο RC έτσι ώστε το $f_{3\text{dB}} = 1/(2\pi RC)$. Αν υποθέσουμε ότι το γινόμενο RC είναι αρκετά μεγάλο ώστε τελικά πάνω στην αντίσταση θα απομένει η επιθυμητή συνιστώσα,

$$i_R(t) \cong I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (4.81)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.79) και την (4.81) θα έχουμε,

$$i_R(t) \cong \frac{1}{RT} \int_0^{T/2} v_{IN} dt = \frac{V_0}{RT} \int_0^{T/2} \sin(2\pi ft) dt \quad (4.82)$$

Δεδομένου ότι $\int \sin(at) dt = -\cos(at)/a$ και $f = 1/T$, θα έχουμε:

$$i_R(t) \cong \frac{V_0}{RT} \left(\frac{\cos(0) - \cos(\pi)}{2\pi f} \right) = \frac{V_0}{R\pi} \quad (4.83)$$

Η ισχύς εξόδου είναι η ισχύς που καταναλώνεται πάνω στην αντίσταση, $P_{\text{OUT}} = i_{\text{R}}^2 R$, δηλαδή:

$$P_{\text{OUT}} = \frac{V_0^2}{R\pi^2} \quad (4.84)$$

Η ισχύς εισόδου δίνεται από την σχέση

$$P_{\text{IN}} = \int_0^T v_{\text{IN}} i_{\text{IN}} dt = \int_0^{T/2} \frac{v_{\text{IN}}^2}{R} dt = \int_0^{T/2} \frac{V_0^2}{R} \sin^2(2\pi ft) dt = \frac{V_0^2}{4} \quad (4.85)$$

Στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ακολουθήσαμε την ίδια τακτική με την (1.21) μόνο που τώρα είναι διαφορετικό το διάστημα ολοκλήρωσης. Η απόδοση ισχύος στην περίπτωση του κυκλώματος RD υπολογίζεται ως εξής:

$$\eta = \frac{P_{\text{OUT}}}{P_{\text{IN}}} = \frac{4}{\pi^2} \cong 0.405 \quad (4.86)$$

δηλαδή η απόδοση του απλού κυκλώματος RD είναι περίπου 40.5%. Στην περίπτωση του κυκλώματος της εικόνας 4.21 οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται με τον ίδιο τρόπο, μόνο που αντί της (4.79) θα χρησιμοποιήσουμε την (4.78). Επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι,

$$P_{\text{OUT}} = \frac{4V_0^2}{R\pi^2} \quad (4.87)$$

$$P_{\text{IN}} = \frac{V_0^2}{2R} \quad (4.88)$$

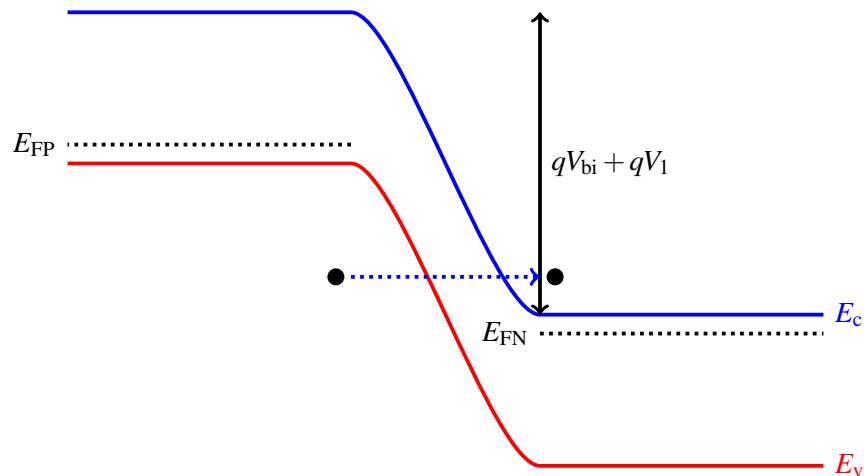
και επομένως η απόδοση της πλήρους ανόρθωσης είναι:

$$\eta = \frac{P_{\text{OUT}}}{P_{\text{IN}}} = \frac{4}{\pi^2} \cong 0.81 \quad (4.89)$$

δηλαδή η απόδοση της πλήρους ανόρθωσης είναι περίπου 81.0%, διπλάσια του απλού κυκλώματος RD.

4.10 Υψηλή ανάστροφη τάση

Στην ενότητα 4.6 είδαμε ότι στην ανάστροφη πόλωση ($v_{\text{D}} < 0$), το ρεύμα που περνάει από την διάοδο είναι ελάχιστο, $i_{\text{D}} \cong 0$. Όταν όμως η v_{D} γίνει πολύ αρνητική, τελικά η διάοδος αρχίζει να διαρρέεται από μεγάλο ανάστροφο ρεύμα $i_{\text{D}} < 0$. Υπάρχουν δύο λόγοι που τελικά μετρούμε μεγάλο ρεύμα όταν έχουμε πολύ αρνητική τάση. Ο πρώτος λόγος είναι το *φαινόμενο της σήραγγας*. Στην εικόνα 4.25 δείχνουμε τι συμβαίνει όταν η τάση στην διάοδο είναι $v_{\text{D}} = -V_1$ όπου V_1 είναι μία μεγάλη τιμή. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν πλέον πολλά ηλεκτρόνια στην αριστερή Ρ-πλευρά που βρίσκονται στην ζώνη σθένους με ενέργεια μικρότερη του E_{v} που στην δεξιά πλευρά θα ήταν στην ζώνη αγωγιμότητας δηλαδή με ενέργεια μεγαλύτερη του E_{c} . Καθώς η ενδιάμεση περιοχή απογύμνωσης είναι πολύ μικρή λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της σήραγγας το οποίο είναι ένα καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο: κανονικά τα ηλεκτρόνια θα έπρεπε να μένουν στην θέση τους καθώς στην αριστερή μεριά δεν έχουν ενέργεια ικανή για να ξεφύγουν και να



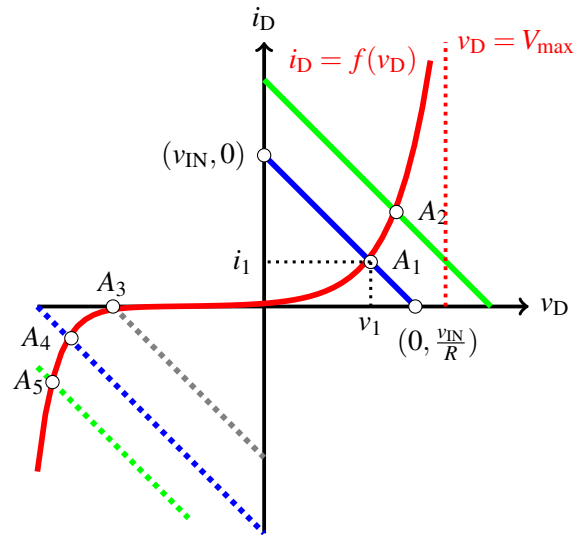
Εικόνα 4.25: Το φαινόμενο της σήραγγας.

μεταβούν στην ζώνη της αγωγιμότητας. Ωστόσο επειδή πολύ κοντά υπάρχει η δεξιά N-περιοχή όπου τα ηλεκτρόνια θα βρισκότουσαν στην ζώνη αγωγιμότητας, τελικά ένας αριθμός από αυτά μεταπηδά στην περιοχή αυτή. Είναι σαν να δημιουργείται μία σήραγγα που "κλέβει" φορείς από την P-περιοχή και τα πάει στην N-περιοχή. Έτσι αρχίζει να δημιουργείται ένα μεγάλο ανάστροφο ρεύμα i_D .

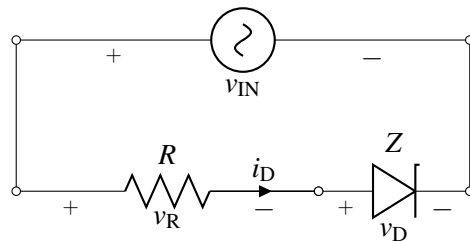
Υπάρχει και ένα δεύτερο φαινόμενο που υποβοηθάει την γέννηση του ρεύματος, το φαινόμενο της *χιονοστιβάδας*. Είδαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο \mathcal{E} είναι συγκεντρωμένο στην περιοχή απογύμνωσης και επομένως καθώς τα ηλεκτρόνια περνούν από την περιοχή αυτή αποκτούν υψηλή κινητική ενέργεια αν η ανάστροφη τάση που εφαρμόζουμε είναι και αυτή ισχυρή. Εξαιτίας της αυξημένης κινητικής ενέργειας, οι σπές μπορούν να *ιονίσουν* νέους φορείς στα άτομα του υλικού δημιουργώντας νέα ζευγάρια σπών και ηλεκτρονίων. Επομένως με αυτόν τον τρόπο το φαινόμενο της χιονοστιβάδας ενισχύει το υπάρχον ρεύμα. Ο τρόπος ενίσχυσης θυμίζει μία χιονοστιβάδα χιονιού που συνεχώς μεγαλώνει στο χιόνι. Η περιοχή στην οποία η δίοδος διαρρέεται από μεγάλο ανάστροφο ρεύμα ονομάζεται *περιοχή κατάρρευσης*.

Η εικόνα 4.26 δείχνει τι συμβαίνει όταν λάβουμε υπόψη τα φαινόμενα αυτά. Σε σχέση με την εικόνα 4.15 βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική της διόδου για μεγάλες αρνητικές v_D οδηγεί σε μεγάλα αρνητικά (ανάστροφα) ρεύματα. Επομένως σε ένα κύκλωμα RD αν μειώσουμε πολύ την v_{IN} θα πάρουμε την ευθεία φόρτου που σχεδιάσαμε με την μπλε διακεκομμένη γραμμή που τέμνει την χαρακτηριστική της διόδου στο σημείο A_4 . Για ακόμα αρνητικότερες v_{IN} τα σημεία τομής θα βρίσκονται πάνω στην καμπύλη της διόδου και σε αρνητικότερες τιμές ρεύματος, π.χ. το σημείο A_5 . Επομένως βλέπουμε πως η τάση v_D αρχίζει να σταθεροποιείται ενώ το ρεύμα i_D συνεχίζει να γίνεται αρνητικότερο. Η τάση $v_D = V_{BR}$ στην οποία αρχίζουμε να έχουμε σημαντικό ανάστροφο ρεύμα ονομάζεται *τάση κατάρρευσης* της διόδου. Όσο πιο πολλές προσμίξεις έχουν τα υλικά που απαρτίζουν την δίοδο τόσο πιο μικρή είναι η τάση αυτή. Οι δίοδοι *Zener* είναι ειδικά σχεδιασμένες δίοδοι στις οποίες η τάση κατάρρευσης είναι σχετικά μικρή (της τάξης των μερικών V αλλά υπάρχουν και Zener με τάση κατάρρευσης 100 – 200V)

Στην εικόνα 4.27 δείχνουμε το ίδιο κύκλωμα με την εικόνα 4.17a μόνο που τώρα έχουμε αντικαταστήσει την απλή δίοδο D με μία δίοδο Zener Z , ενώ στην εικόνα 4.27 δείχνουμε πως υλοποιείται το κύκλωμα στο LT-SPICE. Έχουμε επιλέξει μία δίοδο Zener που έχει τάση

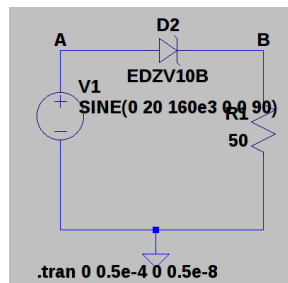


Εικόνα 4.26: Ανάλυση του κυκλώματος RD μέσω της γραφικής μεθόδου.



Εικόνα 4.27: Κύκλωμα με διάοδο Zener.

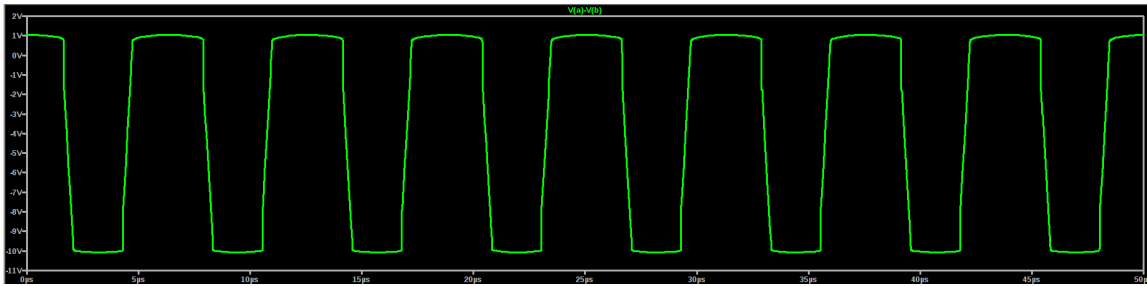
κατάρρευσης 10V. Στην εικόνα 4.29 δείχνουμε την κυματομορφή της τάσης v_D πάνω στην διάοδο Zener. Όπως και στην εικόνα 4.14, βλέπουμε ότι η τάση v_D πάνω στην διάοδο δεν ξεπερνάει μία χαμηλή θετικής τιμής τάσης ($\leq 1V$). Η διαφορά είναι ότι τώρα έχουμε ένα αντίστοιχο φαινόμενο σε αρνητικές τιμές τάσεις όπου η τάση δεν μπορεί να γίνει αρνητικότερη από την τάση κατάρρευσης $V_{BR} \cong -10V$. Οι διάοδοι Zener βρίσκουν εφαρμογή στην σταθεροποίηση της



Εικόνα 4.28: Το κύκλωμα της εικόνας 4.27 στο LT-SPICE.

τάσης ακριβώς εξαιτίας αυτής της ιδιότητας τους.

Στην εικόνα 4.30α δείχνουμε το κύκλωμα σταθεροποίησης της τάσης με χρήση μίας διάοδου

Εικόνα 4.29: Η τάση v_D πάνω στην δίοδο Zener.

Zener. Στην εικόνα 4.30b δείχνουμε το τμήμα του κυκλώματος που επιτελεί την σταθεροποίηση. Στην είσοδο του έχουμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή. Για να καταλάβουμε την λειτουργία του κυκλώματος σταθεροποίησης θεωρούμε ότι η τάση του πυκνωτή είναι το άθροισμα μίας DC στάθμης V_C και μίας μικρής AC διακύμανσης v_c που θέλουμε να απομακρύνουμε. Σε ότι αφορά την AC συνιστώσα, αν υποθέσουμε ότι η δίοδος με χαρακτηριστική $i_D = f(v_D)$ λειτουργεί στην περιοχή κατάρρευσης τότε θα πρέπει να περιγράφεται από μία πολύ μικρή αντίσταση $r_Z = 1/f'(V_D)$. Επομένως για την AC συνιστώσα του σήματος η τάση πάνω στην αντίσταση είναι,

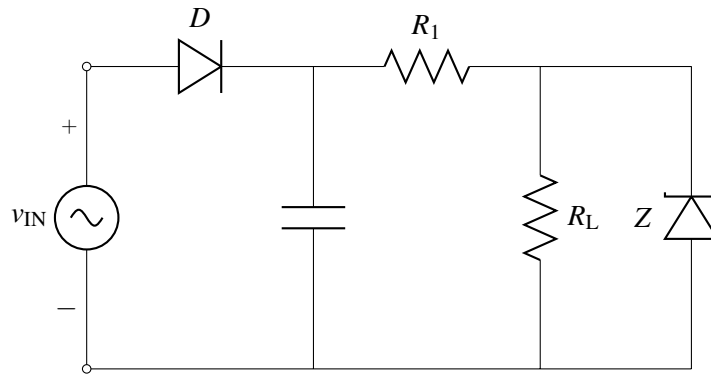
$$v_{\text{out}} = \frac{R_{\text{tot}}}{R_1 + R_{\text{tot}}} v_c \quad (4.90)$$

όπου R_{tot} είναι η συνολική αντίσταση που της R_L και της r_Z που καθορίζεται από την σχέση:

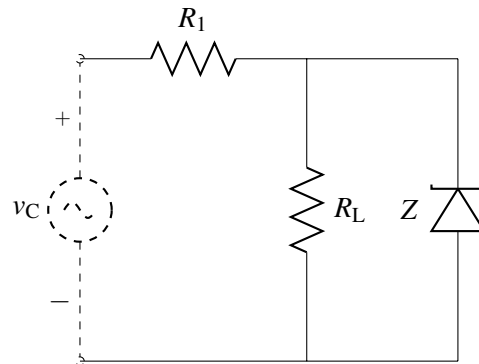
$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_Z} \quad (4.91)$$

Εφόσον η r_Z είναι πολύ μικρή θα έχουμε από την (4.91), $R_{\text{tot}} \cong r_Z$ οπότε,

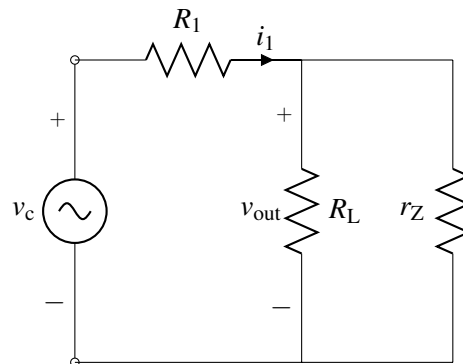
$$v_{\text{out}} = \frac{r_Z}{R_1 + r_Z} v_c \quad (4.92)$$



(a) Κύκλωμα ημιανόρθωσης με εξομάλυνση και σταθεροποίηση.



(b) Το τμήμα σταθεροποίησης.



(c) AC ισοδύναμο.

Εικόνα 4.30: Σταθεροποίηση με δίοδο Zener.