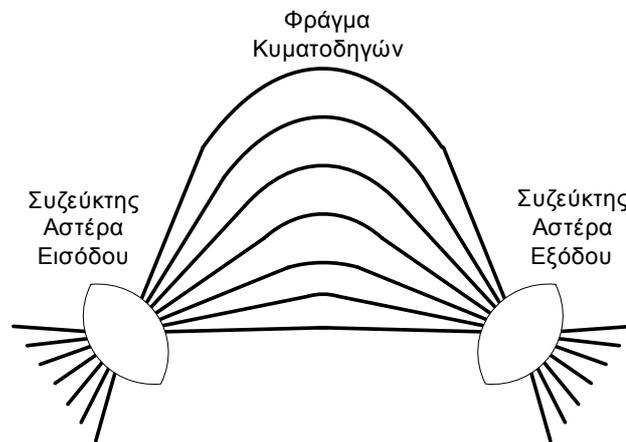


*«Συμβολή στη Μελέτη Οπτικών Δικτύων με
Πολυπλέκτες και Αποπολυπλέκτες Συστοιχίας
Φράγματος Κυματοδηγών»*

Θωμάς Καμαλάκης



Υπεύθυνος Καθηγητής: Θωμάς Σφηκόπουλος

Αφιερωμένο στους γονείς μου

Σπύρο και Αλίκη

Όταν το καλοκαίρι του 1999 συζήτησα για πρώτη φορά το ενδεχόμενο να εκπονήσω μία διδακτορική διατριβή με τον καθηγητή μου κ. Θωμά Σφηκόπουλο, η αλήθεια είναι πως δεν είχα προβλέψει το τι επρόκειτο να επακολουθήσει. Είχα την εντύπωση πως η εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής έχει ως σκοπό την αντιμετώπιση ενός στενού επιστημονικού προβλήματος που ενδιαφέρει ένα μόνο τμήμα της επιστημονικής κοινότητας. Ωστόσο, στο χρονικό διάστημα που ακολούθησε, έμαθα πως το διδακτορικό είναι μία ευκαιρία για γενικότερη ωρίμανση της προσωπικότητας ενός ανθρώπου. Πράγματι κατά την πορεία της διατριβής αυτής έμαθα να σκέφτομαι με νηφαλιότητα, να αντιμετωπίζω τα διάφορα προβλήματα βάση της λογικής, να αναδεικνύω το ουσιώδες από το επουσιώδες, να επικοινωνώ και να συνεργάζομαι με ανθρώπους με διαφορετικές γνώσεις, ενδιαφέροντα και ιδιοσυγκρασίες.

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Θωμά Σφηκόπουλο για την καθοδήγηση του σε όλα τα στάδια της παρούσας διατριβής, από τον καθορισμό του θέματος μέχρι και τη τελική συγγραφή. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για τη νοοτροπία του επιστημονικού ερευνητή που μου μετέδωσε και που ελπίζω πλέον να αποτελεί σημαντικό τμήμα της προσωπικότητας μου. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή κύριο Δημήτρη Συβρίδη για την υποστήριξη του και την επιστημονική του βοήθεια καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής αλλά και τον καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Καρούμπαλο που πρώτος με μύησε στο ενδιαφέρον επιστημονικό πεδίο των Οπτικών Επικοινωνιών. Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Οπτικών Επικοινωνιών, Άρη Τσίπουρα, Δημήτρη Βαρουτά, Αντώνη Μπόγρη και Ηρακλή Σίμο για την αμέριστη συμπαράσταση τους καθώς και τους καθηγητές κ. Ιωάννη Ρούδα και κ. Μανώλη Σαγκριώτη για τις πολλές ώρες που περάσαμε συζητώντας επιστημονικά προβλήματα που άπτονται αυτής της εργασίας.

Όταν ξεκίνησα πίστευα πως στο τέλος θα με κατέκλυζε ένα συναίσθημα λύτρωσης. Και τώρα που το ταξίδι σχεδόν τελείωσε, αντί για λύτρωση νιώθω μία γλυκιά νοσταλγία...

Καμάλακης Θωμάς

Αθήνα, 23 Ιανουαρίου 2004

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε το χρονικό διάστημα μεταξύ του Ιανουαρίου του 2000 και του Ιανουαρίου 2004 στο Εργαστήριο Οπτικών Επικοινωνιών του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κυρίου Θωμά Σφηκόπουλου. Αντικείμενο της είναι η μελέτη των Φραγμάτων Συστοιχίας Κυματοδηγών (Arrayed Waveguide Grating – AWG) και των επιδόσεων των οπτικών δικτύων που τα χρησιμοποιούν. Τα AWG βρίσκουν πολλές εφαρμογές, όπως πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες μήκους κύματος, δρομολογητές μήκους κύματος, αντισταθμιστές διασποράς κτλ.

Η ιστορία των AWG ξεκίνησε το 1988 όταν ο Smit παρατήρησε πως μία συστοιχία κυματοδηγών με διαφορετικά μήκη δρα ως οπτικό φίλτρο, κατά παρόμοιο τρόπο με το φράγμα περίθλασης. Το 1991, ο Dragone πρότεινε την ολοκλήρωση του φράγματος των κυματοδηγών με δύο επίπεδους συζεύκτες αστέρα. Έκτοτε τα AWG αποτελούν αντικείμενο συνεχούς επιστημονικής έρευνας και τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει διαθέσιμα και εμπορικά.

Η διατριβή έχει την εξής διάρθρωση:

Στο κεφάλαιο 1, δίνεται μία σύντομη περιγραφή των Οπτικών Δικτύων με ιδιαίτερη έμφαση στα δίκτυα πολυπλεξίας μήκους κύματος (Wavelength Division Multiplexing - WDM). Παρουσιάζονται επίσης τα διάφορα στάδια εξέλιξης των οπτικών δικτύων καθώς και τα βασικά δομικά τους στοιχεία.

Στο κεφάλαιο 2, αναλύονται διεξοδικότερα οι διαδικασίες πολυπλεξίας και αποπολυπλεξίας μήκους κύματος και οι διάφορες τεχνολογίες με τις οποίες υλοποιούνται όπως τα AWG, τα φράγματα Bragg, κτλ.

Στο κεφάλαιο 3, εξηγείται η λειτουργία των συζευκτών αστέρα του AWG με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell και των συναρτήσεων Green. Αποδεικνύεται πως το πρόβλημα της διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα ανάγεται σε ένα πρόβλημα 2 διαστάσεων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης εφαρμόζονται στο κεφάλαιο 4 για να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του AWG. Στο ίδιο κεφάλαιο, αναλύεται η επίδραση της σύζευξης των κυματοδηγών του φράγματος.

Το αντικείμενο του κεφαλαίου 5 είναι η επίδραση των σφαλμάτων φάσης των κυματοδηγών φράγματος στα φασματικά χαρακτηριστικά του AWG. Τα σφάλματα φάσης οφείλονται στις κατασκευαστικές ατέλειες και είναι υπεύθυνα για τη γέννηση του θορύβου οπτικής διαφωνίας. Η στατιστική περιγραφή του θορύβου διαφωνίας αναλύεται στο κεφάλαιο 6, θεωρώντας ένα απλό $N \times N$ δίκτυο το οποίο βασίζεται σε έναν απλό AWG δρομολογητή.

Στο κεφάλαιο 7, παρουσιάζεται μία μέθοδος σχεδιασμού ενός AWG με ομαλή φασματική απόκριση. Η μέθοδος συνίσταται στην επιλογή των μηκών των κυματοδηγών του φράγματος έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του να πλησιάζει ένα ορθογώνιο.

Τέλος στο κεφάλαιο 8, παρουσιάζεται μια στατιστική περιγραφή του θορύβου διαφωνίας η οποία λαμβάνει υπόψη της και το θόρυβο διακροτήματος διαφωνίας-διαφωνίας. Η συνάρτηση γεννήτριας ροπών του θορύβου, που επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος, υπολογίζεται βάσει ενός απλού ολοκληρώματος και χρησιμοποιείται για να διερευνηθεί η σημασία του θορύβου διαφωνίας-διαφωνίας σε ένα WDM δίκτυο.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1.	ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ.....	13
1.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	13
1.2	Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ	14
1.3	ΠΡΩΤΗ ΓΕΝΙΑ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ.....	16
1.4	ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑΣ.....	17
1.5	ΟΠΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΓΕΝΙΑΣ.....	18
1.6	ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΔΙΚΤΥΟΥ WDM	21
1.6.1	ΟΠΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ	21
1.6.2	ΟΠΤΙΚΟΙ ΕΝΙΣΧΥΤΕΣ.....	22
1.6.3	ΟΠΤΙΚΟΙ ΠΟΜΠΟΙ	23
1.6.4	ΟΠΤΙΚΟΙ ΔΕΚΤΕΣ	24
1.6.5	ΜΕΤΑΓΩΓΕΙΣ ΧΩΡΟΥ	24
1.6.6	ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΙΣ ΜΗΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΣ	25
2.	ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΗΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΣ.....	27
2.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	27
2.2	ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ.....	30
2.3	ΦΡΑΓΜΑΤΑ BRAGG.....	34
2.4	ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΑ MACH ZEHNDER.....	39
2.5	ΦΙΛΤΡΑ ΛΕΠΤΩΝ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΥΜΕΝΙΩΝ	42
2.6	ΤΟ ΟΠΤΙΚΟ-ΑΚΟΥΣΤΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ	46
2.7	ΤΟ ΦΙΛΤΡΟ FABRY-PEROT	49
2.8	ΦΡΑΓΜΑ ΣΥΣΤΟΙΧΙΑΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ.....	51
3.	ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΑΩΓ.....	61
3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	61
3.2	Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ LOVE	62
3.3	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	64
3.4	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ.....	66
3.5	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	69
3.6	ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΕΔΙΟΥ	71
3.7	ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ	72
3.8	Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥ	76
3.9	ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ SOMMERFELD	79
3.9.1	ΑΛΛΑΓΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ.....	79
3.9.2	Η ΜΕΘΟΔΟΣ SADDLE POINT	79
3.9.3	ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΕΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ	81
3.9.4	Ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ	83
3.9.5	ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ C_1 ΣΤΟ P	85
3.10	ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΖΕΥΚΤΗ ΑΣΤΕΡΑ ΤΟΥ ΑΩΓ.....	92
3.10.1	ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΩΝ ΠΟΛΩΝ.....	92
3.10.2	ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΣΗΜΕΙΩΝ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ.....	96
3.10.3	ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΟΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙΟΥ P	98
3.10.4	ΜΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ	99
3.10.5	ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΕΞΟΔΟΥ	101
3.10.6	ΑΠΟ ΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....	102
4.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΩΓ.....	107
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	107
4.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΑΓΝΟΩΝΤΑΣ ΤΗ ΣΥΖΕΥΞΗ	107
4.2.1	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	109
4.2.2	GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	111

4.2.3	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ	113
4.2.4	ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ GAUSSIAN ΜΟΝΤΕΛΟ.....	118
4.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	119
4.3.1	ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΗΣ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ.....	120
4.4	ΣΥΖΕΥΞΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ.....	121
5.	Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΦΑΣΗΣ ΣΤΙΣ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΟΥ AWG	131
5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	131
5.2	ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΑΤΕΛΕΙΩΝ	132
5.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΟΥ ΔΕΙΚΤΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ	133
5.4	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΦΑΣΗΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ.....	137
5.5	ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ.....	139
5.6	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.....	141
5.6.1	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΙΣΧΥΟΣ	141
5.6.2	ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΙΣΧΥΟΣ.....	143
5.7	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΟΣ ΛΟΒΟΥ	147
5.8	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΔΟΣΕΩΝ ΤΟΥ AWG.....	150
6.	ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ ΤΟΥ AWG ΣΕ ΕΝΑ ΑΜΙΓΩΣ ΟΠΤΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ	153
6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	153
6.2	ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ.....	154
6.2.1	ΓΕΝΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ	154
6.2.2	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΤΟΥ AWG	157
6.2.3	ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΒΙΤ.....	158
6.2.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΡΟΠΩΝ	159
6.2.5	ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΒΟΛΗΣ.....	161
6.2.6	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BER ΑΠΟ ΤΗΝ MGF	161
6.3	ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ.....	162
6.4	ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ	167
6.5	ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ BER ΚΑΙ ΜΕΣΗΣ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ ΤΟΥ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΤΗ.....	169
7.	ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΝΟΣ AWG ΜΕ ΟΜΑΛΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ.....	171
7.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	171
7.2	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	172
7.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	177
7.3.1	ΥΨΟΣ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΩΝ ΛΟΒΩΝ ΚΑΙ ΟΜΑΛΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΕΥΡΟΣ ΜΙΣΗΣ ΙΣΧΥΟΣ 180	180
7.3.2	ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	181
7.3.3	ΤΟ ΕΥΡΟΣ ΜΙΣΗΣ ΙΣΧΥΟΣ	182
7.3.4	ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΥΨΟΥΣ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΩΝ ΛΟΒΩΝ	183
7.3.5	ΑΚΤΙΝΑ ΣΥΖΕΥΚΤΗ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΕΞΟΔΟΥ	184
7.3.6	ΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ	184
7.4	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	185
8.	ΕΝΑ ΑΚΡΙΒΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ WDM	189
8.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	189
8.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ	191
8.3	ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ MGF ΜΕΣΩ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ	193
8.3.1	ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΗ MGF ΤΩΝ R ΚΑΙ V	193
8.3.2	ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ R ΚΑΙ V	194
8.3.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MGF ΤΟΥ R ΚΑΙ ΤΟΥ V	194

8.3.4	ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ MGF ΟΤΑΝ $M \rightarrow \infty$	196
8.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MGF ΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟ ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ.....	198
8.4.1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ.....	198
8.4.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ.....	199
8.4.3	ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ $M(S)$ ΓΙΑ $S \rightarrow \infty$	201
8.5	ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΜΕΝΗΣ MGF.....	202
8.6	ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ASE ΚΑΙ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ.....	203
8.7	ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ-ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ.....	204
A.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΑΩΓ 211	
B.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BER ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ SADDLE POINT.....	215
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	217
	ΛΙΣΤΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΩΝ.....	220

1. ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Την τελευταία δεκαετία έχουμε γίνει μάρτυρες μίας ταχύτατης ανάπτυξης των τηλεπικοινωνιακών δικτύων. Η ανάπτυξη αυτή, σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στη διεύρυνση του διαδικτύου σε ολόένα και μεγαλύτερο μέρος του ανθρώπινου πληθυσμού. Το διαδίκτυο αποτελεί πλέον μία παγκόσμια κοινότητα με παραπάνω από 300 εκατομμύρια μέλη. Κάθε μέρα, άνθρωποι διαφορετικών εθνικοτήτων επικοινωνούν ανταλλάσσοντας απόψεις, αγοράζουν και πουλούν, ενημερώνονται και ψυχαγωγούνται. Η πρόσβαση και η πλοήγηση στο διαδίκτυο είναι σχετικά απλές διαδικασίες. Από την άλλη πλευρά ολόένα και περισσότερες εταιρίες, βασίζονται σε μικρότερα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα για να βελτιώσουν την παραγωγικότητα τους και τις υπηρεσίες που παρέχουν προς τους πελάτες τους.

Η συνεχής όμως ανάπτυξη του διαδικτύου προϋποθέτει ότι η τεχνολογία θα είναι σε θέση να διαχειριστεί τη διακίνηση ολόένα και μεγαλύτερης ποσότητας πληροφορίας. Παράλληλα, θα πρέπει να μπορεί να υποστηρίξει και νέες υπηρεσίες με αυξημένες απαιτήσεις από άποψη ρυθμού μετάδοσης πληροφορίας [RBB00]. Νέες υπηρεσίες τηλε-συνδιάσκεψης έχουν αυξημένες απαιτήσεις ρυθμού μετάδοσης, σε αντίθεση με το παραδοσιακό ηλεκτρονικό ταχυδρομείο. Η υλοποίηση νέων υπηρεσιών συναντά και άλλα εμπόδια. Για παράδειγμα μία υπηρεσία πραγματικού χρόνου (όπως η τηλε-συνδιάσκεψη) απαιτεί μειωμένη καθυστέρηση ανταπόκρισης του δικτύου. Και φυσικά, το κόστος υλοποίησης των νέων υπηρεσιών θα πρέπει να είναι χαμηλό ώστε αυτές να είναι προσιτές και θελκτικές στους πελάτες.

Το ενδιαφέρον με την ανάπτυξη των τηλεπικοινωνιών είναι πως κάθε σημαντικό βήμα που πραγματοποιείται συνοδεύεται από την προσμονή για κάτι καλύτερο. Για παράδειγμα, είναι αμφίβολο αν πριν από είκοσι χρόνια θα μπορούσαμε να φανταστούμε πως θα είχαμε τη δυνατότητα να ακούμε ραδιόφωνο μέσω του διαδικτύου. Σήμερα όμως αυτό δε φαντάζει κάτι το σημαντικό και οραματιζόμαστε άλλες υπηρεσίες όπως μετάδοση ιατρικής εικόνας με υψηλή πιστότητα με σκοπό την ιατρική διάγνωση από απόσταση.

Επομένως, τίθεται το ερώτημα αν τελικά η τεχνολογία δύναται να συμβαδίσει με τις προσδοκίες μας ή αν η ανάπτυξη των τηλεπικοινωνιών θα παρουσιάσει μία κάμψη. Όπως έχει γίνει φανερό τα τελευταία χρόνια το κλειδί για την απάντηση αυτής της ερώτησης είναι η τεχνολογία των δικτύων οπτικών ινών. Η οπτική ίνα έχει αποδείξει πως έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει πολύ υψηλούς ρυθμούς μετάδοσης κατά μήκος αρκετά μεγάλων αποστάσεων. Επομένως τα δίκτυα τα οποία χρησιμοποιούν οπτικές ίνες, τα οπτικά δίκτυα, θα είναι σε θέση να ανταποκριθούν στις παραπάνω απαιτήσεις. Σε πολλά ήδη εγκατεστημένα οπτικά δίκτυα συναντούμε ρυθμούς της τάξεως των 2.5Gb/s και των 10Gb/s ανά κανάλι, ενώ σε ερευνητικό στάδιο ακόμα βρίσκονται τεχνικές μετάδοσης που υποστηρίζουν ρυθμούς 40Gb/s ανά κανάλι. Οι υψηλοί ρυθμοί που υποστηρίζονται από τα οπτικά δίκτυα, τα καθιστούν ιδιαίτερα ελκυστικά για υλοποίηση δικτύων κορμού (back-bone network). Το κατά πόσον, όμως, και τότε η οπτική ίνα θα φτάσει στο άμεσο μέλλον μέχρι τους απλούς συνδρομητές (Fiber To The Home-FTTH) μέσω

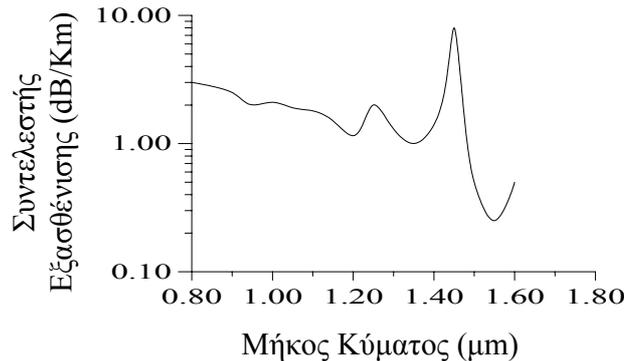
ενός οπτικού συνδρομητικού δικτύου εξαρτάται και από πολλούς παράγοντες όπως η ανάπτυξη νέων ευρυζωνικών υπηρεσιών, ο σωστός σχεδιασμός των αρμόδιων φορέων, κτλ.

1.2 Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Τι είναι αυτό που δίδει στην οπτική ίνα τις θαυμαστές της ιδιότητες; Το ερώτημα αυτό βρίσκει την απάντησή του εξετάζοντας το σχήμα 1-1 στο οποίο έχει απεικονιστεί η εξάρτηση της εξασθένισης ανά μονάδα μήκους ενός οπτικού σήματος, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος του οπτικού σήματος [Gre94, §3.1]. Παρατηρούμε πως γύρω από το $\lambda=1.55\mu\text{m}$ υπάρχει μία περιοχή εύρους $\Delta\lambda=200\text{nm}$ περίπου μέσα στο οποίο οι απώλειες ισχύος είναι πολύ χαμηλές. Αναπτύσσοντας την σχέση $f=c/\lambda$ που συνδέει την οπτική συχνότητα f με το μήκος κύματος λ , σε σειρά Taylor λαμβάνουμε

$$\Delta f \cong \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda \quad (1.1)$$

Στην παραπάνω σχέση c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Αντικαθιστώντας $\lambda=1.55\mu\text{m}$, $\Delta\lambda=200\text{nm}$ και $c=3 \times 10^8 \text{m/s}$ βρίσκουμε πως $\Delta f=35000\text{GHz}$. Το παραπάνω εύρος ζώνης είναι υπέρ-αρκετό για την υποστήριξη υπηρεσιών μεταφοράς δεδομένων, οι περισσότερες από τις οποίες δεν ξεπερνούν σε ρυθμό τις μερικές εκατοντάδες Mb/s.



Σχήμα 1-1: Μεταβολή του συντελεστή απωλειών μιας οπτικής ίνας σε συνάρτηση με το μήκος κύματος.

Η οπτική ίνα, όπως άλλωστε και κάθε κυματοδηγός παρουσιάζει το φαινόμενο της *διασποράς* [RS98, §2.3]. Η διασπορά υφίσταται όταν, διαφορετικά τμήματα του οπτικού σήματος ταξιδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες και οφείλεται σε διάφορα φαινόμενα. Η *διασπορά πολλών τρόπων* παρουσιάζεται σε ίνες που υποστηρίζουν πολλούς τρόπους ηλεκτρομαγνητικής διάδοσης και ονομάζονται *πολύτροπες ίνες*. Οφείλεται στο γεγονός ότι οι τρόποι διάδοσης μίας οπτικής ίνας έχουν διαφορετική σταθερά διάδοσης και διαφορετική ταχύτητα ομάδας. Το σήμα, κατά την διάδοσή του, διεγείρει παραπάνω από έναν τρόπους σε μία πολύτροπη ίνα με αποτέλεσμα τα διάφορα τμήματα του να μην ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα. Εξαιτίας αυτού του φαινομένου οι οπτικοί παλμοί διευρύνονται και να δημιουργείται αλληλοπαρεμβολή συμβόλων. Η *χρωματική διασπορά* οφείλεται στο γεγονός ότι ο δείκτης διάθλασης του πυριτίου (που είναι το συστατικό από το οποίο κατασκευάζονται οι οπτικές ίνες) εξαρτάται από τη συχνότητα. Έτσι ακόμα και αν η ίνα είναι *μονότροπη*, δηλαδή υποστηρίζει μόνο ένα τρόπο διάδοσης, οι διαφορετικές συνιστώσες του σήματος θα ταξιδεύουν με διαφορετική ταχύτητα με αποτέλεσμα οι οπτικοί παλμοί να διευρύνονται. Ένα ακόμα είδος διασποράς είναι και η *διασπορά κυματοδηγού* που οφείλεται στη γεωμετρία της οπτικής ίνας, καθώς και η *διασπορά τρόπων πόλωσης* (Polarization Mode

Dispersion – PMD) που οφείλεται στο ότι εξαιτίας των διαφόρων ατελειών της οπτικής ίνας, οι δύο πολώσεις του βασικού τρόπου διάδοσης έχουν ελαφρά διαφορετική σταθερά διάδοσης. Στα σύγχρονα οπτικά δίκτυα συνήθως χρησιμοποιούνται μονότροπες ίνες και η διασπορά πολλών τρόπων εξαλείφεται. Ωστόσο, τα άλλα τρία είδη διασποράς είναι παρόντα και στις μονότροπες ίνες. Η χρωματική διασπορά μπορεί να αντισταθμιστεί με κατάλληλες τεχνικές αλλά η διασπορά τρόπου πόλωσης δεν αντισταθμίζεται εύκολα επειδή αποτελεί τυχαίο φαινόμενο. Η χρωματική διασπορά μπορεί να θέσει σημαντικά όρια στον μέγιστο επιτρεπόμενο ρυθμό επειδή η επίδραση της είναι ισχυρότερη όσο αυξάνει το εύρος ζώνης του σήματος. Η επίδραση της διασποράς τρόπου πόλωσης και της διασποράς κυματοδηγού είναι συνήθως αρκετά μικρότερη από την επίδραση της χρωματικής διασποράς.

Η χρωματική διασπορά σε μια τυπική οπτική ίνα ελαχιστοποιείται γύρω από τα 1.3μm. Με κατάλληλη χρήση της διασποράς κυματοδηγού έχουμε τη δυνατότητα να μετατοπίσουμε το μήκος κύματος ελάχιστης διασποράς στα 1.55μm που είναι και το κέντρο του παράθυρου ελάχιστων απωλειών ισχύος. Οι ίνες που διαθέτουν το παραπάνω χαρακτηριστικό ονομάζονται ίνες μετατοπισμένης διασποράς.

Η διασπορά χαρακτηρίζεται ως γραμμικό φαινόμενο επειδή δεν εξαρτάται από την ισχύ του κύματος. Υπάρχουν όμως και άλλα φαινόμενα που επηρεάζουν τη διάδοση σε μία οπτική ίνα τα οποία έχουν μη γραμμικό χαρακτήρα και οφείλονται στο γεγονός ότι ο δείκτης διάθλασης n της οπτικής ίνας εξαρτάται από το τετράγωνο του ηλεκτρικού πεδίου E [Agr89, §1.3.1]:

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 \quad (1.2)$$

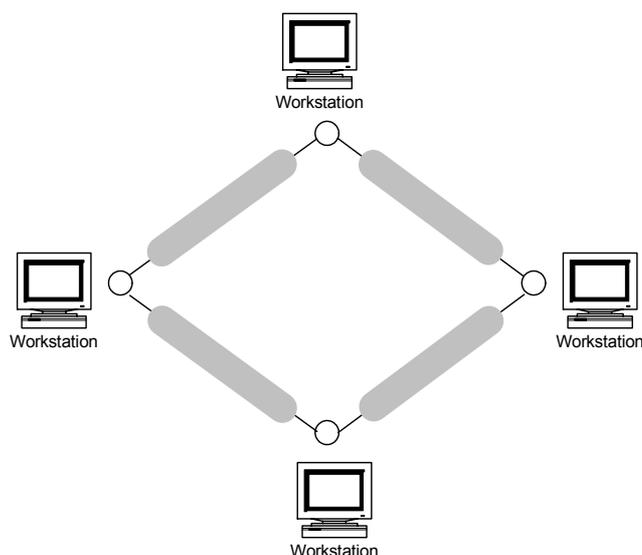
Η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από το τετράγωνο του οπτικού πεδίου συχνά αναφέρεται και ως φαινόμενο *Kerr*. Τα μη γραμμικά φαινόμενα που προκαλούνται έχουν ως κύριο αποτέλεσμα την αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφορετικών συχνοτήτων του σήματος με αποτέλεσμα την παραμόρφωσή του. Η έντασή τους αυξάνει με την οπτική ισχύ και θέτουν ένα άνω όριο στη μέγιστη ισχύ εκπομπής που μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Για την εκμετάλλευση του μεγάλου εύρους ζώνης που παρέχουν οι οπτικές ίνες, απαιτούνται και άλλα δομικά στοιχεία όπως κατάλληλοι οπτικοί πομποί, δέκτες και ενισχυτές που να επιτρέπουν την γέννηση, λήψη και ενίσχυση αντίστοιχα, οπτικών σημάτων μεγάλου εύρους ζώνης. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουμε γίνει μάρτυρες μίας ραγδαίας ανάπτυξης των δομικών στοιχείων των οπτικών δικτύων.

Ως οπτικοί πομποί χρησιμοποιούνται κυρίως οι δίοδοι LASER και σπανιότερα οι δίοδοι LED. Το μήκος κύματος εκπομπής εξαρτάται από το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένη. Συνήθως το υλικό που χρησιμοποιείται για την κατασκευή οπτικών πομπών στα 1.3μm και 1.55μm είναι το InGaAs πάνω σε υπόστρωμα InP. Οι δίοδοι LASER παράγουν υψηλής ισχύος οπτικό φέρον με στενό εύρος ζώνης το οποίο μπορεί να διαμορφωθεί με κατάλληλες μεθόδους με ρυθμό μέχρι και 40Gb/s. Οι δίοδοι LED παράγουν χαμηλότερης ποιότητας οπτικό φέρον αλλά αποτελούν μία λύση χαμηλού κόστους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές μικρών αποστάσεων και χαμηλού ρυθμού.

Η λήψη του οπτικού σήματος λαμβάνει χώρα με την βοήθεια κατάλληλων φωτοδιόδων που το μετατρέπουν σε ηλεκτρονικό. Για την κατασκευή των φωτοδιόδων χρησιμοποιούνται τα ίδια υλικά με αυτά που χρησιμοποιούνται στους οπτικούς δέκτες. Οι σύγχρονες φωτοδιόδοι επιτρέπουν τη φώραση οπτικού σήματος διαμορφωμένου με ρυθμό μέχρι και 40Gb/s.

Η ενίσχυση του οπτικού σήματος μπορεί να λάβει χώρα με μία πληθώρα τεχνικών. Ωστόσο, αξιόπιστοι οπτικοί ενισχυτές που να επιτρέπουν την ενίσχυση ενός ευρωζωνικού οπτικού σήματος εμφανίστηκαν μόλις τη δεκαετία του 90 με την ανακάλυψη του ενισχυτή της ίνας προσμίξεων με ιόντα Ερβίου (Erbium Fiber Doped Amplifier -EDFA). Οι εμπορικά



Σχήμα 1-2: Παράδειγμα οπτικού δικτύου πρώτης γενιάς. Οι παχιές γραμμές συμβολίζουν τις οπτικές ίνες που διασύνδεουν τους κόμβους του δικτύου.

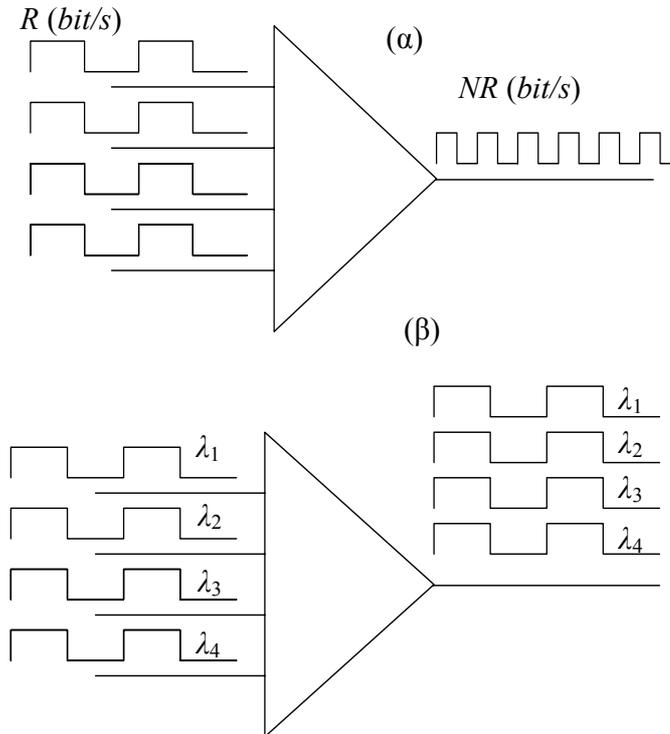
διαθέσιμοι EDFA διαθέτουν ένα εύρος ζώνης ενίσχυσης της τάξης των 35nm το οποίο αναμένεται να αυξηθεί με τη χρήση πιο εξωτικών υλικών στα 80nm.

1.3 ΠΡΩΤΗ ΓΕΝΙΑ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Παρά το γεγονός ότι, όπως είδαμε στα παραπάνω η οπτική ίνα δεν είναι ιδανική, εντούτοις επιτρέπει τη διάδοση σημάτων με πολύ υψηλό ρυθμό. Στην πρώτη γενιά των οπτικών δικτύων οι οπτικές ίνες χρησιμοποιούνται μεν ως μέσα μετάδοσης, αλλά σε κάθε κόμβο το οπτικό σήμα μετατρέπεται σε ηλεκτρονικό και η δρομολόγησή του γίνεται σε ηλεκτρονικό επίπεδο με παραδοσιακό τρόπο [Ram01, §1.1]. Ένα παράδειγμα δικτύου πρώτης γενιάς απεικονίζεται στο σχήμα 1-2. Οι ζεύξεις σημείο προς σημείο χρησιμοποιούν την οπτική ίνα ως μέσο μετάδοσης αλλά οι κόμβοι χειρίζονται το σήμα ηλεκτρονικά.

Η πρώτη γενιά οπτικών δικτύων εκμεταλλεύεται το μεγάλο εύρος ζώνης των οπτικών ινών για να επιτύχει ρυθμούς της τάξεως των μερικών δεκάδων Mb/s. Μερικά παραδείγματα οπτικών δικτύων πρώτης γενιάς είναι το SONET(Synchronous Optical NETwork – Σύγχρονο Οπτικό Δίκτυο) και το SDH (Synchronous Digital Hierarchy – Σύγχρονη Ψηφιακή Ιεραρχία) που αποτελούν τα δίκτυα κορμού στην τηλεπικοινωνιακή υποδομή των ΗΠΑ και της Ευρώπης αντίστοιχα. Άλλο παράδειγμα δικτύου πρώτης γενιάς είναι το FDDI (Fiber Distributed Data Interface – Διεπαφή Διαμοιραζομένων Δεδομένων με Οπτική Ίνα).

Επειδή η ταχύτητα των ηλεκτρονικών στοιχείων είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τις δυνατότητες της οπτικής ίνας, τα δίκτυα πρώτης γενιάς παρουσιάζουν το φαινόμενο της *συμφόρησης* (bottleneck). Αν η σύνδεση δύο τερματικών κόμβων περνάει από πολλούς ενδιάμεσους κόμβους, πρέπει να λάβουν χώρα πολλές οπτικό-ηλεκτρονικές μετατροπές του σήματος πριν φτάσει στον προορισμό του κάτι που προκαλεί καθυστερήσεις και προβλήματα, ιδιαίτερα σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου.

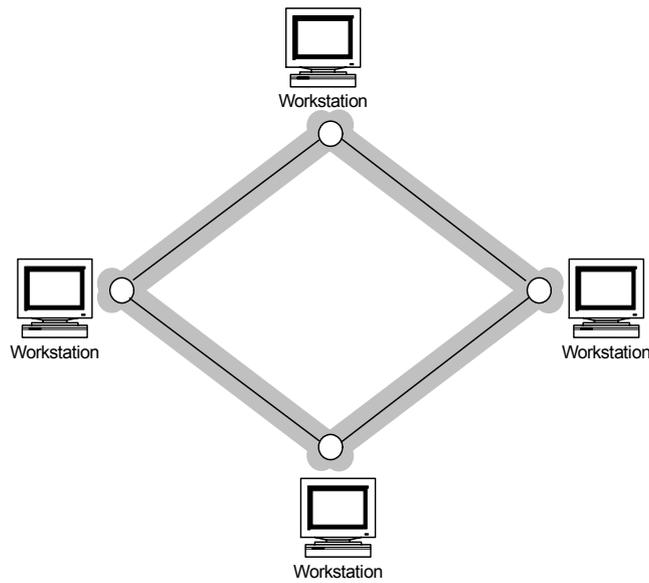


Σχήμα 1-3: (α) Πολυπλεξία στο πεδίο του χρόνου και (β) πολυπλεξία μήκους κύματος

1.4 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑΣ

Παρά το γεγονός ότι τα οπτικά δίκτυα πρώτης γενιάς έχουν βελτιωμένη απόδοση ως προς το ρυθμό μετάδοσης σε σχέση με τα συμβατικά δίκτυα χωρίς οπτικές ίνες, εντούτοις είναι φανερό ότι τελικά χρησιμοποιείται ένα μικρό τμήμα του τεράστιου εύρους ζώνης που είναι διαθέσιμο σε μία οπτική ίνα. Για την αποδοτικότερη χρήση του εύρους ζώνης πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια μορφή πολυπλεξίας. Στα συμβατικά δίκτυα μία μορφή πολυπλεξίας που χρησιμοποιείται συχνά είναι η *πολυπλεξία με διαίρεση στο πεδίο του χρόνου* (Time Division Multiplexing – TDM) [CHM98]. Η πολυπλεξία χρόνου απεικονίζεται στο σχήμα 1-3(α). N το πλήθος σήματα χαμηλού ρυθμού πολυπλέκονται χρονικά με τη βοήθεια ενός *χρονικού πολυπλέκτη*, σε ένα σήμα υψηλότερου ρυθμού και μεταδίδονται μέσω ενός κοινού καναλιού. Αν η πολυπλεξία χρόνου πραγματοποιηθεί ηλεκτρονικά τότε ο ρυθμός του τελικού σήματος περιορίζεται από την ταχύτητα των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων του πολυπλέκτη. Ο μέγιστος διαθέσιμος ρυθμός πολυπλεξίας είναι σήμερα 10Gb/s ενώ σε ερευνητικό στάδιο έχουν επιτευχθεί ρυθμοί 100Gb/s [HRM02]. Μία ενδιαφέρουσα εναλλακτική είναι η πολυπλεξία σημάτων σε οπτικό επίπεδο όπου τα σήματα πολυπλέκονται ενώ βρίσκονται σε οπτική μορφή, οπότε μιλάμε για οπτική πολυπλεξία στο πεδίο του χρόνου (Optical TDM – OTDM). Η ανάπτυξη συστημάτων OTDM βρίσκεται σε πειραματικό στάδιο αλλά έχει επιδειχθεί πολυπλεξία 25 καναλιών με ρυθμό 10Gb/s το κάθε ένα.

Μία άλλη τεχνική πολυπλεξίας, που έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται και σε εμπορικά δίκτυα είναι η *πολυπλεξία με διαίρεση μήκους κύματος* (Wavelength Division Multiplexing - WDM) [Bra93], [Muk00]. Σε κάθε κανάλι ανατίθεται ένα διαφορετικό μήκος κύματος (φέρουσα) όπως φαίνεται και στο σχήμα 1-3(β).



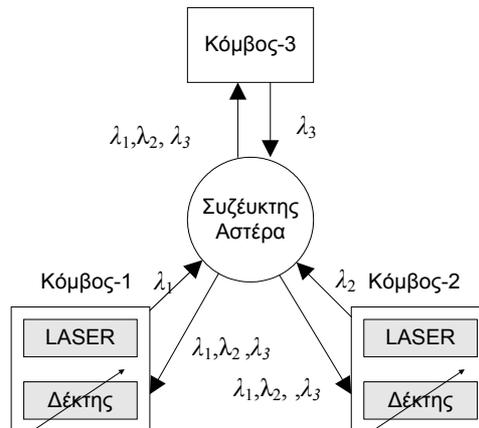
Σχήμα 1-4: Παράδειγμα δικτύου δεύτερης γενιάς. Οι παχιές γραμμές του σχήματος 1-2 έχουν προεκταθεί για να περιλάβουν και τους κόμβους, αφού η δρομολόγηση του σήματος γίνεται οπτικά

Το κάθε μήκος κύματος διαμορφώνεται βάση του αντίστοιχου σήματος και όλα τα μήκη κύματος μεταδίδονται μέσω της ίδιας οπτικής ίνας με την βοήθεια ενός *πολυπλέκτη μήκους κύματος*. Για την αποφυγή αλληλοπαρεμβολών, η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών καναλιών δεν πρέπει να είναι μικρότερη από μία τιμή που καθορίζεται από την ποιότητα των πολυπλεκτών και των αποπολυπλεκτών που χρησιμοποιούνται και το ρυθμό των πολυπλεγμένων σημάτων. Επίσης και η ίδια η οπτική ίνα δημιουργεί παρεμβολές μέσω των μη γραμμικών φαινομένων αν η ισχύς εκπομπής κάθε καναλιού ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή που εξαρτάται από τον αριθμό μήκων κύματος, την απόστασή τους, καθώς και από είδος της ίνας. Σε εμπορικό επίπεδο η μικρότερη απόσταση μεταξύ των γειτονικών καναλιών είναι 100GHz, αλλά έχουν κατά καιρούς ανακοινωθεί συστήματα που μπορούν να πολυπλέξουν και να αποπολυπλέξουν μήκη κύματος που απέχουν μέχρι και 10GHz [TAS02] .

Η πολυπλεξία μήκους κύματος δεν είναι τίποτα άλλο από την πολυπλεξία στο πεδίο των συχνοτήτων που χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον στο παρελθόν στα ασύρματα δίκτυα. Σε εμπορικό επίπεδο είναι ήδη διαθέσιμα συστήματα που επιτρέπουν την πολυπλεξία και την αποπολυπλεξία 32 μηκών κύματος με ρυθμό 10Gb/s το κάθε ένα.

1.5 ΟΠΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΓΕΝΙΑΣ

Παρά το γεγονός ότι οι τεχνικές πολυπλεξίας επιτυγχάνουν σημαντική αύξηση του ρυθμού των σημάτων που μεταδίδονται μέσω μίας οπτικής ίνας, τα ηλεκτρονικά συστήματα των οπτικών δικτύων δεν είναι σε θέση να χειριστούν τόσο μεγάλους ρυθμούς. Η δρομολόγηση των σημάτων θα πρέπει να γίνει με *οπτικό τρόπο*, δηλαδή με τρόπο που να μειώνει στο ελάχιστο τον αριθμό των απαιτούμενων οπτικό-ηλεκτρονικών μετατροπών. Τα δίκτυα στα οποία οι ενδιάμεσοι κόμβοι αναλαμβάνουν τη δρομολόγηση των οπτικών σημάτων χωρίς να τα μετατρέπουν σε ηλεκτρονική μορφή, ανήκουν στη δεύτερη γενιά οπτικών δικτύων. Στην ιδανική περίπτωση όπου κατά τη μετάδοση του σήματος λαμβάνουν χώρα μόνο δύο οπτικό-ηλεκτρονικές μετατροπές, μία στον αρχικό κόμβο και μία στον τελικό, το δίκτυο χαρακτηρίζεται ως *αμιγώς οπτικό*. Ένα τυπικό δίκτυο δεύτερης γενιάς απεικονίζεται στο σχήμα 1-4 που είναι σχεδόν ίδιο με



Σχήμα 1-5: Παράδειγμα οπτικού δικτύου μετάδοσης και επιλογής (Broadcast and Select)

το σχήμα 1-2 που απεικονίζει τα δίκτυα πρώτης γενιάς, με τη διαφορά ότι οι παχιές γραμμές που συμβολίζουν το οπτικό επίπεδο περιλαμβάνουν και τους κόμβους του δικτύου που διαχειρίζονται τα σήματα σε οπτική μορφή.

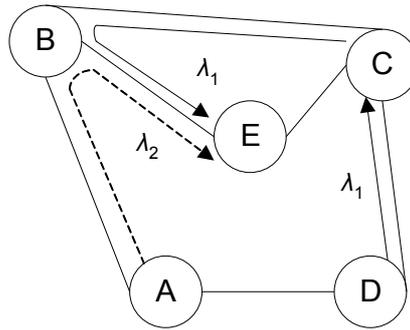
Φυσικά, η διαχείριση των σημάτων σε οπτική μορφή δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση. Για παράδειγμα η χωρική μεταγωγή (space switching) που εύκολα υλοποιείται στα συμβατικά δίκτυα, δεν μπορεί να υλοποιηθεί με την ίδια ευκολία, στα αμιγώς οπτικά δίκτυα. Ωστόσο υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές επιλογές για τη δρομολόγηση των οπτικών σημάτων με χρήση περιορισμένης χρονικής μεταγωγής.

Όπως είδαμε, κατά την πολυπλεξία μήκους κύματος τα διάφορα κανάλια βρίσκονται σε διαφορετικό μήκος κύματος και πολυπλέκονται ώστε να μεταδοθούν μέσω μίας οπτικής ίνας. Η δυνατότητα επιλογής μήκους κύματος προσφέρει έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας και το μήκος κύματος χρησιμοποιείται για τη δρομολόγηση των δεδομένων μέσα στο οπτικό δίκτυο. Υπάρχουν δύο κατηγορίες δικτύων δεύτερης γενιάς που χρησιμοποιούν την πολυπλεξία μήκους κύματος για να επιτύχουν δρομολόγηση των σημάτων μεταξύ των κόμβων: Τα δίκτυα *εκπομπής και επιλογής* (Broadcast and Select - BS) [Muk97, §1.5.1] και τα δίκτυα *δρομολόγησης μήκους κύματος* (wavelength routing –WR) [Muk97, §1.5.2].

Ένα τυπικό δίκτυο BS εικονίζεται στο σχήμα 1-5. Οι κόμβοι διαθέτουν δέκτες που έχουν τη δυνατότητα να επιλέγουν το μήκος κύματος στο οποίο συντονίζονται και πομπούς που εκπέμπουν σε ένα σταθερό μήκος κύματος διαφορετικό για κάθε κόμβο. Ο συζεύκτης αστέρα έχει την ιδιότητα να μεταφέρει, σε κάθε έξοδο του, ένα τμήμα από την ισχύ όλων των οπτικών σημάτων που βρίσκονται στις εισόδους. Για να επικοινωνήσουν δύο κόμβοι, για παράδειγμα ο 1 με το 2 θα πρέπει ο κόμβος προορισμού, έστω στη συγκεκριμένη περίπτωση ο 2 να συντονίσει το δέκτη του στο μήκος εκπομπής του κόμβου αποστολέα που είναι το λ_1 .

Τα δίκτυα BS αποτελούν μια απλή περίπτωση οπτικού δικτύου δεύτερης γενιάς και χρησιμοποιούνται συνήθως σε τοπικά και μητροπολιτικά δίκτυα διότι ο μέγιστος αριθμός κόμβων περιορίζεται από τον αριθμό των διαθέσιμων μηκών κύματος. Επιπλέον, ο συζεύκτης αστέρα, που στην ουσία διαμοιράζει την οπτική ισχύ μίας εισόδου του σε όλες τις εξόδους του, εισάγει απώλειες οι οποίες αυξάνουν με το πλήθος των κόμβων κάτι που επίσης περιορίζει το μέγιστο δυνατό αριθμό τους. Μία παρόμοια διασύνδεση κόμβων μπορεί να πραγματοποιηθεί με *φράγμα συστοιχίας κυματοδηγών* (Arrayed Waveguide Grating – AWG), όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, χωρίς να παρουσιάζεται αύξηση των απωλειών με το πλήθος των κόμβων.

Τα δίκτυα δρομολόγησης μήκους κύματος (WR) αποτελούν μία πιο εξελιγμένη μορφή οπτικών δικτύων δεύτερης γενιάς. Οι κόμβοι ενός δικτύου WR έχουν τη δυνατότητα να



Σχήμα 1-6: Παράδειγμα δικτύου δρομολόγησης μήκους κύματος

δρομολογούν το κάθε ένα από τα μήκη κύματος μίας εισόδου τους σε μία διαφορετική έξοδο τους. Ένα παράδειγμα WR δικτύου απεικονίζεται στο σχήμα 1-6. Ο κόμβος A στέλνει δεδομένα στον κόμβο E μέσω του κόμβου B με το μήκος κύματος λ_2 . Ο κόμβος C στέλνει επίσης δεδομένα στον κόμβο E μέσω του κόμβου B αλλά με τη βοήθεια του μήκους κύματος λ_1 . Ωστόσο, το μήκος κύματος λ_1 μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί σε συνδέσεις που δεν περιέχουν τα τμήματα CB και BE, όπως για παράδειγμα στη σύνδεση από το D στο C. Η δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης του μήκους κύματος οδηγεί στην μείωση του συνολικού αριθμού μηκών κύματος που απαιτούνται για την επικοινωνία των κόμβων.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, κατά μήκος ολόκληρης της διαδρομής από τον A στον E η μεταφορά των δεδομένων λάμβανε χώρα με το ίδιο μήκος κύματος (το λ_2). Ωστόσο αν ο κόμβος B είχε τον κατάλληλο εξοπλισμό θα μπορούσε να μετατρέψει το μήκος κύματος λ_1 σε κάποιο άλλο μήκος κύματος, π.χ. το λ_3 . Έτσι στο κομμάτι BE το σήμα που μεταφέρει τα δεδομένα που στέλνονται από τον A θα χρησιμοποιεί το μήκος κύματος λ_3 . Η μετατροπή από το λ_1 στο λ_3 επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός μετατροπέα μήκους κύματος.

Οι συνδέσεις μεταξύ του κόμβου A και E καθώς και μεταξύ C και E μπορούν να υλοποιηθούν με τη φιλοσοφία του *νοητού κυκλώματος* (virtual circuit) κατά την οποία στους δύο κόμβους εκχωρείται ένα κανάλι σταθερού ρυθμού μέσω του οποίου λαμβάνει χώρα η επικοινωνία. Στην περίπτωση των δικτύων WDM το κανάλι σταθερού ρυθμού αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1-6, το νοητό κύκλωμα μεταξύ του A και του E αποτελείται από τις συνδέσεις AB(λ_2) και BE(λ_2). Ο κόμβος B κάνει *μεταγωγή κυκλώματος* κατευθύνοντας το μήκος κύματος λ_2 από τον A στον E. Παρατηρούμε πως το WDM ταιριάζει απόλυτα με τη φιλοσοφία του νοητού κυκλώματος και η μεταγωγή κυκλώματος στους ενδιάμεσους κόμβους ισοδυναμεί με τη μεταγωγή μήκους κύματος, που υλοποιείται σχετικά εύκολα όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 2.

Ωστόσο, για τη μετάδοση δεδομένων είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η *μεταγωγή πακέτων* και όχι η μεταγωγή κυκλώματος. Η μεταγωγή πακέτων είναι δύσκολο να επιτευχθεί στα οπτικά δίκτυα χωρίς οπτικό-ηλεκτρονικές μετατροπές στους ενδιάμεσους κόμβους. Μάλιστα, η συνύπαρξη ενός πρωτοκόλλου που στηρίζεται στη μεταγωγή πακέτων όπως το IP με το WDM [GC98], αποτελεί ένα καίριο ερευνητικό πρόβλημα το οποίο έχει συγκεντρώσει τις προσπάθειες πολλών ερευνητών. Γενικά υπάρχουν τρεις εναλλακτικές για τη συνύπαρξη του IP με το WDM [Wei02]:

- **IP σε συνδυασμό με ζεύξεις WDM από σημείο σε σημείο.** Στην περίπτωση αυτή, η δρομολόγηση των πακέτων αναλαμβάνουν τα ανώτερα στρώματα του δικτύου και η τεχνική WDM απλά χρησιμεύει για τη μετάδοση των δεδομένων. Το οπτικό επίπεδο δεν επιφορτίζεται καθόλου με τη δρομολόγηση πακέτων.

- **IP σε συνδυασμό με επανα-διαμορφώσιμο WDM.** Στην περίπτωση αυτή, οι δρομολογητές του IP συνδέονται με επανα-προγραμματιζόμενες οπτικές διασυνδέσεις. Διαμορφώνοντας κατάλληλα τις οπτικές διασυνδέσεις οι δρομολογητές IP μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους.
- **IP σε συνδυασμό με οπτική μεταγωγή πακέτου.** Στην περίπτωση αυτή τα WDM τμήματα του δικτύου διαθέτουν τη δυνατότητα να μετάγουν πακέτα και η δρομολόγηση των πακέτων αναλαμβάνει το οπτικό τμήμα του δικτύου.

Τα οπτικά δίκτυα της πρώτης κατηγορίας υλοποιούνται εύκολα και έχουν αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό από φορείς που επιθυμούν να μεταφέρουν δεδομένα σε μεγάλες αποστάσεις. Τα δίκτυα της δεύτερης κατηγορίας είναι σχετικά πιο δύσκολο να υλοποιηθούν, αλλά επιφέρουν αισθητή βελτίωση στις επιδόσεις του δικτύου όσο αναφορά την ρυθμαπόδοση (throughput) και τη μέση καθυστέρηση των πακέτων. Ένα πρωτόκολλο που μάλλον θα αρχίσει να χρησιμοποιείται ευρύτατα στο μέλλον στα δίκτυα της δεύτερης κατηγορίας είναι η *μεταγωγή πολλαπλών πρωτοκόλλων μέσω μηκών κύματος* (MultiProtocol Lambda Switching – MPLS.) [Awd99]. Το MPLS αποτελεί μία επέκταση του πρωτοκόλλου *μεταγωγής πολλαπλών πρωτοκόλλων μέσω επικεφαλίδων* (MultiProtocol Label Switching) [RVC00] βάση του οποίου τα πακέτα δρομολογούνται εντός του οπτικού δικτύου χρησιμοποιώντας τα μήκη κύματος σαν ετικέτες. Τέλος, τα δίκτυα της τρίτης κατηγορίας που βασίζονται σε αμιγώς οπτική μεταγωγή πακέτων στο οπτικό επίπεδο βασίζονται κυρίως στο MPLS, στέλνοντας μαζί με κάθε πακέτο μία ετικέτα που περιέχει πληροφορίες για τη δρομολόγηση του πακέτου από κόμβο σε κόμβο. Οι ετικέτες διαβάζονται και σβήνονται σε κάθε κόμβο με αμιγώς οπτικό τρόπο. Μία ενδιαφέρουσα τεχνική βάση της οποίας επιτυγχάνεται η εγγραφή και η διαγραφή της ετικέτας είναι η διαμόρφωσή της σε μία υποφέρουσα (SubCarrier Multiplexing) [BOR00]. Στους ενδιάμεσους κόμβους η αποθήκευση των πακέτων γίνεται με γραμμές καθυστέρησης που απλά καθυστερούν τα πακέτα έως ότου ολοκληρωθεί η επεξεργασία της οπτικής επικεφαλίδας. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι γραμμές καθυστέρησης χρησιμοποιούνται ελλείψει άλλου αξιόπιστου τρόπου αποθήκευσης της οπτικής πληροφορίας. Η ανακάλυψη ενός τρόπου κατασκευής οπτικής μνήμης τυχαίας προσπέλασης καθώς και οπτικών λογικών πυλών θα έλυσε πολλά από τα προβλήματα της οπτικής μεταγωγής πακέτων.

1.6 ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΔΙΚΤΥΟΥ WDM

Θα κλείσουμε το κεφαλαίο αυτό με μία σύντομη αναφορά στα δομικά στοιχεία που επιτρέπουν την υλοποίηση της πολυπλεξίας μήκους κύματος. Περισσότερα στοιχεία για την κάθε τεχνολογία μπορούν να αντληθούν στις αναφορές που συνοδεύουν το κείμενο.

1.6.1 ΟΠΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Με την πολυπλεξία WDM όλα τα μήκη κύματος που αντιστοιχούν στα διάφορα κανάλια μεταδίδονται μέσω της οπτικής ίνας. Επομένως πρέπει να χρησιμοποιηθούν οπτικά φίλτρα τα οποία να επιτρέπουν το διαχωρισμό των διαφόρων μήκων κύματος στον κόμβο προορισμού αλλά και στους ενδιάμεσους κόμβους που αναλαμβάνουν την δρομολόγηση των μήκων κύματος. Η παρούσα διδακτορική διατριβή που έχει ως θέμα τη μελέτη του *φράγματος συστοιχίας κυματοδηγών*, που στην ουσία αποτελεί ένα φίλτρο με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους και το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν πολυπλέκτης και αποπολυπλέκτης μήκων κύματος. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια λεπτομερέστερη ανάλυση και άλλων λύσεων που κατά καιρούς έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία με σκοπό το διαχωρισμό των μηκών κύματος ενός συστήματος WDM όπως τα *φράγματα Bragg* (Bragg Gratings), τα *ακουστικό-οπτικά φίλτρα* (Acousto-optical filters) και τα *φίλτρα λεπτών διηλεκτρικών υμενίων* (thin film dielectric filters).

Ορισμένα γενικά επιθυμητά χαρακτηριστικά των οπτικών φίλτρων είναι τα εξής [RS98, §3.1]:

- **Χαμηλές απώλειες.** Η απώλεια ισχύος μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του οπτικού φίλτρου πρέπει να είναι χαμηλή.
- **Λειτουργία ανεξάρτητη από την πόλωση.** Εξαιτίας του φαινομένου της PMD που αναφέραμε στην παράγραφο 1.2, η πολωτική κατάσταση του σήματος μεταβάλλεται τυχαία. Αν τα χαρακτηριστικά των φίλτρων εξαρτώνται από την πολωτική κατάσταση του σήματος τότε η ισχύς του σήματος εξόδου θα παρουσιάζει τυχαίες αυξομειώσεις πράγμα που δεν είναι καθόλου επιθυμητό.
- **Ανεξαρτησία στις θερμοκρασιακές μεταβολές.** Τα χαρακτηριστικά των φίλτρων όπως το κεντρικό τους μήκος κύματος ή το εύρος 3dB της συνάρτησης μεταφοράς συνήθως εξαρτώνται και από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Η εξάρτηση αυτή πρέπει να είναι μικρή ώστε τα συστήματα WDM που υποστηρίζουν, να λειτουργούν σε ένα μεγάλο εύρος θερμοκρασιακών μεταβολών.
- **Ικανότητα σειριακής διασύνδεσης.** Η συνάρτηση μεταφοράς των φίλτρων πρέπει να είναι τέτοια ώστε τα φίλτρα να μπορούν να διασυνδεθούν σειριακά. Ιδανικά, η συνάρτηση μεταφοράς θα πρέπει να είναι ορθογώνια αλλά στην πράξη, αυτό είναι αδύνατο να επιτευχθεί.
- **Υψηλή απομόνωση από τα γειτονικά κανάλια.** Το φίλτρο θα πρέπει να αποκόπτει ικανοποιητικά τα γειτονικά μήκη κύματος ώστε να μην παρουσιάζεται διαφωνία (crosstalk) μεταξύ των καναλιών WDM. Διαφορετικά η πιθανότητα σφάλματος (όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής) αυξάνεται.

1.6.2 ΟΠΤΙΚΟΙ ΕΝΙΣΧΥΤΕΣ

Η ανακάλυψη του ενισχυτή οπτικής ίνας με προσμίξεις Ερβίου (Erbium Doped Fiber Amplifier – EDFA) [Min91] στη δεκαετία του 90, έδωσε μεγάλη ώθηση στα οπτικά δίκτυα επειδή κατέργησε την ανάγκη για οπτικό-ηλεκτρονική αναγέννηση του σήματος. Άλλα είδη ενισχυτών όπως οι ενισχυτές ημιαγωγού χρησιμοποιούνται για την μετατροπή μήκους κύματος. Οι οπτικοί ενισχυτές βασίζονται στο φαινόμενο της ενίσχυσης του φωτός μέσω εξαναγκασμένης εκπομπής σύμφωνα με την οποία, όταν ένα φωτόνιο κατάλληλου μήκους κύματος προσπέσει σε ένα διεγερμένο φορέα (που μπορεί να είναι ένα ηλεκτρόνιο ή ένα ιόν), τότε ο φορέας μεταναστεύει σε χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη εκπέμποντας ένα φωτόνιο που διαθέτει τα ίδια χαρακτηριστικά με το προσπίπτον φωτόνιο. Τα δύο φωτόνια συνεχίζουν να ταξιδεύουν και να ενισχύονται με τον τρόπο αυτό. Εκτός της εξαναγκασμένης εκπομπής υπάρχει και η αυθόρμητη εκπομπή κατά την οποία τα ηλεκτρόνια ή ιόντα αποδιηγείρονται τυχαία εκπέμποντας φωτόνια. Τα φωτόνια αυθόρμητης εκπομπής ενισχύονται και αυτά μέσω εξαναγκασμένης εκπομπής και προκαλούν το θόρυβο λόγω ενισχυμένης αυθόρμητης εκπομπής (Amplified Spontaneous Emission – ASE). Υπάρχουν δύο είδη οπτικού ενισχυτή που βασίζονται στην εξαναγκασμένη εκπομπή:

- **Ενισχυτές Οπτικής Ίνας με Προσμίξεις Ερβίου (EDFA),** στους οποίους τα φωτόνια ενισχύονται από ιόντα Ερβίου τα οποία έχουν τοποθετηθεί με κατάλληλο τρόπο μέσα σε μία οπτική ίνα. Τα ιόντα του Ερβίου διεγείρονται με τη βοήθεια μίας οπτικής πηγής *άντλησης* στα 980nm, και είναι σε θέση να ενισχύσουν φωτόνια των οποίων το μήκος κύματος είναι μέσα στο διάστημα από 1525nm έως στα 1570nm.
- **Οπτικοί Ενισχυτές Ημιαγωγού (Semiconductor Optical Amplifiers – SOA)** [Gre93, §6.3] στους οποίους τα φωτόνια ενισχύονται από διεγερμένα ηλεκτρόνια στην επαφή μίας διόδου pn ή μίας *ετεροδομής* που αποτελείται από πολλά στρώματα pn. Τα

ηλεκτρόνια διεγείρονται με την εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου (ηλεκτρική άντληση) και μέσω της εξαναγκασμένης εκπομπής ενισχύουν τα προσπίπτοντα φωτόνια.

Οι EDFA γενικά έχουν καλύτερες επιδόσεις από τους SOA επειδή έχουν μεγαλύτερο κέρδος ενίσχυσης, αναισθησία στην πόλωση και δεν παρουσιάζουν διαφωνία σε αντίθεση με τους SOA. Ωστόσο οι SOA βρίσκουν άλλες εφαρμογές όπως διακόπτες [Stu00] ή μετατροπές μήκους κύματος [Yoo96]. Ένα άλλο είδος ενισχυτή είναι ο *ενισχυτής Raman* [Isl02], ο οποίος εκμεταλλεύεται το μη γραμμικό φαινόμενο της εξαναγκασμένης σκέδασης Raman για να ενισχύσει το οπτικό σήμα. Οι ενισχυτές Raman έχουν το πλεονέκτημα ότι προσφέρουν κατανομημένη ενίσχυση και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μία ζεύξη μαζί με τους ενισχυτές EDFA με σκοπό να ελαττώσουν τον απαιτούμενο αριθμό ενισχυτών EDFA και να μειώσουν την ισχύ εκπομπής.

1.6.3 ΟΠΤΙΚΟΙ ΠΟΜΠΟΙ

Οι δίοδοι LASER [Gre93, §5],[SIA92] χρησιμοποιούνται ευρύτατα ως οπτικοί πομποί σε δίκτυα WDM εξαιτίας των εξαιρετικών φασματικών χαρακτηριστικών του φωτός που παράγουν. Η δίοδος LASER ημιαγωγού αποτελείται από μία δίοδο ημιαγωγού η οποία έχει ενσωματωθεί στο εσωτερικό μίας ανακλαστικής κοιλότητας. Η θετική ανάδραση που δημιουργείται αναγκάζει το LASER να ταλαντώνεται. Η έναρξη των ταλαντώσεων οφείλεται στο φαινόμενο της αυθόρμητης εκπομπής ενώ η διατήρησή τους στο φαινόμενο της εξαναγκασμένης εκπομπής των φωτονίων. Η τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος για την οποία το LASER αρχίζει να εκπέμπει φως λόγω εξαναγκασμένης εκπομπής ονομάζεται ρεύμα καταφλίου. Στην πράξη, ως ενεργός περιοχή χρησιμοποιείται συνήθως μία ετεροδομή για να αυξήσει την πυκνότητα ζευγών ηλεκτρονίων και οπών και να επιτύχει καλύτερο περιορισμό του φωτός μέσα σε αυτήν. Λόγω αυτού του περιορισμού των φορέων και της οπτικής ισχύος, το ρεύμα καταφλίου μειώνεται. Ένα άλλο είδος περιορισμού των φορέων, ο *κβαντικός περιορισμός*, λαμβάνει χώρα όταν η ενεργός περιοχή έχει πολύ μικρές διαστάσεις όπως στα LASER κβαντικών φρεάτων.

Οι οπτικές ταλαντώσεις συγκεντρώνονται γύρω από τα διάφορα μήκη κύματος συντονισμού που υποστηρίζει η οπτική κοιλότητα και ονομάζονται τρόποι του LASER. Για εφαρμογές WDM όπου απαιτούμε το παραγόμενο φως να συγκεντρώνεται γύρω από ένα μόνο μήκος κύματος συντονισμού, χρησιμοποιούμε τα LASER μονού τρόπου όπου με διάφορες μεθόδους επιτυγχάνουμε την μείωση της ισχύος των πλευρικών τρόπων γύρω από το μήκος κύματος που επιθυμούμε.

Ανάλογα με τον τρόπο που επιτυγχάνεται η καταστολή των πλευρικών τρόπων τα LASER ημιαγωγού χωρίζονται στις εξής κατηγορίες [RS98, §3.5]:

- **LASER εξωτερικής κοιλότητας.** Στα LASER αυτά, η κοιλότητα με τη δίοδο ημιαγωγού τοποθετείται μέσα σε μία δεύτερη κοιλότητα που προσφέρει ένα επιπλέον φίλτράρισμα των ανεπιθύμητων τρόπων του LASER.
- **LASER κατανομημένου ανακλαστήρα Bragg (Distributed Bragg Reflector- DBR).** Στα LASER DBR χρησιμοποιούνται φράγματα Bragg αριστερά και δεξιά της ενεργού περιοχής η οποία αναλαμβάνει την καταστολή των πλευρικών τρόπων
- **LASER κατανομημένης ανάδρασης Bragg (Distributed Bragg Feedback – DFB) ,** όπου μέσα στην ίδια την ενεργό περιοχή χρησιμοποιείται φράγμα Bragg που καταστέλλει την ισχύ των πλευρικών τρόπων.

- **LASER κοιλότητας κάθετης εκπομπής**, όπου η κοιλότητα είναι τόσο μικρή που τα μήκη κύματος που υποστηρίζει απέχουν μεταξύ τους αρκετά και δεν διεγείρονται από το ενεργό υλικό.

1.6.4 ΟΠΤΙΚΟΙ ΔΕΚΤΕΣ

Η μετατροπή του σήματος από οπτικό (ρεύμα φωτονίων) σε ηλεκτρονικό (ρεύμα ηλεκτρονίων) επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των φωτοδίοδων. Η λειτουργία μίας φωτοδίοδου στηρίζεται στο φαινόμενο σύμφωνα με το οποίο εάν ένα φωτόνιο προσπέσει μέσα σε έναν ημιαγωγό, τότε θα απορροφηθεί από ένα ηλεκτρόνιο το οποίο θα μεταναστεύσει από την στοιβάδα σθένους στην στοιβάδα αγωγιμότητας. Αν στο κύκλωμα εφαρμοσθεί εξωτερική ηλεκτρική τάση τότε τα ηλεκτρόνια που μετανάστευσαν στη ζώνη αγωγιμότητας θα δημιουργήσουν ηλεκτρικό ρεύμα. Στην πράξη δεν χρησιμοποιείται ένα απλό στρώμα ημιαγωγού επειδή πολλά από τα παραγόμενα ηλεκτρόνια επανασυνδέονται με οπές με αποτέλεσμα να παράγεται ελάχιστο ηλεκτρικό ρεύμα. Καλύτερα αποτελέσματα μπορούν να επιτευχθούν με τη χρήση ανάστροφα πολωμένων δίοδων pn όπου τα φωτόνια διεγείρουν τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην περιοχή p κοντά στην επαφή pn τα οποία με τη βοήθεια της εξωτερικής τάσης φτάνουν στην περιοχή n. Το ίδιο συμβαίνει και με τις οπές της περιοχής n κοντά στην επαφή pn. Στα οπτικά δίκτυα συνήθως χρησιμοποιούνται δύο παραλλαγές των δίοδων pn [Sin96]:

- **Φωτοδίοδοι PIN**, στις οποίες ένα στρώμα ημιαγωγού χωρίς προσμείξεις προστίθεται ανάμεσα στα στρώματα p και n και το οποίο δεν απορροφά το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός. Το στρώμα αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μειώσει το ποσοστό των φωτονίων που διεγείρουν ηλεκτρόνια μακριά από την επαφή pn και κινδυνεύουν να επανασυνδεθούν με οπές.
- **Φωτοδίοδοι χιονοστιβάδας**, όπου το φαινόμενο του πολλαπλασιασμού φορέων με χιονοστιβάδα (avalanche multiplication) χρησιμοποιείται για να ενισχύσει το ηλεκτρικό ρεύμα στο εσωτερικό της φωτοδίοδου.

1.6.5 ΜΕΤΑΓΩΓΕΙΣ ΧΩΡΟΥ

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 1.5, η υλοποίηση μεγάλων οπτικών μεταγωγέων χώρου (optical space switches) αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα με την υπάρχουσα τεχνολογία. Οπτικοί μεταγωγείς με μεγάλο αριθμό εισόδων και εξόδων συνήθως κατασκευάζονται με χρήση πολλών μικρότερων μεταγωγέων (συνήθως 2×2). Για την υλοποίηση οπτικών μεταγωγέων έχουν κατά καιρούς προταθεί οι εξής λύσεις [RS98, §3.7]:

- **Μηχανικοί μεταγωγείς**, στους οποίους η μεταγωγή, γίνεται με μηχανικό τρόπο, είτε μετακινώντας ένα κάτοπτρο εντός και εκτός ενός οπτικού μονοπατιού, είτε μεταβάλλοντας το μήκος σύζευξης μεταξύ δύο κυματοδηγών και επομένως και του ποσοστού της οπτικής ισχύος που εξέρχεται από κάθε κυματοδηγό.
- **Ηλεκτρο-οπτικοί μεταγωγείς**, στους οποίους το μήκος σύζευξης μεταξύ δύο κυματοδηγών μεταβάλλεται, εφαρμόζοντας μία ηλεκτρική τάση στην περιοχή σύζευξης των κυματοδηγών που μεταβάλλει το δείκτη διάθλασης του υλικού. Ως υλικό κατασκευής των κυματοδηγών συνήθως χρησιμοποιείται το LiNbO_3 (Νιοβικό Λίθιο).
- **Θερμο-οπτικοί μεταγωγείς**, στους οποίους η μεταβολή του δείκτη διάθλασης του υλικού λαμβάνει χώρα με μεταβολή της θερμοκρασίας.

- **Διακόπτες Ημιαγωγικού Ενισχυτή**, στους οποίους η διέλευση ή μη του οπτικού σήματος επιτρέπεται ανάλογα με το αν εξασκείται ηλεκτρική τάση πόλωσης στο SOA. Αν εξασκείται τάση πόλωσης τότε ο SOA επιτρέπει τη διέλευση του οπτικού σήματος το οποίο και ενισχύεται λόγω εξαναγκασμένης εκπομπής. Αν δεν υπάρχει τάση πόλωσης τότε ο SOA απλά απορροφά μέρος της οπτικής ισχύος.

Οι μηχανικοί μεταγωγείς έχουν χαμηλό επίπεδο διαφωνίας, χαμηλή ευαισθησία στην πόλωση και εισάγουν χαμηλές απώλειες, αλλά ο χρόνος μεταγωγής από την μία έξοδο σε μία άλλη είναι αργός, της τάξεως των ms. Οι ηλεκτρο-οπτικοί μεταγωγείς έχουν πολύ μικρούς χρόνους μεταγωγής (μερικά ps) αλλά είναι σχετικά ευαίσθητοι στην πόλωση του σήματος. Μπορούν να ολοκληρωθούν στο ίδιο υπόστρωμα ώστε να κατασκευαστεί ένας μεγαλύτερος μεταγωγέας. Οι θερμο-οπτικοί μεταγωγείς παρουσιάζουν προβλήματα διαφωνίας από τη μία έξοδο στην άλλη και έχουν σχετικά μεγάλους χρόνους μεταγωγής. Τέλος οι διακόπτες που χρησιμοποιούν SOA έχουν μικρούς χρόνους μεταφοράς (μερικά ns) από την κατάσταση διέλευσης στην κατάσταση αποκοπής αλλά παρουσιάζουν ευαισθησία στην πόλωση. Οι διακόπτες SOA και οι ηλεκτρο-οπτικοί μεταγωγείς συχνά χρησιμοποιούνται και ως εξωτερικοί διαμορφωτές.

1.6.6 ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΙΣ ΜΗΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

Στην παράγραφο 1.5 είδαμε πως αν το οπτικό δίκτυο έχει τη δυνατότητα μετατροπής του μήκους κύματος τότε η δρομολόγηση μήκους κύματος γίνεται πιο αποτελεσματικά. Οι λύσεις που έχουν προταθεί για την υλοποίηση ενός μετατροπέα μήκους κύματος είναι οι εξής [Muk97, §2.6.1], [Stu00], [Yoo96]:

- **Οπτικό-ηλεκτρονική μετατροπή.** Στους οπτικό-ηλεκτρονικούς μετατροπείς το οπτικό σήμα μετατρέπεται σε ηλεκτρικό το οποίο διαμορφώνει ένα LASER που είναι συντονισμένο στο επιθυμητό μήκος κύματος.
- **Διαμόρφωση Απολαβής σε SOA.** Η διαμόρφωση απολαβής σε ένα SOA είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η απολαβή του SOA εξαρτάται από την ισχύ του σήματος που το διατρέχει. Εξαιτίας των μεταβολών της απολαβής του ενισχυτή, ένα μονοχρωματικό κύμα σε ένα μήκος κύματος λ_1 διαμορφώνεται κατά πλάτος από ένα άλλο σήμα που βρίσκεται σε ένα άλλο μήκος κύματος λ_2 , οπότε η πληροφορία του σήματος στο λ_2 μεταφέρεται στο μήκος κύματος λ_1 .
- **Διαμόρφωση Φάσης σε SOA.** Ένα κύμα το οποίο διαδίδεται μέσα στον ενισχυτή στο μήκος κύματος λ_2 επηρεάζει την τιμή του δείκτη διάθλασης του SOA, που με την σειρά του επηρεάζει τη φάση ενός μονοχρωματικού κύματος σε ένα άλλο μήκος κύματος λ_1 . Με κατάλληλη συμβολομετρική συνδεσμολογία δύο SOA, οι μεταβολές της φάσης μετατρέπονται σε μεταβολές πλάτους, οπότε το μονοχρωματικό κύμα στο λ_1 διαμορφώνεται κατά πλάτος από το σήμα του λ_2 .
- **Μίξη Κυμάτων σε SOA.** Κατά τη μέθοδο αυτή, δύο οπτικά κύματα που διαδίδονται μέσα στον ενισχυτή γεννούν λόγω του φαινομένου της *μίξης τεσσάρων κυμάτων* ένα άλλο κύμα, με μήκος κύματος που εξαρτάται από τα μήκη κύματος των δύο αρχικών κυμάτων. Αν το ένα από τα αρχικά σήματα είναι διαμορφωμένο τότε η διαμόρφωση αυτή μεταφέρεται και στο παραγόμενο κύμα με αποτέλεσμα την μετατροπή μήκους κύματος.

Οι οπτικό-ηλεκτρονικοί μετατροπείς συνήθως οδηγούν σε απώλεια της *διαφάνειας* των δεδομένων. Με τον όρο *διαφάνεια δεδομένων* εννοούμε την ιδιότητα ενός συστήματος να επεξεργάζεται δεδομένα ανεξαρτήτως του ρυθμού τους και του είδους διαμόρφωσης. Η διαμόρφωση απολαβής έχει το μειονέκτημα πως λειτουργεί μόνο για κατά πλάτος διαμορφωμένα

σήματα και το νέο σήμα έχει μικρό λόγο σβέσης (πηλίκο ισχύος του «0» προς την ισχύ του bit «1»). Στη διαμόρφωση φάσης επιτυγχάνεται καλύτερος λόγος σβέσης αλλά και οι δύο τεχνικές λειτουργούν για σήματα μέχρι 10Gb/s. Τέλος, η μίξη τεσσάρων κυμάτων προσφέρει διαφάνεια δεδομένων αλλά η απόδοση της τεχνικής πέφτει σημαντικά όσο απομακρύνεται το παραγόμενο μήκος κύματος από το μήκος κύματος του αρχικού σήματος

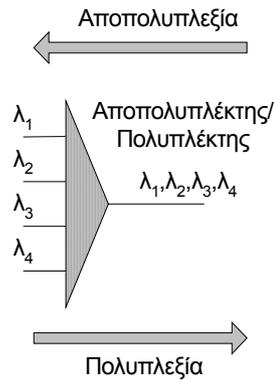
2. ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΗΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

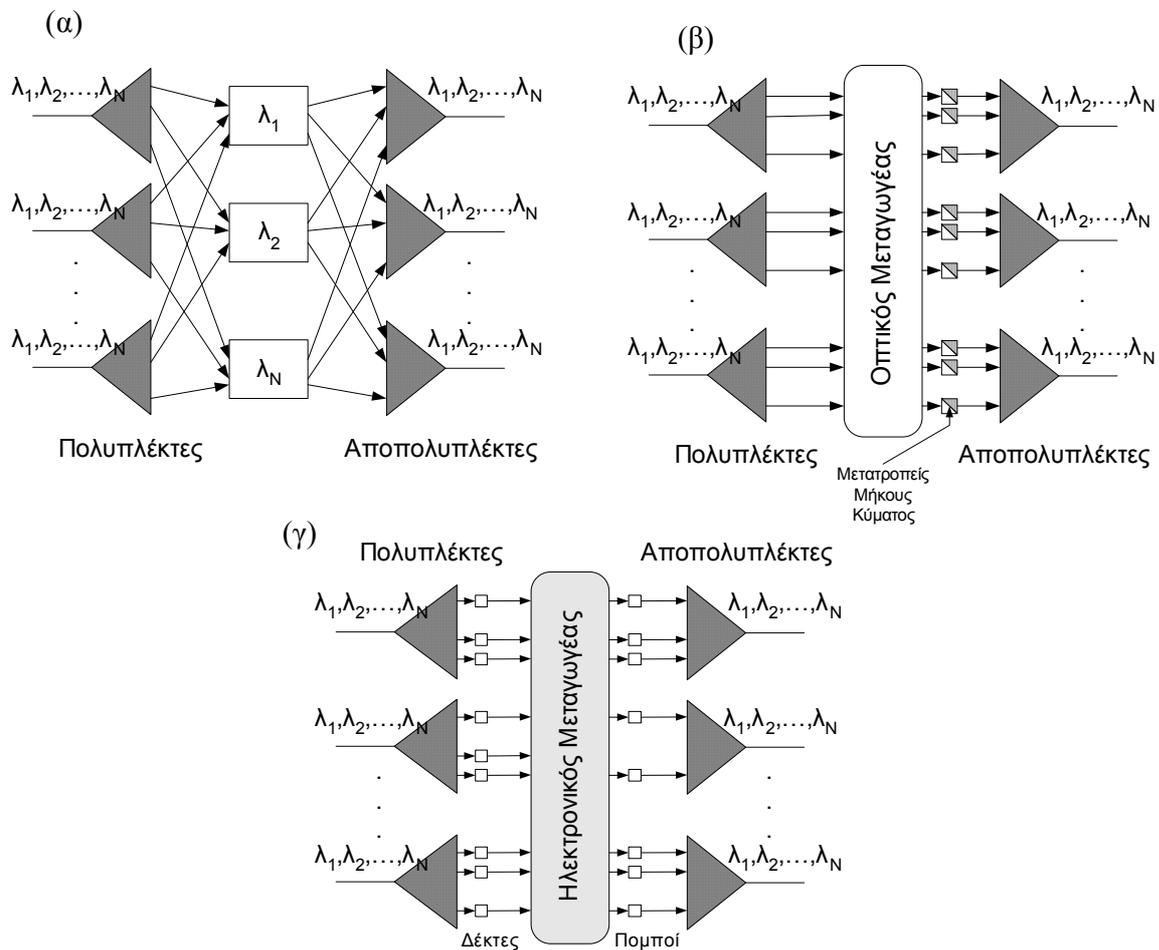
Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τα οπτικά δίκτυα που χρησιμοποιούν την τεχνική της πολυπλεξία μήκους κύματος (WDM) [Bra90]. Στην τεχνική WDM, τα διάφορα κανάλια βρίσκονται σε διαφορετικά μήκη κύματος τα οποία μεταδίδονται από την ίδια οπτική ίνα. Επομένως, κάθε κόμβος του δικτύου θα πρέπει να συνδυάζει όλα τα μήκη κύματος σε ένα σήμα και να το οδηγεί σε μία οπτική ίνα (πολυπλεξία). Επίσης, κάθε κόμβος θα πρέπει να διαχωρίζει τα διάφορα μήκη κύματος τα οποία καταλήγουν σε αυτόν μέσω μίας οπτικής ίνας (αποπολυπλεξία). Οι δύο παραπάνω λειτουργίες πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των πολυπλεκτών και των αποπολυπλεκτών μήκους κύματος, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2-1.

Οι πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες μήκους κύματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή των διασυνδεδετών μήκους κύματος (Wavelength cross-Connects – WXC). Τρία παραδείγματα διαφορετικών αρχιτεκτονικών WXC απεικονίζονται στο σχήμα 2-2 [RS98, §8.2.4]. Ο WXC του σχήματος 2-2(α) χρησιμοποιεί έναν αποπολυπλέκτη σε καθεμία από τις M εισόδους του, ο οποίος διαχωρίζει τα διάφορα μήκη κύματος. Τα κανάλια που βρίσκονται στο ίδιο μήκος κύματος διέρχονται μέσω ενός οπτικού μεταγωγέα $N \times N$, ο οποίος αναλαμβάνει να οδηγήσει κάθε κανάλι στον πολυπλέκτη της κατάλληλης εξόδου. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται η δρομολόγηση του κάθε καναλιού από τις εισόδους του WXC στις εξόδους του. Ο WXC του σχήματος 2-2(α) υλοποιείται σχετικά εύκολα, καθώς δεν χρησιμοποιεί οπτικούς μεταγωγείς με πολλές εισόδους και εξόδους αλλά το σημαντικότερο μειονέκτημά του αποτελεί το γεγονός ότι δεν επιτρέπει τη μετατροπή του μήκους κύματος των καναλιών και επομένως την επαναχρησιμοποίηση μήκους κύματος (ενότητα 1.5).

Αντίθετα ο WXC του σχήματος 2-2(β) χρησιμοποιεί μετατροπείς μήκους κύματος που επιτρέπουν την αλλαγή του μήκους κύματος των καναλιών και την επαναχρησιμοποίηση μήκους κύματος στο δίκτυο. Η μεταγωγή των καναλιών λαμβάνει χώρα μέσω ενός $MN \times MN$ μεταγωγέα και πριν κάθε κανάλι καταλήξει στον κατάλληλο πολυπλέκτη, οδηγείται σε έναν μετατροπέα μήκους κύματος. Η αρχιτεκτονική του σχήματος 2-2(β) είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με αυτήν του σχήματος 2-2(α) επειδή χρησιμοποιούνται MN μετατροπείς μήκους κύματος οι οποίοι και αυξάνουν το κόστος. Ωστόσο το WXC του σχήματος 2-2(β) προσδίδει μεγαλύτερη ευελιξία στη δρομολόγηση του μήκους κύματος. Ας σημειωθεί πως υπάρχουν και άλλες αρχιτεκτονικές WXC οι οποίες χρησιμοποιούν μικρότερο αριθμό μετατροπέων μήκους κύματος θυσιάζοντας μέρος της ευελιξίας που επιφέρει η δυναμική δρομολόγηση μήκους κύματος του 2-2(β) με σκοπό να μειωθεί το κόστος κατασκευής.

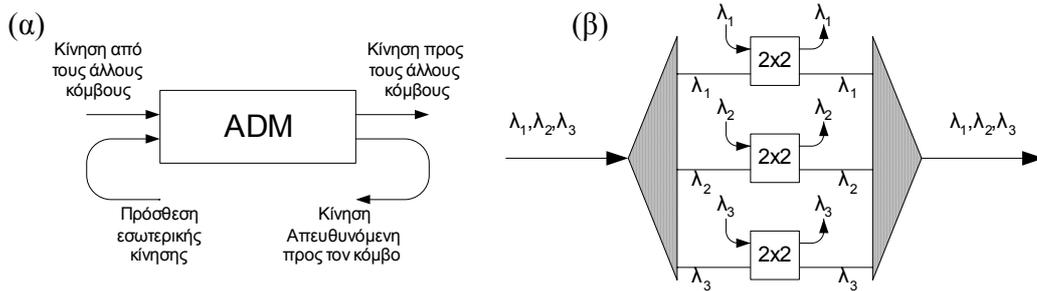


Σχήμα 2-1: Πολυπλεξία και Αποπολυπλεξία Μήκους Κύματος

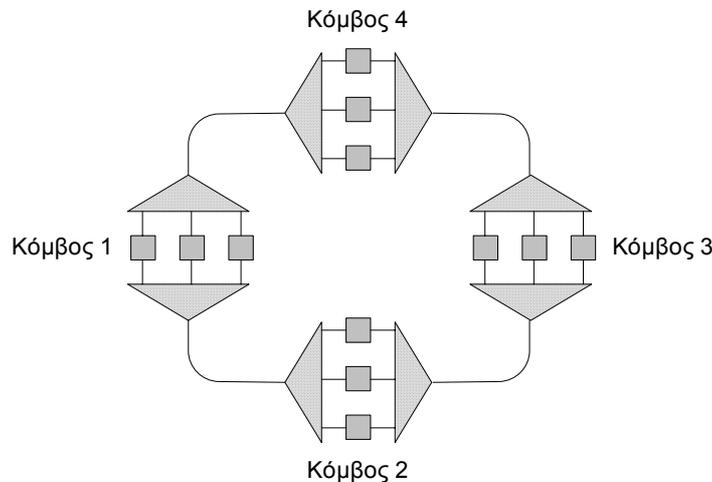


Σχήμα 2-2: (α) αμιγώς οπτικός WXC χωρίς μετατροπή μήκους κύματος, (β) αμιγώς οπτικός WXC με μετατροπή μήκους κύματος, (γ) WXC με ηλεκτρονική μεταγωγή

Στην εναλλακτική αρχιτεκτονική του σχήματος 2-2(γ), τα οπτικά σήματα μετατρέπονται σε ηλεκτρονικά τα οποία μεταγονται από έναν ηλεκτρονικό μεταγωγέα. Στις εξόδους του μεταγωγέα υπάρχουν οπτικές πηγές που επαναφέρουν το ηλεκτρονικό σήμα σε οπτική μορφή το οποίο βρίσκεται είτε στο ίδιο, είτε σε διαφορετικό μήκος κύματος από το αρχικό. Αν οι WXC



Σχήμα 2-3: (α) Λειτουργία του ADM και (β) παράδειγμα υλοποίησης με τη χρήση ενός πολυπλέκτη, ενός αποπολυπλέκτη και 2x2 μεταγωγέων.



Σχήμα 2-4: Οπτικό δίκτυο με τοπολογία δακτυλίου.

των κόμβων έχουν υλοποιηθεί βάση της αρχιτεκτονικής 2-2(γ) τότε το οπτικό δίκτυο θα διαθέτει τη δυνατότητα επαναχρησιμοποίησης του μήκους κύματος. Επίσης, πρέπει να σημειωθεί πως ένας ηλεκτρονικός μεταγωγέας με πολλές εισόδους και εξόδους υλοποιείται πολύ πιο εύκολα από τον αντίστοιχο οπτικό. Ωστόσο, εξαιτίας του ηλεκτρονικού τρόπου που επιτυγχάνεται η μεταγωγή των καναλιών, ο ρυθμός μετάδοσης περιορίζεται (γύρω στα 2.5Gb/s). Σε αντίθεση οι αμιγώς οπτικές αρχιτεκτονικές των σχημάτων 2-2(α) και 2-2(β) μπορούν να υποστηρίξουν και ρυθμούς μετάδοσης μεγαλύτερους από 10Gb/s. Ένα άλλο πρόβλημα που θέτει η αρχιτεκτονική του σχήματος 2-2(γ) είναι η περιορισμένη διαφάνεια των δεδομένων. Για ρυθμούς μεγαλύτερους των μερικών εκατοντάδων Mb/s, ο χρονισμός του σήματος θα πρέπει να ανακτηθεί μέσα στον ηλεκτρονικό μεταγωγέα. Η διαδικασία ανάκτησης του χρονισμού οδηγεί σε απώλεια της διαφάνειας αφού εξαρτάται άμεσα από το είδος της διαμόρφωσης των δεδομένων.

Εάν ορισμένες από τις εισόδους των WXC συνδεθούν με πηγές δεδομένων που βρίσκονται στο εσωτερικό των κόμβων, τότε κάθε ενδιάμεσος κόμβος έχει τη δυνατότητα να προσθέτει και να αφαιρεί κανάλια από τα διάφορα μήκη κύματος. Στην ειδική περίπτωση όπου ο WXC διαθέτει δύο εισόδους και δύο εξόδους, εκ των οποίων μία είσοδος αφιερώνεται στα δεδομένα που παράγει ο ίδιος ο κόμβος και μία έξοδος στα δεδομένα που προορίζονται προς αυτόν, ο WXC ονομάζεται πολυπλέκτης προσθήκης / απομάστευσης (Add/Drop Multiplexer – ADM) και εικονίζεται στο σχήμα 2-3(α). Το σχήμα 2-3(β) δείχνει έναν ADM με τρία μήκη κύματος ο οποίος έχει υλοποιηθεί με μία πιο απλή αρχιτεκτονική από αυτήν του σχήματος 2-2(α). Χρησιμοποιείται ένας πολυπλέκτης και ένας αποπολυπλέκτης και τα δεδομένα του κόμβου

σε κάθε μήκος κύματος προστίθενται ή αφαιρούνται σε έναν από τους 2x2 μεταγωγείς μετά την αποπολυπλεξία.

Ο ADM χρησιμοποιείται συχνά σε δίκτυα κορμού με τοπολογία δακτυλίου. Ένα τέτοιο παράδειγμα απεικονίζεται στο σχήμα 2-4. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, κάθε κόμβος συνδέεται με το δίκτυο μέσω ενός ADM το οποίο αναλαμβάνει τη δρομολόγηση των καναλιών μέσω τριών μηκών κύματος. Το δίκτυο δακτυλίου επιτρέπει την επαναχρησιμοποίηση μήκους κύματος, αφού για παράδειγμα οι συνδέσεις μεταξύ των κόμβων 1, 2 και μεταξύ των 2, 3 μπορούν να πραγματοποιηθούν με το ίδιο μήκος κύματος, π.χ. το λ_1 .

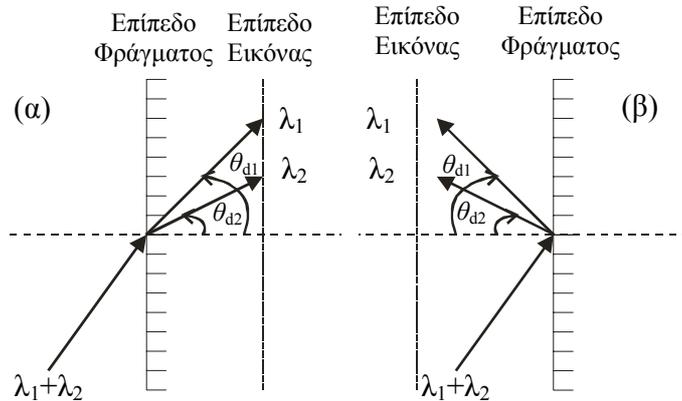
Το σχήμα 2-2 αναδεικνύει το σημαντικό ρόλο που παίζουν οι πολυπλέκτες και οι αποπολυπλέκτες μήκους κύματος στην υλοποίηση των WXC. Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου θα περιγράψουμε διάφορες τεχνικές κατασκευής πολυπλεκτών, αποπολυπλεκτών και WXC. Δομικά στοιχεία των παραπάνω διατάξεων είναι τα οπτικά φίλτρα. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τα βασικότερα χαρακτηριστικά των διατάξεων που βασίζονται σε φίλτρα φραγμάτων Bragg, συστοιχίας κυματοδηγών, περίθλασης και κοιλότητας Fabry-Perot. Θα αναφερθούμε επίσης στα οπτικό-ακουστικά φίλτρα, τα φίλτρα που χρησιμοποιούν συμβολόμετρα Mach Zehnder καθώς και σε φίλτρα λεπτών διηλεκτρικών υμενίων.

2.2 ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ

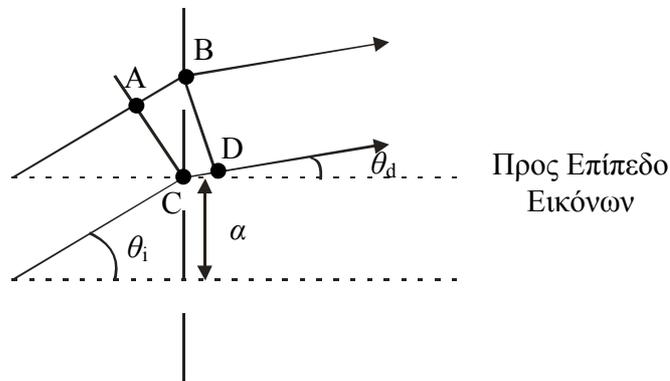
Ο όρος *φράγμα* χρησιμοποιείται για να περιγράψει κάθε διάταξη της οποίας η λειτουργία στηρίζεται στο φαινόμενο της συμβολής μεταξύ δύο ή περισσοτέρων οπτικών σημάτων που προέρχονται από την ίδια πηγή και που παρουσιάζουν διαφορά φάσης μεταξύ τους. Η διαφορά φάσης που παρουσιάζεται εξαρτάται από το μήκος κύματος λ , του οπτικού σήματος. Για τα μήκη κύματος που η διαφορά φάσης μεταξύ των οπτικών σημάτων ισούται με πολλαπλάσιο του 2π , τα σήματα συμβάλλουν θετικά και μεγιστοποιείται η ένταση του συνολικού οπτικού σήματος. Αντίθετα αν η διαφορά φάσης ισούται με περιττό πολλαπλάσιο του π , τότε τα σήματα συμβάλλουν καταστροφικά και η ένταση του συνολικού σήματος ελαχιστοποιείται. Επομένως η ένταση του οπτικού πεδίου εξαρτάται από το μήκος κύματός του και το φράγμα δρα σαν ένα οπτικό φίλτρο.

Ένα παράδειγμα φράγματος αποτελεί το *φράγμα περίθλασης* (diffraction grating) [BW80, §8.6],[Lau02, §3.5]. Στο σχήμα 2-5 παρουσιάζονται δύο είδη φραγμάτων περίθλασης που χρησιμοποιούνται στα συστήματα WDM: Το *φράγμα διέλευσης* (transmission grating) και το *φράγμα ανάκλασης* (reflection grating). Στο σχήμα 2-5(α) το φως προσπίπτει σε ένα επίπεδο που ονομάζεται *επίπεδο φράγματος* στο οποίο έχουν δημιουργηθεί μικρές σχισμές. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σχισμών είναι σταθερή. Διασχίζοντας τις σχισμές το φως μεταδίδεται προς όλες τις διευθύνσεις του χώρου επειδή, εξαιτίας του φαινομένου της περίθλασης, κάθε σχισμή δρα σαν μία δευτερεύουσα σημειακή πηγή. Αν θεωρήσουμε ένα δεύτερο επίπεδο, το *επίπεδο εικόνων*, μετά το επίπεδο φράγματος και παρατηρήσουμε τη συμβολή του φωτός που προέρχεται από τις σχισμές πάνω στο επίπεδο αυτό, θα διαπιστώσουμε ότι σε ορισμένα σημεία η ένταση του φωτός είναι ισχυρότερη ενώ σε άλλα ασθενέστερη και ότι η θέση των μεγίστων και των ελαχίστων της φωτεινής ισχύος εξαρτάται από το μήκος κύματος.

Τα μέγιστα της φωτεινής ισχύος βρίσκονται στις γωνίες εκείνες για τις οποίες η διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών δευτερευόντων πηγών γίνει ίση με ένα πολλαπλάσιο του 2π . Η γωνίες $\theta_d(\lambda)$ κατά τις οποίες παρουσιάζονται τα μέγιστα της συμβολής υπολογίζονται σύμφωνα με το σχήμα 2-6. Θεωρούμε ένα επίπεδο κύμα το οποίο προσπίπτει στο επίπεδο του φράγματος σχηματίζοντας γωνία θ_i με την κάθετο προς το επίπεδο. Κάθε σχισμή δρα ως δευτερεύουσα πηγή και εκπέμπει προς διάφορες διευθύνσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη γωνία θ_d που σχηματίζει η εκάστοτε διεύθυνση διάδοσης με την κάθετη προς το επίπεδο του φράγματος. Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων που εκπέμπονται από δύο διαδοχικές σχισμές οφείλεται στη



Σχήμα 2-5: Φράγματα Περίθλασης: (α) Διέλευσης και (β) Ανάκλασης



Σχήμα 2-6: Υπολογισμός της γωνίας θ_d κατά την οποία η ένταση του φωτεινού σήματος είναι μέγιστη

διαφορά δρόμου $AB-CD$. Η γωνία (ACB) έχει τις πλευρές της κάθετες προς τις πλευρές της γωνίας θ_i επομένως $(ACB)=\theta_i$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο CAB

$$AB = CB \sin \theta_i = a \sin \theta_i \quad (2.1)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι

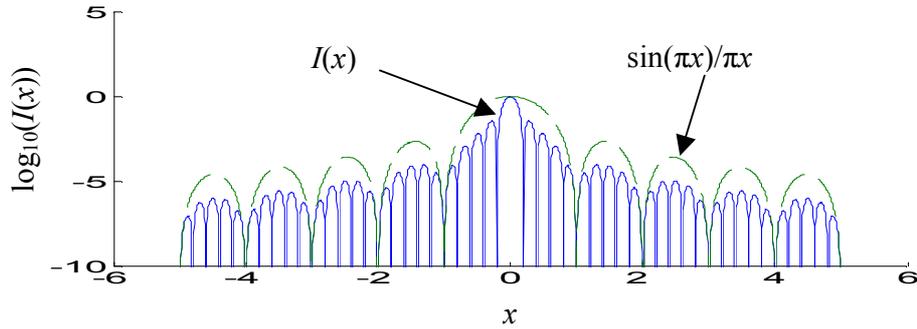
$$CD = a \sin \theta_d \quad (2.2)$$

όπου θ_d είναι η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση του διαθλώμενου κύματος με την κάθετη στο φράγμα. Η φάση του οπτικού σήματος ισούται με το γινόμενο της σταθεράς διάδοσής του $\beta=2\pi n/\lambda$ (όπου n ο δείκτης διάθλασης του μέσου), επί την απόσταση που έχει διανύσει. Επομένως η διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από δύο γειτονικές σχισμές θα είναι ίση με

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi na}{\lambda} (\sin \theta_i - \sin \theta_d) \quad (2.3)$$

Η ένταση του οπτικού σήματος λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $\Delta\varphi=m2\pi$, επομένως εξαιτίας της σχέσεως (2.3), οι γωνίες $\theta_d(\lambda)$ πρέπει να πληρούν τη συνθήκη:

$$na(\sin \theta_i - \sin \theta_d(\lambda)) = m\lambda \quad (2.4)$$



Σχήμα 2-7: Κατανομή της έντασης του φωτεινού κύματος που παράγεται από ένα φράγμα περίθλασης

Ο ακέραιος m καλείται *τάξη του φράγματος*. Αν τοποθετήσουμε μία οπτική ίνα κατά την διεύθυνση της γωνίας $\theta_d(\lambda_1)$ τότε το φως το οποίο θα προσπέσει στην οπτική ίνα θα βρίσκεται συγκεντρωμένο κατά κύριο λόγο γύρω από το μήκος κύματος λ_1 . Επομένως, το φράγμα περίθλασης στην ουσία δρα ως ένας αποπολυπλέκτης μήκους κύματος. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε πως εάν οπτικά σήματα με μήκη κύματος $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ προσπίπτουν στο φράγμα υπό γωνίες $\theta_d(\lambda_1), \dots, \theta_d(\lambda_N)$ τότε κατά τη διεύθυνση θ_i τα μήκη κύματος θα συνδυαστούν. Επομένως το φράγμα δρα και ως πολυπλέκτης μήκους κύματος.

Το φράγμα ανάκλασης που εικονίζεται στο σχήμα 2-5(β) λειτουργεί παρόμοια με το φράγμα διέλευσης. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός πως οι σχισμές του φράγματος διέλευσης αντικαθίστανται με στενές ανακλαστικές επιφάνειες. Στην περίπτωση αυτή, η διαφορά δρόμου είναι $AB+CD$ οπότε η συνθήκη (2.4) τροποποιείται ως εξής:

$$na(\sin \theta_i + \sin \theta_d(\lambda)) = m\lambda \quad (2.5)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.4) ή τη σχέση (2.5) ως προς το μήκος κύματος, λαμβάνουμε:

$$\frac{d\theta_d(\lambda)}{d\lambda} = \frac{m}{na \cos \theta_d(\lambda)} \quad (2.6)$$

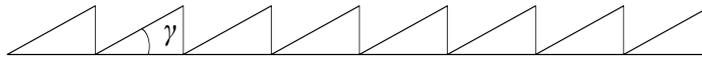
Η παράγωγος του $d\theta_d(\lambda)/d\lambda$ αποτελεί ένα μέτρο του ρυθμού μεταβολής της διεύθυνσης μέγιστης συμβολής με το μήκος κύματος λ . Παρατηρούμε πως για $m=0$, η παράγωγος $d\theta_d(\lambda)/d\lambda$ ισούται με μηδέν και επομένως τα μήκη κύματος δε διαχωρίζονται στη μηδενική τάξη του φράγματος.

Οι θέσεις της μέγιστης συμβολής δεν επαρκούν για μία πλήρη περιγραφή της λειτουργίας του φράγματος περίθλασης αφού δεν παρέχουν καμία πληροφορία για το ποσοστό οπτικής ισχύος που αναλογεί σε κάθε τάξη του φράγματος. Για να περιγράψουμε τη φωτεινή ισχύ $I(\lambda)$ πάνω στο επίπεδο εικόνων χρησιμοποιούμε τη σχέση

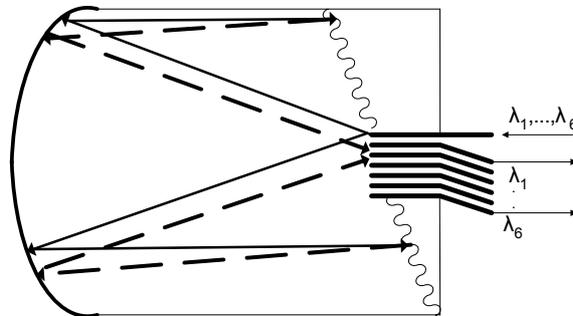
$$I(\lambda) = I_0 \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 \left(\frac{\sin(N_f \pi x)}{\pi x} \right)^2 \quad (2.7)$$

όπου

$$x = \frac{m}{\lambda} (\sin \theta_i + \sin \theta_d) \quad (2.8)$$



Σχήμα 2-8: Φράγμα ανάκλασης που έχει υποστεί χάραξη (blazing)



Σχήμα 2-9: Η διάταξη Stimax

και N_f είναι είτε ο αριθμός των σχισμών, εάν πρόκειται για φράγμα διέλευσης ή ο αριθμός των ανακλαστικών επιφανειών, αν πρόκειται για φράγμα ανάκλασης. Η σχέση (2.7) προκύπτει με την παραδοχή ότι κατά μήκος του επιπέδου του φράγματος προσπίπτει φως με σταθερή φωτεινή ισχύ. Ο παράγοντας $\sin(N_f \pi x)/\pi x$ οφείλεται στη συμβολή των N_f δευτερευόντων πηγών και ο παράγοντας $\sin(\pi x)/\pi x$ οφείλεται στο φαινόμενο της περίθλασης. Η σχέση (2.7) έχει απεικονιστεί γραφικά στο σχήμα 2.7 για $N_f=5$. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 2-7, η φωτεινή ισχύς γίνεται μέγιστη για $m=0$ (οπότε και $x=0$). Επομένως, το μεγαλύτερο μέρος της οπτικής ισχύος βρίσκεται στη μηδενική τάξη του φράγματος η οποία όμως, σύμφωνα με την εξίσωση (2.6), δεν επιτρέπει το διαχωρισμό των μηκών κύματος. Για να επιτευχθεί διαχωρισμός των μηκών κύματος, σε ένα αποπολυπλέκτη με φράγμα περίθλασης θα πρέπει να χρησιμοποιεί μη μηδενική τάξη φράγματος ($m \neq 0$) και επομένως η οπτική ισχύς εξόδου θα εμφανίζεται μειωμένη σε σχέση με την οπτική ισχύ εισόδου.

Η μηδενική τάξη φράγματος μπορεί να αξιοποιηθεί στους πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες μήκους κύματος εάν το φράγμα περίθλασης έχει υποστεί *χάραξη* (blazing) [Lau §3.5]. Ένα φράγμα ανάκλασης που έχει υποστεί *χάραξη* φαίνεται στο σχήμα 2-8. Οι ανακλαστικές επιφάνειες σχηματίζουν μία γωνία γ με το επίπεδο του φράγματος. Εξαιτίας της κλίσης των ανακλαστικών επιφανειών το μέγιστο της έντασης $I(\lambda)$ μετατοπίζεται προς υψηλότερες τάξεις φράγματος ($m > 0$) που επιτρέπουν το διαχωρισμό των μήκων κύματος.

Το φράγμα περίθλασης χρησιμοποιείται στην διάταξη *Stimax* [Lau80] που εικονίζεται στο σχήμα 2-9. Στη διάταξη *Stimax*, τα μήκη κύματος προς διαχωρισμό βρίσκονται σε μία οπτική ίνα στην είσοδο της διάταξης. Στην έξοδο της οπτικής ίνας το φως ακτινοβολείται στον ελεύθερο χώρο και προσπίπτει στο παραβολικό κάτοπτρο στην άλλη άκρη της διάταξης. Το παραβολικό κάτοπτρο ανακλά την προσπίπτουσα δέσμη μετατρέποντάς την σε παράλληλη δέσμη. Η παράλληλη δέσμη ανακλάται από το φράγμα ανάκλασης και εστιάζεται από το παραβολικό κάτοπτρο σε μία από τις οπτικές ίνες εξόδου. Εξαιτίας του φράγματος ανάκλασης, η θέση μέγιστης εστίασης εξαρτάται από το μήκος κύματος του φωτός. Με κατάλληλο σχεδιασμό της διάταξης, κάθε μήκος κύματος καταλήγει σε διαφορετική ίνα εξόδου οπότε λαμβάνει χώρα η αποπολυπλεξία μήκους κύματος. Η διάταξη λειτουργεί και ως πολυπλέκτης μήκους κύματος αν τα μήκη κύματος προς πολυπλεξία τοποθετηθούν στις οπτικές ίνες στις οποίες εξέρχονται κατά την αποπολυπλεξία.

Η διάταξη *Stimax* προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Laude το 1980 και έκτοτε χρησιμοποιείται συχνά σε συστήματα WDM. Προσφέρει υψηλής ποιότητας απομόνωση μεταξύ

των μηκών κύματος και αναισθησία στην πόλωση. Ωστόσο, παραμένει μία ογκώδης διάταξη με υψηλό κόστος κατασκευής. Η συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης εξαρτάται από το είδος της οπτικής ίνας που χρησιμοποιείται στις εισόδους και τις εξόδους της. Αν χρησιμοποιηθούν μονότροπες ίνες τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι σχεδόν Gaussian ενώ με τη χρήση πολύτροπων ινών επιτυγχάνονται πιο τετραγωνισμένες συναρτήσεις μεταφοράς.

2.3 ΦΡΑΓΜΑΤΑ BRAGG

Τα φράγματα Bragg [HM97] χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα σύγχρονα συστήματα WDM. Εν γένει, κάθε περιοδική διαταραχή στο μέσο διάδοσης ονομάζεται *φράγμα Bragg*. Η περιοδική διαταραχή στο μέσο διάδοσης, συνήθως επιτυγχάνεται με μεταβολή του δείκτη διάθλασης του μέσου. Εξαιτίας της περιοδικής διαταραχής του μέσου, λαμβάνει χώρα σύζευξη μεταξύ των τρόπων διάδοσης του μέσου. Η ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ δύο τρόπων μεγιστοποιείται αν ισχύει η συνθήκη Bragg:

$$|\beta_0 - \beta_1| = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση τα β_0 και β_1 είναι οι σταθερές διάδοσης των δύο τρόπων διάδοσης, ενώ Λ είναι η περίοδος της διαταραχής. Στα φράγματα Bragg που χρησιμοποιούνται για πολυπλεξία και αποπολυπλεξία μήκους κύματος οι τρόποι στους οποίους λαμβάνει ανταλλαγή ενέργειας έχουν την ίδια σταθερά διάδοσης αλλά αντίθετη κατεύθυνση διάδοσης ($\beta_1 = -\beta_0$). Το μήκος κύματος λ_0 στο οποίο η ανταλλαγή ενέργειας μεγιστοποιείται υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την (2.9) και το γεγονός ότι $\beta_0 = 2\pi n_{eff}/\lambda_0$,

$$\lambda_0 = 2n_{eff}\Lambda \quad (2.10)$$

Γύρω από το μήκος κύματος λ_0 το φως ανακλάται από το φράγμα επειδή η ισχύς από τον τρόπο που διαδίδεται στην κατεύθυνση $+z$ μεταφέρεται στον τρόπο που διαδίδεται στην κατεύθυνση $-z$, όπως δείχνει και το σχήμα 2-10. Επομένως το φράγμα Bragg μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλεγεί ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος $\lambda = \lambda_0$.

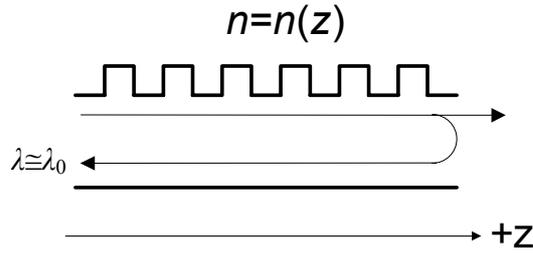
Τα φράγματα Bragg μπορούν να σχηματιστούν σε πολλά είδη κυματοδηγών ακόμα και σε μία οπτική ίνα. Τα *φράγματα Bragg οπτικής ίνας* (Fiber Bragg Gratings) διευκολύνουν την προσαρμογή με μία συμβατική ίνα και οι απώλειες οπτικής ισχύος του σήματος είναι ελάχιστες. Ο πρώτος που κατασκεύασε φράγματα Bragg οπτικής ίνας ήταν ο Hill το 1978 [HFJ78].

Για μία πλήρη περιγραφή του φράγματος Bragg πρέπει να καταφύγουμε στη θεωρία των συζευγμένων τρόπων (coupled mode theory) [Erd97]. Η μεταβολή $\delta n_{eff}(z)$ του ενεργού δείκτη διάθλασης του τρόπου διάδοσης περιγράφεται από την εξίσωση

$$\delta n_{eff}(z) = \delta n_s(z) \left\{ 1 + \nu \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} z + \phi(z) \right) \right\} \quad (2.11)$$

όπου $\delta n_s(z)$ είναι η περιβάλλουσα του ενεργού δείκτη διάθλασης, $\phi(z)$ η μεταβολή της «φάσης» του δείκτη διάθλασης και ν το βάθος χάραξης. Στα *ομογενή φράγματα* οι παράμετροι $\phi(z)$ και $\delta n_s(z)$ δεν μεταβάλλονται με το z . Η μεταβολή των παραμέτρων $\phi(z)$ και $\delta n_s(z)$ στα *ανομοιογενή φράγματα* προσδίδει στα φράγματα Bragg επιπλέον ιδιότητες, όπως θα δούμε και παρακάτω.

Μετά από κάποιες αναγκαίες απλοποιήσεις, τα πλάτη R και S των δύο τρόπων διάδοσης αποδεικνύεται ότι περιγράφονται από το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:



Σχήμα 2-10: Σχηματική απεικόνιση της διάδοσης σε ένα φράγμα Bragg κοντά στο κεντρικό του μήκος κύματος λ_0 .

$$\frac{dR}{dz} = j\hat{\sigma}R + j\kappa S \quad (2.12)$$

$$\frac{dS}{dz} = -j\hat{\sigma}S - j\kappa^* R \quad (2.13)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, R και S είναι τα πλάτη του ανακλώμενου και του προσπίπτοντος στο φράγμα κύματος αντίστοιχα. Στην περίπτωση όπου το φράγμα έχει σχηματιστεί σε μία μονότροπη ίνα, οι συντελεστές των εξισώσεων (2.12) και (2.13) δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$\hat{\sigma} = \sigma + \delta - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dz} \quad (2.14)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{\lambda} \delta n_s(z) \quad (2.15)$$

$$\kappa = \frac{\pi}{\lambda} n \delta n_s(z) \quad (2.16)$$

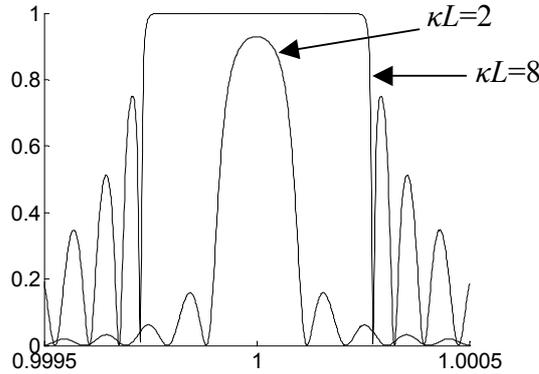
$$\delta = 2\pi n_{eff} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \quad (2.17)$$

Στην (2.13) με κ^* έχουμε συμβολίσει το συζυγές του συντελεστή κ . Στην περίπτωση των ομοιογενών φραγμάτων Bragg οι εξισώσεις (2.12) και (2.13) επιλύονται σε κλειστή μορφή. Αν υποθέσουμε ότι το μήκος του φράγματος είναι L , από το $z=-L/2$ έως το $z=L/2$, ότι στην έξοδο του φράγματος δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα ($S(L/2)=0$) και ότι το πλάτος του ανακλώμενου κύματος που διαδίδεται προς την κατεύθυνση $-z$ είναι $R(-L/2)=1$, τότε ο συντελεστής ανάκλασης $\rho=S(-L/2)/R(-L/2)$ δίνεται από την σχέση

$$\rho = \frac{-\kappa \sinh(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L)}{\hat{\sigma} \sinh(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L) + j\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} \cosh(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L)} \quad (2.18)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.14)-(2.17) και λαμβάνοντας υπόψη πως στην περίπτωση των ομοιογενών φραγμάτων $d\phi(z)/dz=0$, λαμβάνουμε την εξής σχέση

$$\frac{\lambda}{\lambda_{max}} = \frac{1}{1 + \hat{\sigma}L / \pi N} \quad (2.19)$$



Σχήμα 2-11: Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος ενός ομοιογενούς φράγματος Bragg

όπου λ_{\max} το μήκος κύματος για το οποίο $\hat{\sigma} = 0$ και ο συντελεστής ανάκλασης μεγιστοποιείται ενώ $N=L/\Lambda$ ο αριθμός των περιόδων του φράγματος. Το λ_{\max} σχετίζεται με το λ_0 βάση της σχέσης

$$\lambda_{\max} = \left(1 + \frac{\delta n_s}{n_{\text{eff}}}\right) \lambda_0 \quad (2.20)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος $T(\lambda/\lambda_{\max}) = |\rho(\lambda/\lambda_{\max})|^2$ έχει απεικονιστεί στο σχήμα 2-11 για $\kappa L=2$ και $\kappa L=8$ θεωρώντας ότι $N=10000$.

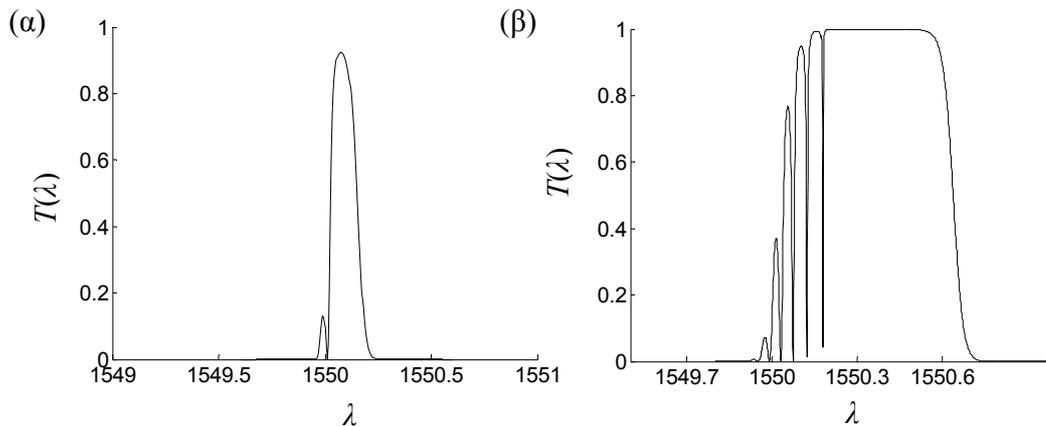
Όπως παρατηρούμε από το σχήμα 2-11, η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος μεταβάλλεται ανάλογα με το γινόμενο κL και ο κύριος λοβός της τείνει να λάβει μία τετραγωνική μορφή για μεγάλες τιμές του κL . Οι πλευρικοί λοβοί έχουν αρκετά υψηλή τιμή και στις δύο περιπτώσεις του σχήματος 2-11. Στα συστήματα WDM επιθυμούμε το ύψος των λοβών των φίλτρων να είναι όσο το δυνατόν χαμηλότερο, ώστε να μειώνεται ο θόρυβος παρεμβολής από τα άλλα μήκη κύματος μετά την αποπολυπλεξία. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούνται φράγματα Bragg των οποίων η παράμετρος δn_s μεταβάλλεται με το z .

Στην περίπτωση όπου το δn_s μεταβάλλεται με την απόσταση z , οι εξισώσεις (2.12) και (2.13) πρέπει να επιλυθούν αριθμητικά. Για παράδειγμα θα θεωρήσουμε μία Gaussian μεταβολή για το $\delta n_s(z)$:

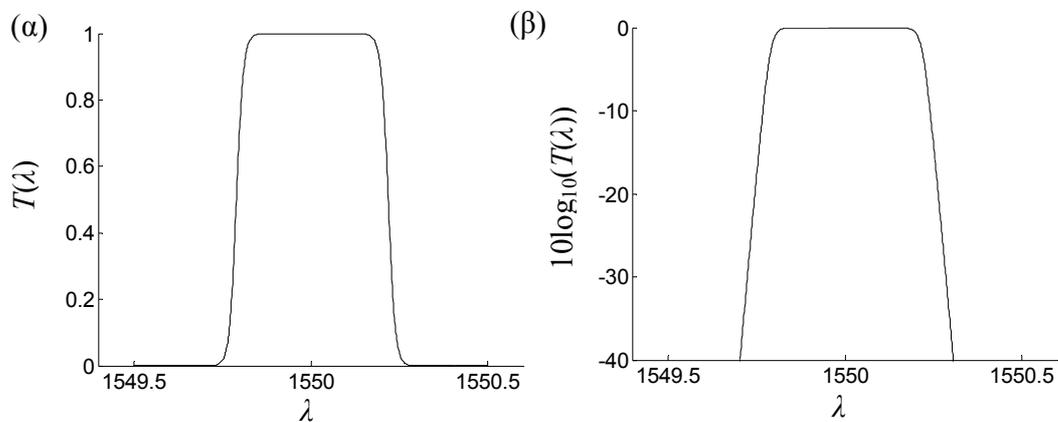
$$\delta n_s(z) = \delta n_{s,\max} \exp\left(-\frac{4 \ln 2}{FWHM^2} z^2\right) \quad (2.21)$$

Στην παραπάνω εξίσωση FWHM είναι το εύρος μισής ισχύος της Gaussian μεταβολής και $\delta n_{s,\max}$ το μέγιστο πλάτος της. Στο σχήμα 2-12 έχουν απεικονιστεί οι συναρτήσεις μεταφοράς που λαμβάνονται όταν το $\delta n_s(z)$ μεταβάλλεται όπως υποδεικνύει η εξίσωση (2.21). Παρατηρούμε ότι οι δεξιοί δευτερεύοντες λοβοί έχουν εξαφανιστεί αλλά οι αριστεροί δευτερεύοντες λοβοί παραμένουν.

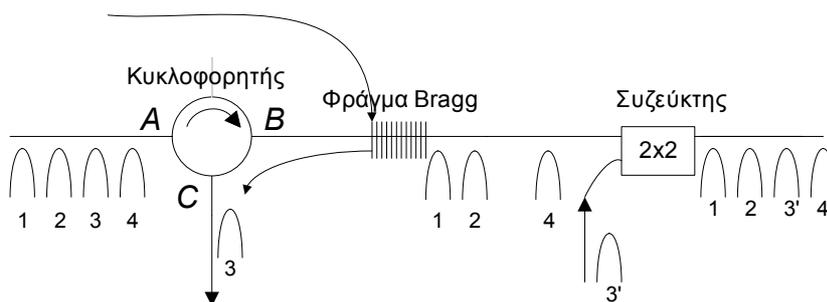
Οι αριστεροί δευτερεύοντες λοβοί εξαλείφονται για $\delta n_{s,\max} \rightarrow 0$ και $\nu \rightarrow \infty$. Για παράδειγμα στο σχήμα 2-13 απεικονίζεται η συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνεται για $\delta n_{s,\max} = 4 \times 10^{-6}$ και $\nu = 100$. Παρατηρούμε πως οι αριστεροί δευτερεύοντες λοβοί έχουν εξαφανιστεί ενώ ο κύριος λοβός διατηρεί το τετραγωνικό του σχήμα. Δυστυχώς, η κατασκευή ενός φράγματος Bragg με μικρή τιμή του δn_s και μεγάλη τιμή του ν αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα και κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες άλλες λύσεις για την καταστολή των πλευρικών λοβών.



Σχήμα 2-12: Επίδραση της μεταβολής του $\delta n_s(z)$ σύμφωνα με την εξίσωση (2.21) για α) FWHM=10nm, και $\delta n_{s,max}=1 \times 10^{-4}$ και β) $\delta n_{s,max}=4 \times 10^{-4}$.



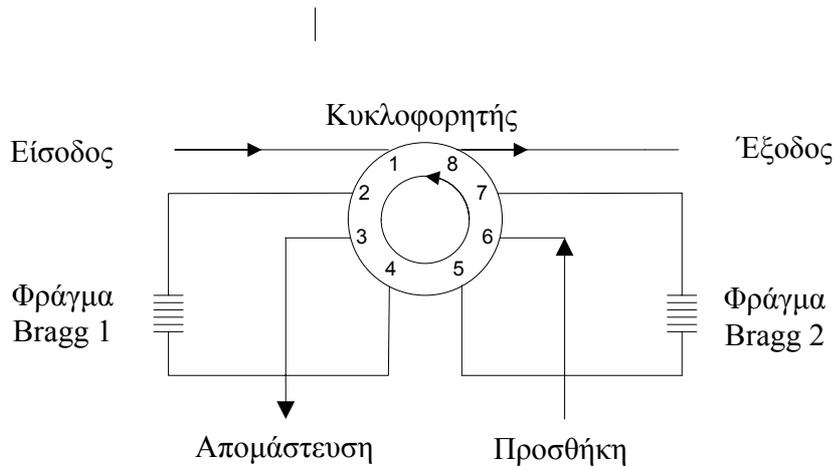
Σχήμα 2-13: Συνάρτηση μεταφοράς για $\delta n_{s,max}=4 \times 10^{-6}$ και $\nu=100$ σε α) γραμμική και β) λογαριθμική κλίμακα



Σχήμα 2-14: ADM με φράγμα Bragg και κυκλοφορητή

Τα φράγματα Bragg που έχουν σχηματιστεί σε οπτική ίνα προσφέρουν χαμηλές απώλειες (περίπου 0.1dB), υψηλή απομόνωση του ανακλωμένου μήκους κύματος από τα υπόλοιπα μήκη κύματος και αναισθησία στην πόλωση.

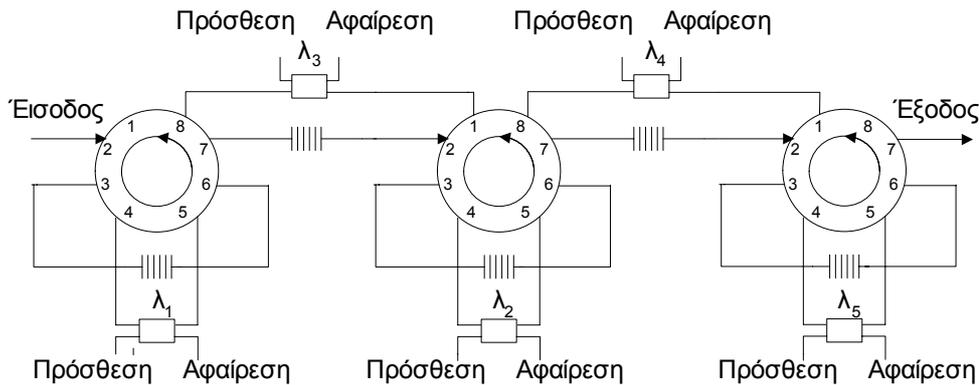
Με συνδυασμό φραγμάτων Bragg και άλλων δομών καθίσταται δυνατή η κατασκευή οπτικών ADM [RS98, §3.5]. Το ADM του σχήματος 2-14 χρησιμοποιεί το συνδυασμό ενός φράγματος Bragg και ενός κυκλοφορητή (circulator). Ο κυκλοφορητής επιτρέπει τη διάδοση των



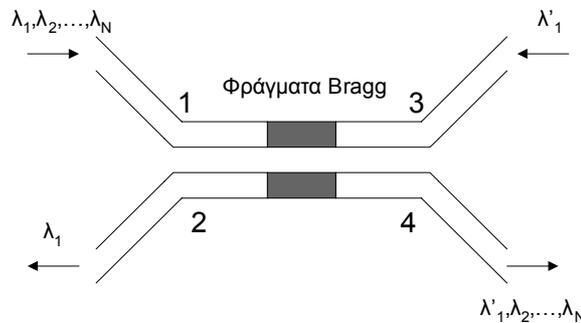
Σχήμα 2-15: ADM με βελτιωμένη απομόνωση του διαχωριζόμενου μήκους κύματος

σημάτων μόνο προς μία κατεύθυνση στο εσωτερικό του. Το μήκος κύματος το οποίο φέρει το σήμα που θα απομαστευθεί, ανακλάται από το φράγμα Bragg και οδηγείται στην έξοδο C του κυκλοφορητή. Το σήμα που πρέπει να προστεθεί, συνδυάζεται με τα υπόλοιπα μήκη κύματος μέσω ενός 2x2 συζευκτη. Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της αρχιτεκτονικής του σχήματος 2-14, μία εκ των οποίων απεικονίζεται στο σχήμα 2-15 [TZT01]. Στον ADM του σχήματος 2-15, τα δύο φράγματα Bragg έχουν το ίδιο μήκος κύματος ανάκλασης λ_0 . Τα μήκη κύματος εισέρχονται στον κυκλοφορητή από την θύρα 1 και το κανάλι το οποίο βρίσκεται στο μήκος κύματος λ_0 ανακλάται στο φράγμα Bragg 1 και οδηγείται στην θύρα 2 και έπειτα στη θύρα 3 όπου και απομαστεύεται από τον ADM. Αντίθετα τα υπόλοιπα κανάλια δεν ανακλώνται από το φράγμα και κατευθύνονται στην θύρα 4. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται ακόμα μία φορά στο φράγμα Bragg 2 το οποίο βελτιώνει την απομόνωση του μήκους κύματος λ_0 . Στην θύρα 6 του κυκλοφορητή προστίθεται το νέο κανάλι για το μήκος κύματος λ_0 το οποίο μαζί με τα υπόλοιπα μήκη κύματος εξέρχεται από την θύρα 8 του κυκλοφορητή.

Τα ADM των προηγούμενων σχημάτων προσθέτουν και απομαστεύουν ένα μόνο μήκος κύματος. Συνδυάζοντας περισσότερους κυκλοφορητές και φράγματα Bragg κατασκευάζουμε ADM με δυνατότητα να προσθέτουν και να απομαστεύουν περισσότερα μήκη κύματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα απεικονίζεται στο σχήμα 2-16. Το WDM σήμα εισέρχεται στον αριστερότερο κυκλοφορητή μέσω της θύρας 2 και μέσω του κυκλοφορητή, οδηγείται στο πρώτο φράγμα Bragg. Το μήκος κύματος λ_0 του φράγματος ισούται με το μήκος κύματος λ_1 του πρώτου καναλιού το οποίο και ανακλάται. Το ανακλώμενο μήκος κύματος λ_1 οδηγείται μέσω του κυκλοφορητή σε έναν 2x2 μεταγωγέα ο οποίος βρίσκεται στην είσοδο 4 του κυκλοφορητή. Ανάλογα με την κατάσταση του μεταγωγέα, το κανάλι στο μήκος κύματος θα καταλήξει είτε στη θύρα 5 είτε στην έξοδο απομάστευσης. Επομένως ο μεταγωγέας δίνει τη δυνατότητα αντικατάστασης του καναλιού στο μήκος κύματος λ_1 από ένα άλλο κανάλι στο ίδιο μήκος κύματος. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου το σήμα φτάσει στην έξοδο του ADM. Το επόμενο φράγμα έχει σχεδιαστεί για να ανακλά το μήκος κύματος λ_2 και ούτω καθεξής. Όλα τα μήκη κύματος διέρχονται μέσα από 2x2 διακόπτες κάθε ένας εκ των οποίων αναλαμβάνει την πρόσθεση και την αφαίρεση των καναλιών σε ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος.



Σχήμα 2-16: ADM που προσθέτει και απομαστεύει κανάλια σε 5 μήκη κύματος

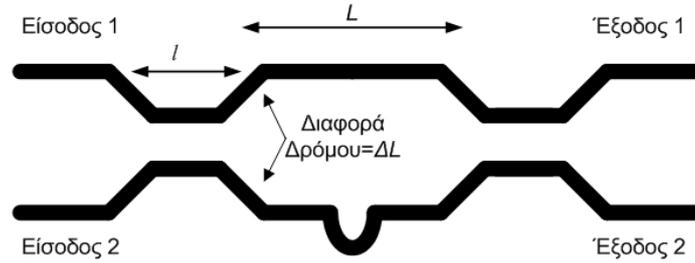


Σχήμα 2-17: ADM με φράγματα Bragg και κατευθυντικό συζεύκτη

Ο κυκλοφορητής παίζει κεντρικό ρόλο στις προηγούμενες αρχιτεκτονικές ADM καθοδηγώντας κατάλληλα τα σήματα προς τις θύρες προσθήκης και απομάστευσης. Μία αρχιτεκτονική ADM που χρησιμοποιεί έναν 2×2 συζεύκτη [DGB01], αντί του κυκλοφορητή απεικονίζεται στο σχήμα 2-17. Ο 2×2 συζεύκτης έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε η ισχύς από τη θύρα 1 να διαμοιράζεται εξίσου στα δύο φράγματα Bragg τα οποία ανακλούν το ίδιο μήκος κύματος $\lambda_0 = \lambda_1$ οδηγώντας το προς τις θύρες 1 και 2. Ωστόσο, εξαιτίας της επιπλέον σύζευξης το ανακλώμενο μήκος κύματος τελικά εξέρχεται από τη θύρα 2 του ADM. Το κανάλι προς προσθήκη εισάγεται στη θύρα 3 του ADM και διαμοιράζεται εξίσου στα δύο φράγματα όπως και το κανάλι προς απομάστευση. Εξαιτίας της ανάκλασης στα δύο φράγματα Bragg το κανάλι προς προσθήκη εξέρχεται τελικά από τη θύρα 4 μαζί με τα υπόλοιπα μήκη κύματος. Το πλεονέκτημα της διάταξης του σχήματος 2-17 είναι ότι τα φράγματα Bragg γράφονται σε διηλεκτρικούς κυματοδηγούς και ολόκληρη η διάταξη μπορεί να κατασκευαστεί σε ολοκληρωμένη μορφή χρησιμοποιώντας μεθόδους ολοκληρωμένης οπτικής (integrated optics).

2.4 ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΑ MACH ZEHNDER

Στο *συμβολόμετρο Mach-Zehnder* [Gre93, §4.6],[TKS90] το οπτικό σήμα συμβάλει με μία καθυστερημένη έκδοση του εαυτού του. Όπως και στο φράγμα περίθλασης, η ένταση του πεδίου συμβολής εξαρτάται από το μήκος κύματος. Το συμβολόμετρο Mach-Zehnder κατασκευάζεται συνήθως σε ολοκληρωμένη μορφή, χρησιμοποιώντας τεχνικές ολοκληρωμένης οπτικής. Συνίσταται σε δύο συζεύκτες, ένας εκ των οποίων διαμοιράζει την οπτική ισχύ μεταξύ δύο οπτικών δρόμων με διαφορετικό μήκος όπως φαίνεται στο σχήμα 2-18. Έστω S_1 και S_2 τα



Σχήμα 2-18: Ένα συμβολόμετρο Mach Zehnder

πλάτη του οπτικού πεδίου στις εισόδους του πρώτου συζεύκτη. Οι έξοδοι του συζεύκτη δίνονται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} S_{o1} \\ S_{o2} \end{bmatrix} = e^{-j\beta L} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{in,1} \\ S_{in,2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

όπου β είναι η σταθερά διάδοσης του οπτικού πεδίου και l το μήκος σύζευξης. Στην είσοδο του δεύτερου συζεύκτη το κύμα S_{o1} εμφανίζεται με φάση $\exp(j\beta L)$ ενώ το κύμα S_{o2} με φάση $\exp(j\beta(L+\Delta L))$ όπου ΔL η διαφορά μήκους των δύο βραχιόνων του συμβολόμετρου. Επομένως στην έξοδο του συμβολόμετρου τα οπτικά πεδία γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} S_{out,1} \\ S_{out,2} \end{bmatrix} = e^{-j\beta(2l+L)} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\beta\Delta L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{in,1} \\ S_{in,2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Αν υποθέσουμε πως στην είσοδο 2 του πρώτου συζεύκτη δεν προσπίπτει φωτεινή ισχύς ($S_{in,2}=0$) και πως το πλάτος του οπτικού πεδίου στην είσοδο 1 ισούται με μονάδα ($S_{in,1}=1$), τότε βρίσκουμε για τις συναρτήσεις μεταφοράς ισχύος $T_1(\lambda)$ και $T_2(\lambda)$ της εξόδου 1 και 2 του συμβολόμετρου αντίστοιχα:

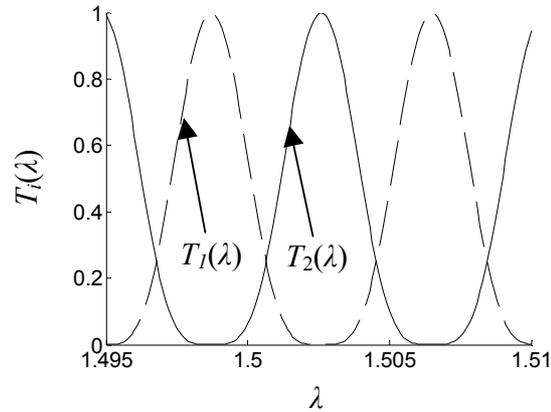
$$\begin{bmatrix} T_1(\lambda) \\ T_2(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(\beta\Delta L/2) \\ \cos^2(\beta\Delta L/2) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Παρατηρούμε πως το $T_1(\lambda)$ γίνεται μέγιστο όταν $\beta\Delta L/2=k\pi+\pi/2$ ενώ το $T_2(\lambda)$ γίνεται μέγιστο όπου $\beta\Delta L/2=k\pi$. Επομένως τα μήκη κύματος $\lambda_{1,max}$ και $\lambda_{2,max}$ για τα οποία τα $T_1(\lambda)$ και $T_2(\lambda)$ λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους είναι

$$\lambda_{1,max} = \frac{2n_{eff}\Delta L}{2k+1} \quad (2.24)$$

$$\lambda_{2,max} = \frac{n_{eff}\Delta L}{k} \quad (2.25)$$

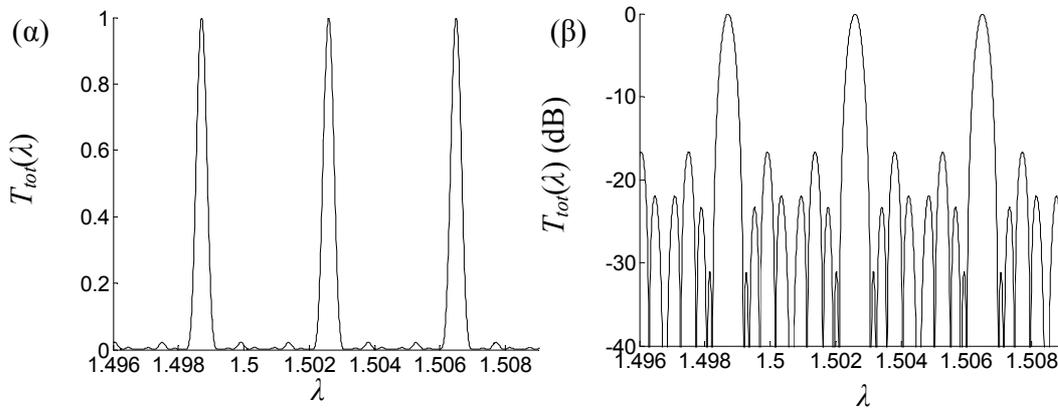
Για να συνάγουμε τις (2-24)-(2-25) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\beta=2\pi n_{eff}/\lambda$ όπου n_{eff} είναι ο ενεργός δείκτης διάθλασης του τρόπου διάδοσης στους βραχίονες του συμβολόμετρου. Σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.24) και (2.25) αν δύο οπτικά σήματα με μήκη κύματος $\lambda_{1,max}$ και $\lambda_{2,max}$ οδηγηθούν στην είσοδο 1 του συμβολόμετρου, τότε το οπτικό σήμα με μήκος κύματος $\lambda_{1,max}$ θα εμφανιστεί στην είσοδο 1 ενώ το μήκος κύματος $\lambda_{2,max}$ θα εμφανιστεί στην έξοδο 2. Επομένως το συμβολόμετρο Mach Zehnder λειτουργεί ως ένας αποπολυπλέκτης μήκους κύματος.



Σχήμα 2-19: Συνάρτηση μεταφοράς του συμβολόμετρου Mach-Zehnder

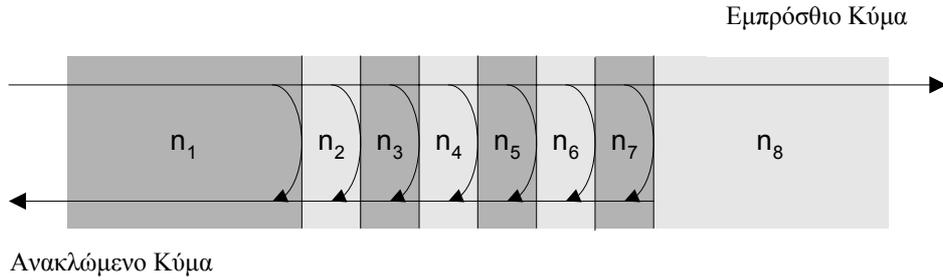


Σχήμα 2-20: Συμβολόμετρο Mach Zehnder πολλαπλών τμημάτων



Σχήμα 2-21: Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος ενός Mach Zehnder συμβολομέτρου με $M=4$ σε α) γραμμική και β) λογαριθμική κλίμακα

Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος που δίνεται από τη (2.23) εικονίζεται στο σχήμα 2-20 για $n_{eff}=1.45$, $\Delta L=200\mu\text{m}$. Το συμβολόμετρο Mach-Zehnder επιτρέπει το διαχωρισμό δύο καναλιών που βρίσκονται σε διαφορετικό μήκος κύματος. Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα μήκη κύματος, χρησιμοποιείται το συμβολόμετρο Mach-Zehnder πολλαπλών τμημάτων [NTI87] που συνίσταται από ένα πλήθος συμβολομέτρων Mach-Zehnder συνδεδεμένα σε σειρά, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2-20. Η διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο βραχιόνων του m -οστού επιμέρους συμβολομέτρου είναι $m\Delta L$. Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος του συμβολομέτρου Mach Zehnder υπολογίζεται από το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς ισχύος των επιμέρους συμβολομέτρων



Σχήμα 2-22: Μετάδοση ενός οπτικού κύματος μέσα από μία σειρά λεπτών διηλεκτρικών υμενίων

$$T_{tot}(\lambda) = \prod_{m=0}^{M-1} \cos^2(2\pi n_{eff} m \Delta L / \lambda) \quad (2.26)$$

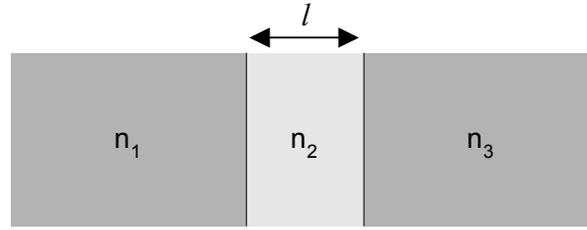
Η συνάρτηση μεταφοράς ενός γενικευμένου συμβολόμετρου Mach-Zehnder με $M=4$, $n_{eff}=1.45$ και $\Delta L=200\mu\text{m}$ απεικονίζεται στο σχήμα 2-21. Η απόσταση μεταξύ των μεγίστων της συνάρτησης μεταφοράς έχει αυξηθεί με αποτέλεσμα να επιτρέπεται η αποπολυπλεξία ενός μήκους κύματος για μεγαλύτερο αριθμό καναλιών. Το επίπεδο των δευτερευόντων λοβών βρίσκεται περίπου στα -17dB .

Τα συμβολόμετρα Mach Zehnder δίνουν τη δυνατότητα του συντονισμού του κεντρικού μήκους κύματος, $\lambda_{1,max}$, με μεταβολή της θερμοκρασίας που προκαλεί και μεταβολή του δείκτη διάθλασης του τρόπου διάδοσης n_{eff} . Ωστόσο, εξαιτίας αυτής της θερμοκρασιακής ευαισθησίας του $\lambda_{1,max}$, συχνά προκαλείται και μετακίνηση του κεντρικού μήκους του συμβολόμετρου που οφείλεται σε τυχαίες θερμοκρασιακές μεταβολές. Ένα άλλο πρόβλημα των συμβολόμετρων Mach Zehnder αποτελεί και το γεγονός ότι η συνάρτηση μεταφοράς δεν διαθέτει τετραγωνικό σχήμα όπως φαίνεται στο σχήμα 2-20. Για τους λόγους αυτούς, τα συμβολόμετρα Mach Zehnder δεν χρησιμοποιούνται συχνά για πολυπλεξία / αποπολυπλεξία μήκους κύματος στα σύγχρονα συστήματα WDM.

2.5 ΦΙΛΤΡΑ ΛΕΠΤΩΝ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΥΜΕΝΙΩΝ

Τα φίλτρα πολλαπλών λεπτών διηλεκτρικών υμενίων (multilayer thin film filters) [RS97, §3.5.1],[Lau02, §3.4] βασίζονται στις ιδιότητες της ανάκλασης του φωτός από διαδοχικά τοποθετημένα στρώματα διηλεκτρικού υλικού, όπως δείχνει το σχήμα 2-22. Καθώς το οπτικό κύμα διέρχεται δια μέσου των διηλεκτρικών στρωμάτων ένα τμήμα της οπτικής ισχύος ανακλάται στις επαφές μεταξύ διηλεκτρικών στρωμάτων ενώ ένα άλλο τμήμα συνεχίζει να διαδίδεται προς τα θετικά z . Το ποσοστό ισχύος που ανακλάται εξαρτάται από το μήκος κύματος του οπτικού σήματος και επομένως η διάταξη λειτουργεί ως οπτικό φίλτρο.

Η εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου πραγματοποιείται με μία μεθοδολογία παρόμοια με αυτή των γραμμών μεταφοράς. Η *εμπέδηση* ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος ορίζεται ως το πηλίκο του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου δια του πλάτους του μαγνητικού πεδίου. Στην περίπτωση ενός ομοιόμορφου, άπειρου διηλεκτρικού μέσου, στο οποίο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διαδίδεται προς μία διεύθυνση (δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα), η εμπέδηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος ισούται με την *χαρακτηριστική εμπέδηση* η που δίνεται από την σχέση



Σχήμα 2-23: Ένα στρώμα διηλεκτρικού τοποθετημένο μεταξύ δύο άλλων διηλεκτρικών στρωμάτων

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (2.27)$$

όπου μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου και ε η διηλεκτρική του σταθερά. Τα διηλεκτρικά υλικά που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι μη μαγνητικά, οπότε $\mu = \mu_0$ και ο δείκτης διάθλασης n συνδέεται με την διηλεκτρική σταθερά με την σχέση $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ όπου ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού, οπότε η (2.27) γράφεται:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 n^2}} = \frac{\eta_0}{n} \quad (2.28)$$

όπου $\eta_0 = 120\pi$ (Ω) είναι η χαρακτηριστική εμπέδηση του κενού.

Εάν η εμπέδηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε ένα επίπεδο του διηλεκτρικού ισούται με Z_L τότε σε απόσταση l από το επίπεδο αυτό η εμπέδηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος Z_i θα δίνεται από την σχέση

$$Z_i = \eta \frac{Z_L \cos(2\pi n l / \lambda) + j \eta \sin(2\pi n l / \lambda)}{\eta \cos(2\pi n l / \lambda) + j Z_L \sin(2\pi n l / \lambda)} \quad (2.29)$$

Εάν γνωρίζουμε την εμπέδηση Z_i στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή ανάκλασης ρ του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην ίδια επιφάνεια, βάση της σχέσεως

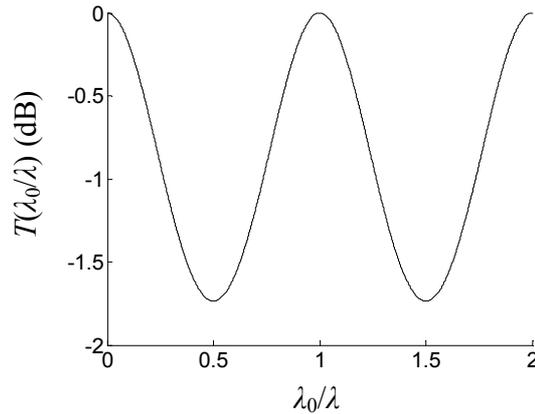
$$\rho = \frac{Z_i - \eta_1}{Z_i + \eta_1} \quad (2.30)$$

όπου η_1 είναι η εμπέδηση του διηλεκτρικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το ανακλώμενο κύμα. Το ποσοστό της οπτικής ισχύος που δεν ανακλάται από την επιφάνεια ισούται με

$$T(\lambda) = 1 - \rho^2 \quad (2.31)$$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη διέλευση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος μέσω τριών διηλεκτρικών στρωμάτων 1, 2 και 3 με δείκτη διάθλασης n_1, n_2 και n_3 αντίστοιχα διατεταγμένα όπως στο σχήμα 2-23. Η εμπέδηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο στρώμα 3 ισούται με $Z_3 = \eta_3 = \eta_0 / n_3$ επειδή δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα στο στρώμα αυτό. Η εμπέδηση στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των διηλεκτρικών 2 και 3 θα ισούται με $Z_3 = \eta_3$ και επομένως η εμπέδηση στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων 1 και 2 θα δίνεται από τη σχέση

$$Z_{12} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(2\pi n l / \lambda) + j \eta_2 \sin(2\pi n l / \lambda)}{\eta_2 \cos(2\pi n l / \lambda) + j \eta_3 \sin(2\pi n l / \lambda)} \quad (2.32)$$



Σχήμα 2-24: Συνάρτηση μεταφοράς ισχύος του διαδιδόμενου κύματος μέσω τριών διηλεκτρικών στρωμάτων με δείκτες διάθλασης $n_1=n_3=1.47$ και $n_2=2.3$. Το μεσαίο διηλεκτρικό στρώμα έχει πάχος $l=\lambda_0/2/n_2$.

όπου l είναι το πάχος του στρώματος 2. Ο συντελεστής ανάκλασης στην ίδια θέση δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} + \eta_1} \quad (2.33)$$

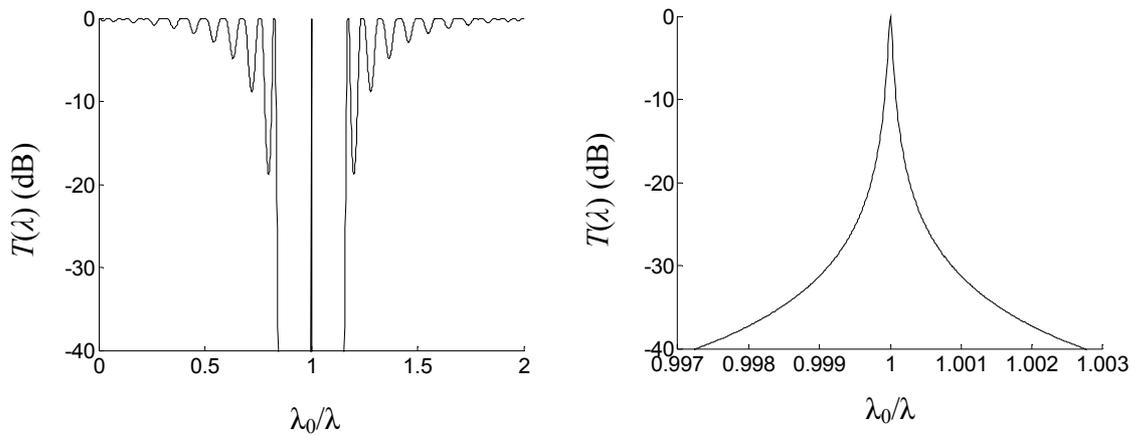
Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος, υπολογίζεται από τη σχέση (2.31) και έχει απεικονισθεί γραφικά στο σχήμα 2-24 για $n_2=2.3$, $n_1=n_3=1.47$ και $l=\lambda_0/2n_2$ όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος για το οποίο $T(\lambda_0)=1$. Είναι φανερό πως η συνάρτηση μεταφοράς του σχήματος 2-24 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποδοτικό διαχωρισμό μήκους κύματος. Πολύ καλύτερα αποτελέσματα λαμβάνουμε αν συνδυάσουμε περισσότερα διηλεκτρικά στρώματα.

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος ενός φίλτρου με πολλαπλά διηλεκτρικά υμένα. Υπάρχουν μέθοδοι σχεδιασμού που επιτρέπουν την σύνθεση φίλτρων Butterworth και Chebyshev εναλλάσσοντας πολλά διηλεκτρικά στρώματα σε σειρά, αλλά η μεγάλη ποικιλία των τιμών των δεικτών διάθλασης των στρωμάτων που υπολογίζονται βάση αυτών των τεχνικών δύσκολα μπορεί να επιτευχθεί στην πράξη. Πρακτικότερα αποτελέσματα λαμβάνουμε αν περιοριστούμε στην χρησιμοποίηση στρωμάτων ενός διηλεκτρικού με χαμηλό δείκτη διάθλασης n_L και ενός διηλεκτρικού με υψηλό δείκτη διάθλασης n_H (συχνά χρησιμοποιείται το SiO_2 με δείκτη διάθλασης $n_L=1.47$ και το TiO_2 με δείκτη διάθλασης $n_H=2.3$). Με H συμβολίζουμε ένα στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης πάχους $\lambda_0/4n_H$ ενώ με L ένα στρώμα με χαμηλό δείκτη διάθλασης πάχους $\lambda_0/4n_L$. Στο σχήμα 2-25 έχουμε παραστήσει γραφικά τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύος ενός φίλτρου πολλαπλών διηλεκτρικών υμενίων που παράγεται από την αλληλουχία $G(\text{HL})^9\text{HLL}(\text{HL})^9\text{HG}$ όπου το γράμμα G συμβολίζει τα στρώματα του υποστρώματος (Πυρίτιο) και όπου $n_H=2.3$, $n_L=1.47$ και $n_G=1.52$. Το $(\text{HL})^k$ συμβολίζει μία αλληλουχία k στρωμάτων HL σε σειρά. Παρατηρούμε πως η συνάρτηση μεταφοράς έχει βελτιωθεί αν και κοντά στο κεντρικό μήκος κύματος δεν παρουσιάζεται τετραγωνική συμπεριφορά. Στο σχήμα 2-26 η συνάρτηση μεταφοράς των φίλτρων:

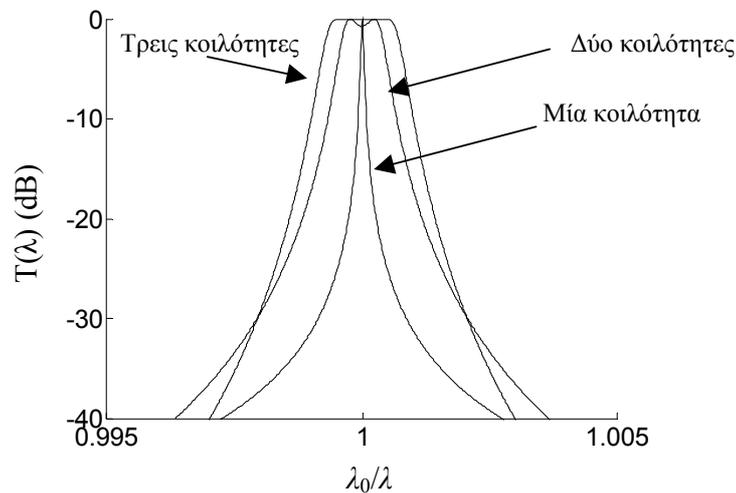
$$G(\text{HL})^9\text{HLL}(\text{HL})^9\text{HG},$$

$$G(\text{HL})^6\text{HLL}(\text{HL})^{12}\text{HLL}(\text{HL})^6\text{HG},$$

$$G(\text{HL})^5\text{HLL}(\text{HL})^{11}\text{HLL}(\text{HL})^{11}\text{HLL}(\text{HL})^5\text{HG}$$



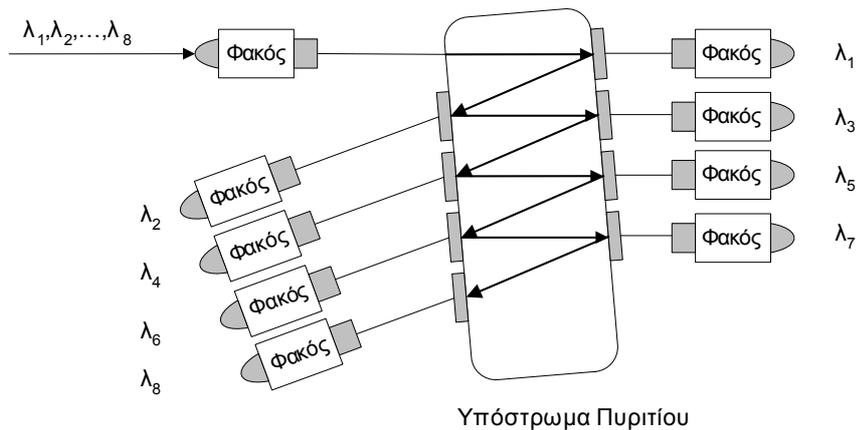
Σχήμα 2-25: Η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου $G(HL)^9HLL(HL)^9HG$ με $n_H=2.3$, $n_L=1.47$ και $n_G=1.52$.



Σχήμα 2-26: Συνάρτηση μεταφοράς φίλτρων πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων

έχει επίσης απεικονισθεί γραφικά. Τα φίλτρα πολλαπλών διηλεκτρικών υμενίων συχνά χαρακτηρίζονται από τον αριθμό των κοιλιοτήτων LL που διαθέτουν. Για παράδειγμα το $G(HL)^6HLL(HL)^{12}HLL(HL)^6HG$ χαρακτηρίζεται ως φίλτρο με δύο κοιλότητες αφού στα διηλεκτρικά του στρώματα περιέχονται δύο κοιλότητες LL. Σύμφωνα με το σχήμα 2-26, το σχήμα της συνάρτησης μεταφοράς βελτιώνεται με την αύξηση των κοιλιοτήτων LL. Το φίλτρο 3 κοιλιοτήτων παρέχει μία ικανοποιητική συνάρτηση μεταφοράς με πολύ χαμηλούς δευτερεύοντες λοβούς (χαμηλότεροι από -40dB) και τετραγωνική συμπεριφορά κοντά στο κεντρικό μήκος κύματος.

Στο σχήμα 2-27 απεικονίζεται ένας πολυπλέκτης / αποπολυπλέκτης που χρησιμοποιεί φίλτρα πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων [SS96]. Όταν η διάταξη χρησιμοποιείται ως αποπολυπλέκτης το φως εισάγεται μέσω μίας οπτικής ίνας σε ένα φακό και έπειτα σε ένα φίλτρο πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων που αφήνει να περάσει ένα μήκος κύματος ενώ ανακλά όλα τα υπόλοιπα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου διαχωριστούν όλα τα μήκη κύματος.



Σχήμα 2-27: Ένα πολυπλέκτης / αποπολυπλέκτης που χρησιμοποιεί φίλτρα πολλαπλών διηλεκτρικών στρωμάτων

Τα φίλτρα λεπτών διηλεκτρικών υμενίων χρησιμοποιούνται συχνά σε εμπορικά συστήματα WDM επειδή προσφέρουν υψηλή απομόνωση μεταξύ των καναλιών, εισάγουν χαμηλές απώλειες ισχύος και παρουσιάζουν σχετική σταθερότητα των χαρακτηριστικών τους ως προς τις θερμοκρασιακές μεταβολές. Επίσης, όπως δείχνει το σχήμα 2-26, η συνάρτηση μεταφοράς τους μπορεί να σχεδιαστεί κατάλληλα ώστε κοντά στο κεντρικό μήκος κύματος να είναι σταθερή και να επιτρέπει τη σύνδεση πολλών τέτοιων φίλτρων σε σειρά.

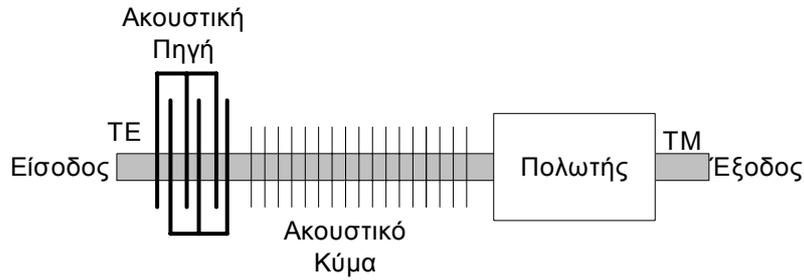
2.6 ΤΟ ΟΠΤΙΚΟ-ΑΚΟΥΣΤΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ

Στην παράγραφο 2.4, όπου εξετάσαμε τα φράγματα Bragg, διαπιστώσαμε πως μία περιοδική μεταβολή του δείκτη διάθλασης στο μέσο διάδοσης προκαλεί μεταφορά ισχύος από έναν τρόπο που διαδίδεται στην διεύθυνση του $+z$ σε έναν τρόπο διάδοσης που διαδίδεται στην διεύθυνση $-z$. Η λειτουργία του *οπτικό-ακουστικού φίλτρου* [Gre93, §4.10], [SBJ90] βασίζεται στο γεγονός ότι ένα ηχητικό κύμα που διαδίδεται μέσα σε ένα υλικό προκαλεί την περιοδική μεταβολή του δείκτη διάθλασης και επομένως σχηματίζει ένα φράγμα Bragg. Το μέσο διάδοσης υποστηρίζει δύο τρόπους διάδοσης, έναν TE και έναν TM. Η ανταλλαγή ενέργειας λαμβάνει χώρα μεταξύ των δύο αυτών τρόπων και μεγιστοποιείται όταν πληρείται η συνθήκη Bragg

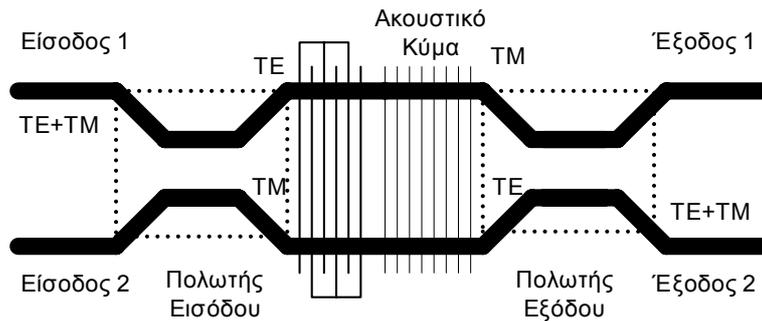
$$\frac{n_{TE}}{\lambda_0} - \frac{n_{TM}}{\lambda_0} = \pm \frac{1}{\Lambda} \quad (2.34)$$

όπου Λ το μήκος κύματος του ηχητικού σήματος που διαδίδεται στο μέσο.

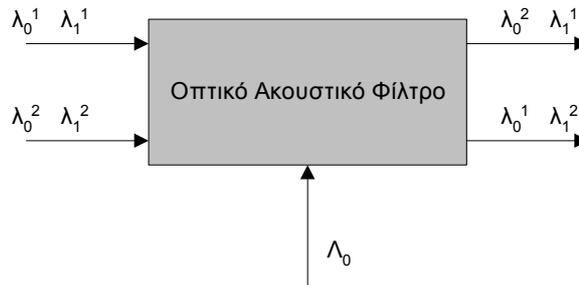
Η αρχή λειτουργίας του οπτικού-ακουστικού φίλτρου εικονίζεται στο σχήμα 2-28. Θεωρούμε πως το προσπίπτον φως στην είσοδο είναι πολωμένο μόνο κατά TE. Εξαιτίας του φράγματος Bragg που σχηματίζει το ακουστικό κύμα, για τα μήκη κύματος στην περιοχή όπου ικανοποιείται η συνθήκη Bragg η οπτική ισχύς μεταφέρεται στον τρόπο TM. Ο πολωτής πριν την έξοδο της διάταξης αφήνει να περάσει μόνο το TM κύμα και επομένως επιτυγχάνεται αποπολυπλεξία του μήκους κύματος λ_0 .



Σχήμα 2-28: Αρχή λειτουργίας του οπτικό ακουστικού φίλτρου



Σχήμα 2-29: Οπτικό ακουστικό φίλτρο σε ολοκληρωμένη μορφή με αναισθησία πόλωσης



Σχήμα 2-30: Δρομολόγηση μήκους κύματος με χρήση του φίλτρου του σχήματος 2-29

Η περιodicότητα του φράγματος Bragg Λ εξαρτάται από τη συχνότητα f_s του ακουστικού κύματος σύμφωνα με τη σχέση $\Lambda = v_s / f_s$. Στο LiNbO_3 όπου οι διαφορά μεταξύ των δεικτών διάθλασης των TE και TM τρόπων ισούται με $|n_{\text{TE}} - n_{\text{TM}}| = 0.07$, το απαιτούμενο μήκος του ακουστικού κύματος για $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$, υπολογίζεται από την (2.34) ίσο με $\Lambda = 22 \mu\text{m}$. Επειδή στο LiNbO_3 η ταχύτητα του ήχου ισούται με $v_s = 3.75 \text{ Km/s}$, τελικά η συχνότητα του ακουστικού κύματος θα προκύπτει ίση με $f_s = 170 \text{ MHz}$. Αλλάζοντας την τιμή της RF συχνότητας f_s επιτυγχάνεται συντονισμός του φίλτρου σε διαφορετικό οπτικό μήκος κύματος λ_0 .

Στο σχήμα 2-28, υποθέσαμε πως το προσπίπτον φως είχε TE πόλωση, κάτι που στην πράξη δεν ισχύει επειδή η πολωτική κατάσταση του φωτός δεν είναι σταθερή. Στο σχήμα 2-29 παρουσιάζεται μία παραλλαγή του οπτικό-ακουστικού φίλτρου που διαθέτει αναισθησία στην πόλωση. Το φως που προσπίπτει στην είσοδο 1 του φίλτρου χωρίζεται στα TE και TM τμήματα του τα οποία οδηγούνται σε διαφορετικά οπτικό-ακουστικά φίλτρα. Στο μήκος κύματος $\lambda = \lambda_0$ η πόλωση του φωτός μετατρέπεται από TE σε TM στον πάνω βραχίονα του συμβολόμετρου και από TM σε TE στο κάτω βραχίονα. Τα υπόλοιπα μήκη κύματος διατρέχουν τους βραχίονες του συμβολόμετρου δίχως να μεταβάλλεται η πολωτική τους κατάσταση. Ο δεύτερος διαχωριστής



Σχήμα 2-31: Δρομολόγηση μήκων κύματος από το οπτικοακουστικό φίλτρο όταν αυτό οδηγείται από περισσότερες ακουστικές συχνότητες

πόλωσης οδηγεί το φως με πόλωση TE του άνω βραχίονα προς στην έξοδο 1 και το φως με πόλωση TM προς στην έξοδο 2. Επίσης οδηγεί το φως με πόλωση TE από τον κάτω βραχίονα προς στην έξοδο 2 και το φως με πόλωση TM από τον ίδιο βραχίονα προς στην έξοδο 1. Με τον τρόπο αυτό τα TE και TM τμήματα του οπτικού σήματος στο μήκος κύματος $\lambda = \lambda_0$ μεταφέρεται στην έξοδο 2 ενώ τα υπόλοιπα μήκη κύματος εξέρχονται από την έξοδο 1. Εάν το οπτικό σήμα με μήκος κύματος $\lambda = \lambda_0$ προσπέσει στην είσοδο 2 του φίλτρου θα οδηγηθεί στην έξοδο 1 ενώ τα υπόλοιπα μήκη κύματος θα οδηγηθούν στην έξοδο 2. Η δρομολόγηση των μήκων κύματος μέσω ενός οπτικό-ακουστικού φίλτρου όταν αυτό οδηγείται από ένα RF ηχητικό κύμα με μήκος κύματος $\Lambda = \Lambda_0$ τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Bragg για το μήκος κύματος $\lambda = \lambda_0$, εικονίζεται στο σχήμα 2-30. Στο σχήμα με $\lambda_j^{(i)}$ έχουμε συμβολίσει το σήμα στο μήκος κύματος $\lambda = \lambda_j$ το οποίο εισέρχεται στην i -οστή είσοδο του φίλτρου.

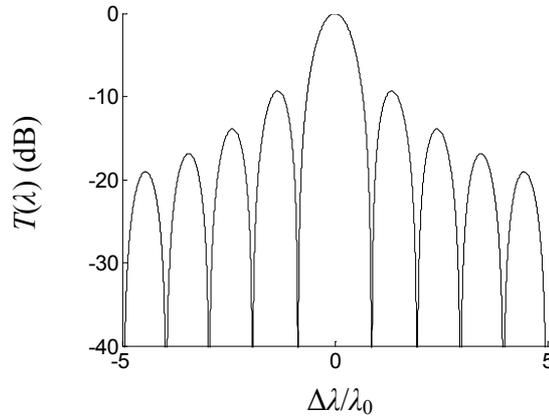
Μία πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα του οπτικό-ακουστικού φίλτρου είναι ότι αν οδηγηθεί με πολλές ακουστικές συχνότητες ταυτόχρονα, τότε μπορεί να συντονισθεί σε παραπάνω από ένα μήκη κύματος. Για παράδειγμα στο σχήμα 2-31, απεικονίζεται η δρομολόγηση των μήκων κύματος μέσω του οπτικοακουστικού φίλτρου όταν οδηγείται από δύο ακουστικές συχνότητες έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Bragg για δύο μήκη κύματος λ_0 και λ_2 . Το οπτικό-ακουστικό φίλτρο του σχήματος 2-29 δρα ως ένας 2×2 δρομολογητής μήκους κύματος, ο οποίος μετάγει τα διάφορα μήκη κύματος ανάλογα με τις ακουστικές συχνότητες που παράγονται στο εσωτερικό του. Ο χρόνος συντονισμού εξαρτάται από το χρόνο που χρειάζεται το ακουστικό κύμα για να διανύσει τους βραχίονες του συμβολόμετρου και είναι της τάξης των μς.

Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος του οπτικό-ακουστικού φίλτρου $T(\lambda)$ αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση

$$T(\lambda) = \frac{\sin^2\left(\left(\pi/2\right)\sqrt{1 + (2\Delta\lambda/\Delta)^2}\right)}{1 + (2\Delta\lambda/\Delta)^2} \quad (2.35)$$

όπου $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ η διαφορά του μήκους κύματος από το μήκος κύματος λ_0 που ικανοποιεί την συνθήκη Bragg, ενώ η παράμετρος Δ ισούται με $\lambda_0/l\Delta n$ όπου l το μήκος της οπτικό-ακουστικής διάταξης. Όσο αυξάνει η παράμετρος Δ τόσο πιο στενή γίνεται η συνάρτηση μεταφοράς. Ωστόσο το Δ δεν μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό καθώς, όπως τονίσαμε στα προηγούμενα ο χρόνος συντονισμού της διάταξης είναι ανάλογος του l και επομένως και του Δ .

Το μειονέκτημα της οπτικό-ακουστικής διάταξης είναι η μεγάλη διαφωνία [JGB96], όπως φαίνεται και στο σχήμα 2-32 παρατηρούμε πως ο μέγιστος δευτερεύον λοβός βρίσκεται πάνω από τα -10dB , πράγμα που σημαίνει ότι το οπτικό-ακουστικό φίλτρο δεν προσφέρει ικανοποιητικό διαχωρισμό των μηκών κύματος. Καλύτερα αποτελέσματα επιτυγχάνονται με τοποθέτηση δύο οπτικό-ακουστικών φίλτρων σε σειρά αλλά και πάλι ο μέγιστος δευτερεύον



Σχήμα 2-32: Συνάρτηση μεταφοράς ισχύος ενός οπτικό-ακουστικού φίλτρου

λοβός θα βρίσκεται στα -20dB που αποτελεί μια αρκετά υψηλή τιμή σε σχέση με τις υπόλοιπες εναλλακτικές τεχνολογίες φίλτρων. Επίσης, πρέπει να σημειωθεί πως η τοποθέτηση δύο ή περισσότερων οπτικό-ακουστικών φίλτρων σε σειρά αυξάνει τις απώλειες ισχύος.

2.7 ΤΟ ΦΙΛΤΡΟ FABRY-PEROT

Η αρχή λειτουργίας των φίλτρων Fabry-Perot [Gre93, §4.4],[RS98, §3.3.4] συνίσταται στην πολλαπλή διέλευση ενός οπτικού κύματος μέσα από μία κοιλότητα στα άκρα της οποίας υπάρχουν ανακλαστικές επιφάνειες, όπως φαίνεται στο σχήμα 2-33. Τα κύματα που εξέρχονται από την άλλη άκρη της διάταξης συμβάλλουν και η ένταση του μεταδιδόμενου κύματος εξαρτάται από το μήκος κύματος του οπτικού σήματος.

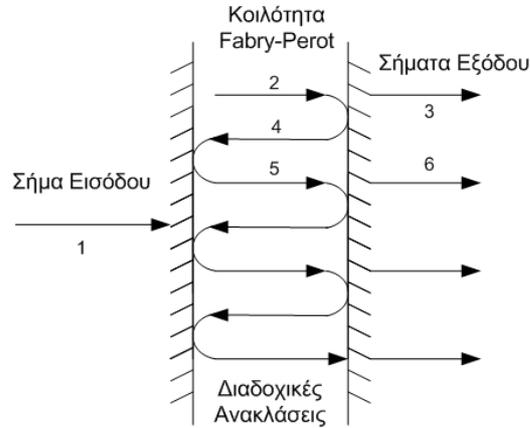
Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου Fabry-Perot υπολογίζεται από το πλάτος των μεταδιδόμενων κυμάτων που εξέρχονται από την κοιλότητα. Αν το προσπίπτον κύμα «1» έχει πλάτος E_i , τότε το κύμα «2» θα έχει πλάτος $(1-A-R)^{1/2}$ όπου A και R οι απώλειες και ο συντελεστής ανάκλασης της ανακλαστικής επιφάνειας. Το κύμα πριν ανακλαστεί στη δεξιά επιφάνεια έχει πλάτος $(1-A-R)^{1/2}E_i \exp(j\varphi)$ όπου $\varphi=(2\pi n_{\text{eff}}/\lambda)L$ και L το μήκος της κοιλότητας. Το κύμα «3» που εξέρχεται από την διάταξη θα έχει πλάτος $(1-A-R)E_i \exp(j\varphi)$. Μαζί με το κύμα «3» εξέρχεται και το κύμα «6» το οποίο έχει διανύσει τρεις φορές την κοιλότητα έχοντας υποστεί δύο ανακλάσεις και του οποίου το πλάτος ισούται με $(1-A-R)RE_i \exp(j3\varphi)$. Υπάρχει μία απειρία κυμάτων που εξέρχονται από την κοιλότητα έχοντας υποστεί περισσότερες ανακλάσεις, οπότε το πλάτος του μεταδιδόμενου σήματος προκύπτει από το ακόλουθο άθροισμα:

$$E_t = (1 - A - R) \exp(j\varphi) E_i \sum_{m=0}^{+\infty} R^m \exp(-j2m\varphi) = \frac{1 - A - R}{1 - \exp(j2\varphi)R} E_i \exp(j\varphi) \quad (2.36)$$

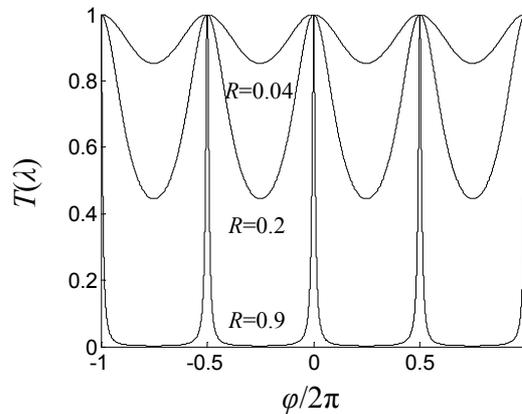
Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου $H(\lambda)$ δίνεται από το πηλίκο E_t/E_i και ισούται με

$$H(\lambda) = \frac{1 - A - R}{1 - \exp(j2\varphi)R} \exp(j\varphi) \quad (2.37)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος υπολογίζεται από την (2.37) ως εξής



Σχήμα 2-33: Φίλτρο Fabry-Perot

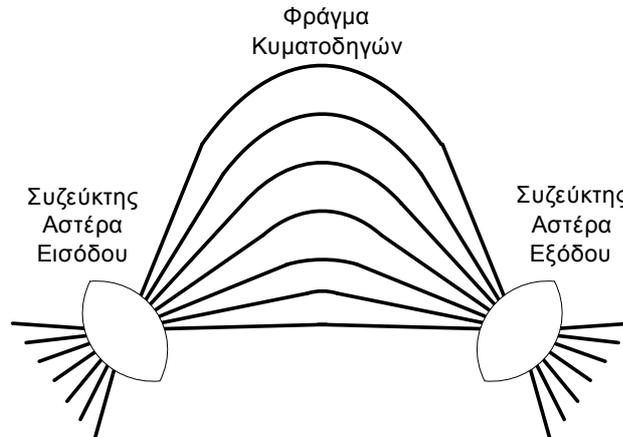


Σχήμα 2-34: Συνάρτηση Μεταφοράς Ισχύος ενός φίλτρου Fabry Perot με $A=0$

$$T(\lambda) = |H(\lambda)|^2 = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{2\sqrt{R}}{1-R} \sin(2\varphi)\right)^2\right)^{-1} \quad (2.38)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος για $A=0$ και διάφορες τιμές του συντελεστή R παρουσιάζεται στο σχήμα 2-34. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η αύξηση του συντελεστή R μειώνει το εύρος του φίλτρου και αυξάνει τον αριθμό των μήκων κύματος που μπορεί να διαχωρίσει το φίλτρο.

Όπως και στην περίπτωση των φίλτρων Mach-Zehnder, καλύτερα αποτελέσματα ως προς τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύος λαμβάνονται αν συνδεθούν σε σειρά περισσότερα του ενός φίλτρα Fabry-Perot. Επίσης το φίλτρο Fabry-Perot μπορεί να συντονιστεί μεταβάλλοντας το μήκος L της κοιλότητας με μηχανικό τρόπο, μετακινώντας τις ανακλαστικές επιφάνειες. Ο τρόπος αυτός οδηγεί σε αρκετά αργούς χρόνους συντονισμού. Μία εναλλακτική είναι η αξιοποίηση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου σύμφωνα με το οποίο ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό μεταβάλλει το μήκος του αν σε αυτό ασκηθεί εξωτερική ηλεκτρική τάση. Η χρήση πιεζοηλεκτρικού υλικού ωστόσο, έχει ως αποτέλεσμα τη θερμική αστάθεια του φίλτρου.



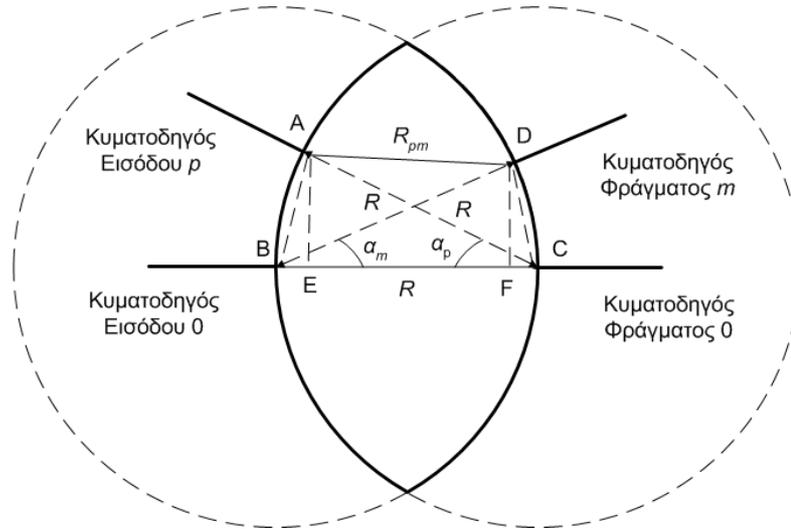
Σχήμα 2-35: Φράγμα Συστοιχίας Κυματοδηγών

Τα φίλτρα Fabry-Perot χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στα οπτικά δίκτυα WDM εξαιτίας της δυνατότητας συντονισμού που διαθέτουν. Οι περισσότερες πηγές LASER χρησιμοποιούν την κοιλότητα Fabry-Perot για να πραγματοποιηθεί η οπτική ανασύζευξη. Ωστόσο, η συνάρτηση μεταφοράς του δεν παρουσιάζει ικανοποιητική συμπεριφορά, αφού κοντά στο μέγιστο μήκος κύματος μεταβάλλεται απότομα σε αντίθεση για παράδειγμα με τα φίλτρα λεπτών διηλεκτρικών στρωμάτων των οποίων η συνάρτηση μεταφοράς που παρουσιάζει τετραγωνική συμπεριφορά κοντά στο μέγιστο μήκος κύματος.

2.8 ΦΡΑΓΜΑ ΣΥΣΤΟΙΧΙΑΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ

Στην παράγραφο όπου εξετάσαμε τα φράγματα περίθλασης είδαμε πως κύριο μειονέκτημά τους αποτελεί το γεγονός ότι είναι ογκώδεις διατάξεις και επομένως δεν επιτρέπουν την κατασκευή τους με μεθόδους ολοκληρωμένης οπτικής. Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε τα φράγματα συστοιχίας κυματοδηγών (Arrayed-Waveguide Grating – AWG) [SD96] που παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τις διατάξεις που χρησιμοποιούν φράγματα περίθλασης. Τα AWG κατασκευάζονται πάνω σε υποστρώματα πυριτίου [Hib02], [OMS95], [OST96] ή ημιαγωγικού υλικού InP [Yos02],[BMM95] και χρησιμοποιούνται συχνά στα δίκτυα WDM ως πολυπλέκτες, αποπολυπλέκτες και δρομολογητές μήκους κύματος. Ένας ADM μπορεί να κατασκευαστεί ολοκληρώνοντας ένα AWG με ημιαγωγικούς ενισχυτές στο ίδιο υπόστρωμα.

Το 1988, ο Smit [Smi88] παρατήρησε πως μία συστοιχία κυματοδηγών με διαφορετικά μήκη δρα ως οπτικό φίλτρο, κατά παρόμοιο τρόπο με το φράγμα περίθλασης. Το 1991, ο Dragone [DEK91] πρότεινε την ολοκλήρωση του φράγματος των κυματοδηγών με δύο επίπεδους συζεύκτες αστέρια, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2-35. Το WDM σήμα στους κυματοδηγούς εισόδου εισέρχεται στο συζεύκτη αστέρα εισόδου που, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3, αποτελείται από έναν επίπεδο διηλεκτρικό κυματοδηγό. Στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα η οπτική δέσμη αρχίζει να διευρύνεται και προσπίπτει στη συστοιχία των κυματοδηγών που αποτελούν το φράγμα. Το μήκος του κάθε κυματοδηγού διαφέρει κατά μία σταθερή ποσότητα ΔL από το μήκος του γειτονικού του κυματοδηγού. Τα οπτικά κύματα που διαδίδονται μέσα στους κυματοδηγούς της συστοιχίας φτάνουν στο συζεύκτη αστέρα εξόδου, με μία διαφορά φάσης που εξαρτάται και από το μήκος κύματος. Ο συζεύκτης εξόδου εστιάζει την οπτική δέσμη στους κυματοδηγούς εξόδου ανάλογα με τη διαφορά φάσης που έχουν μεταξύ τους τα οπτικά κύματα και η οποία είναι συνάρτηση του μήκους κύματος. Η εστίαση είναι διαφορετική για κάθε



Σχήμα 2-36: Γεωμετρία του συζεύκτη αστέρα εισόδου

συνιστώσα του WDM σήματος, με αποτέλεσμα οι διάφορες συνιστώσες να διαχωρίζονται στην έξοδο της διάταξης. Ας σημειωθεί πως με τη χρήση ενός καθρέφτη στους κυματοδηγούς του φράγματος, τα μήκη κύματος μπορεί να εισέρχονται και να εξέρχονται από τον ίδιο συζεύκτη αστέρα, κάτι που μειώνει σημαντικά το μέγεθος της διάταξης [OKK96].

Η γεωμετρία του συζεύκτη αστέρα εισόδου παρουσιάζεται στο σχήμα 2-36 [Dra89]. Ο συζεύκτης αστέρα είναι ο κοινός τόπος δύο κυκλικών δίσκων που έχουν την ίδια ακτίνα R που κάθε ένας έχει το κέντρο του στην περιφέρεια του άλλου. Οι κυματοδηγοί εισόδου τοποθετούνται στο αριστερό τμήμα του συζεύκτη, έτσι ώστε ο κεντρικός κυματοδηγός εισόδου να καταλήγει στο σημείο B. Αν θεωρήσουμε πως το πλήθος των κυματοδηγών εισόδου είναι περιττό και ίσο με $2P+1$, τότε ο κυματοδηγός εισόδου p ($-P \leq p \leq P$) τοποθετείται σε απόσταση $x_p = p\Delta x$ από το σημείο B πάνω στη περιφέρεια, όπου Δx το μήκος του τόξου μεταξύ δύο διαδοχικών κυματοδηγών εισόδου. Ομοίως, οι κυματοδηγοί φράγματος τοποθετούνται έτσι ώστε ο κυματοδηγός φράγματος m να βρίσκεται σε απόσταση $y_m = m\Delta y$ από τον κεντρικό κυματοδηγό φράγματος που τοποθετείται στο σημείο C. Ο συζεύκτης εξόδου κατασκευάζεται με παρόμοιο τρόπο.

Το ευθύγραμμο τμήμα $AD = R_{pm}$ που συνδέει τον οποιοδήποτε κυματοδηγό εισόδου p και τον κυματοδηγό φράγματος m πρέπει να υπολογιστεί ώστε να προσδιοριστεί η φάση του σήματος που καταλήγει στην είσοδο του κάθε κυματοδηγού φράγματος m . Η γωνία (ACB) ισούται με $\alpha_p = p\Delta x/R$ ενώ η γωνία (DBC) ισούται με $\alpha_m = m\Delta y/R$. Από τα σημεία A και D φέρουμε τις καθέτους AE και DF στο ευθύγραμμο τμήμα BC. Τα τρίγωνα AEC και DFB είναι ορθογώνια οπότε

$$AE = R \sin \alpha_p \quad (2.39)$$

$$DF = R \sin \alpha_m \quad (2.40)$$

Επίσης,

$$EC = R \cos \alpha_p \quad (2.41)$$

$$BF = R \cos \alpha_m \quad (2.42)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $BE+EF+FC=R$ και ότι $EC+BF=BE+2EF+FC$ βρίσκουμε πως

$$EF = R(\cos a_p + \cos a_m - 1) \quad (2.43)$$

Τέλος, το τραπέζιο $Aefd$ έχει τις AE και DF κάθετες στη μεγάλη του βάση, οπότε

$$R_{pm}^2 = (AE - DF)^2 + EF^2 = R^2(\sin a_p - \sin a_m)^2 + R^2(\cos a_p + \cos a_m - 1)^2 \quad (2.44)$$

Οι γωνίες a_p και a_m είναι συνήθως μικρές, οπότε αναπτύσσοντας τη (2.44) σε σειρά Taylor και κρατώντας μονάχα τους όρους μέχρι δεύτερης τάξης, βρίσκουμε

$$R_{pm} \cong R(1 - 2a_p a_m)^{1/2} \cong R(1 - a_p a_m) \quad (2.45)$$

Η φάση φ_{mp} του σήματος που εισάγεται στο συζεύκτη από τον p κυματοδηγό εισόδου και καταλήγει στην είσοδο του m κυματοδηγού του φράγματος ισούται με

$$\varphi_{mp} = \beta_0 R_{pm} \quad (2.46)$$

όπου β_0 η σταθερά διάδοσης μέσα στο συζεύκτη. Αν το μήκος του m κυματοδηγού είναι $L_m=L_0+m\Delta L$ τότε η φάση του σήματος στην έξοδο του m κυματοδηγού φράγματος ισούται με

$$\varphi_{mp} + \beta_w(L_0 + m\Delta L) \quad (2.47)$$

όπου β_w η σταθερά διάδοσης στον κυματοδηγό του φράγματος. Το σήμα στη συνέχεια οδηγείται στο δεύτερο συζεύκτη αστέρα και αν υποθέσουμε ότι καταλήγει στον κυματοδηγό q τότε η φάση του σήματος στην είσοδό του θα ισούται με

$$\varphi_{pmq} = \beta_0(R_{pm} + R_{mq}) + \beta_w(L_0 + m\Delta L) \quad (2.48)$$

Η ένταση του σήματος θα μεγιστοποιείται εάν η διαφορά φάσης των σημάτων που διέρχονται από δύο οποιουδήποτε γειτονικούς κυματοδηγούς φράγματος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , δηλαδή

$$\varphi_{pmq} - \varphi_{p(m-1)q} = 2M\pi \quad (2.49)$$

Ο ακέραιος M ονομάζεται τάξη του AWG. Αντικαθιστώντας στη (2.49) τις (2.48) και (2.45), βρίσκουμε

$$-\beta_0 R(a_p + a_q)\Delta a + \beta_w \Delta L = 2M\pi \quad (2.50)$$

Για το μήκος κύματος $\lambda=\lambda_{pq}$ για το οποίο ισχύει η (2.50), το φως που εισέρχεται στην είσοδο p του AWG εξέρχεται από την έξοδο q . Θεωρώντας πως $\beta_s \cong \beta_w = 2\pi n_{eff}/\lambda_{pq}$ το λ_{pq} γράφεται ως εξής

$$\lambda_{pq} = \frac{n_{eff}(\Delta L - R(a_p + a_q)\Delta a)}{M} \quad (2.51)$$

Αντικαθιστώντας $a_p=p\Delta x/R$, $\Delta a=\Delta y/R$ και $a_q=q\Delta x/R$, έχουμε

$$\lambda_{pq} = \lambda_0 - \Delta\lambda(p + q) \quad (2.52)$$

όπου

$$\lambda_0 = \frac{n_{eff}\Delta L}{M} \quad (2.53)$$

και

Εξόδος \ Είσοδος	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	λ_{-8}	λ_{-7}	λ_{-6}	λ_{-5}	λ_{-4}	λ_{-3}	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_0
-3	λ_{-7}	λ_{-6}	λ_{-5}	λ_{-4}	λ_{-3}	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_{-0}	λ_1
-2	λ_{-6}	λ_{-5}	λ_{-4}	λ_{-3}	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_0	λ_1	λ_2
-1	λ_{-5}	λ_{-4}	λ_{-3}	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
0	λ_{-4}	λ_{-3}	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	λ_{-3}	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2	λ_{-2}	λ_{-1}	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
3	λ_{-1}	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
4	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8

Σχήμα 2-37: Πίνακας δρομολόγησης ενός 9x9 AWG

$$\Delta\lambda = \frac{n_{eff} \Delta x \Delta y}{RM} \quad (2.54)$$

Αν υποθεθεί ότι τα μήκη κύματος $\lambda_{p(-P)}, \lambda_{p(-P+1)}, \dots, \lambda_{pP}$ βρεθούν πολυπλεγμένα στην είσοδο p του AWG τότε το μήκος κύματος $\lambda_{p(-P)}$ θα οδηγηθεί στην έξοδο $q=-P$, το $\lambda_{p(-P+1)}$ στην έξοδο $q=-P+1$ και ούτω καθεξής. Επομένως το AWG δρα ως ένας αποπολυπλέκτης μήκους κύματος. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δειχθεί πως εάν το μήκος κύματος $\lambda_{(-P)q}$ βρεθεί στην είσοδο $p=-P$ του AWG, το $\lambda_{(-P+1)q}$ στην είσοδο $p=-P+1$ και ούτω καθεξής, τότε στην έξοδο q θα συγκεντρωθούν όλα τα μήκη κύματος. Επομένως το AWG στην περίπτωση αυτή δρα ως πολυπλέκτης μήκους κύματος.

Από την εξίσωση (2.52) παρατηρούμε πως τα μήκη κύματος λ_{pq} εξαρτώνται μόνο από το άθροισμα λ_{p+q} δηλαδή

$$\lambda_{pq} = \lambda_{p+q} = \lambda_0 - \Delta\lambda(p+q) \quad (2.55)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2.55) κατασκευάζουμε τον πίνακα δρομολόγησης μήκους κύματος του AWG [TOT95] που δείχνει ποιο μήκος κύματος οδηγείται από κάθε είσοδο σε κάθε έξοδο του. Ο πίνακας ενός 9x9 AWG (με 9 εισόδους και 9 εξόδους) φαίνεται στο σχήμα 2-37.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει την οπτική συχνότητα f με το μήκος κύματος λ , $f=c/\lambda$ όπου c η ταχύτητα του φωτός, οι συχνότητες f_{pq} που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος λ_{pq} δίνονται από

$$f_{pq}(M) = f_{p+q}(M) = \frac{c}{\lambda_0 - \Delta\lambda(p+q)} \cong f_0(1 + \Delta f_{ch}(p+q)) \quad (2.56)$$

όπου

$$f_0 = f_0(M) = \frac{cM}{n_{eff} \Delta L} \quad (2.57)$$

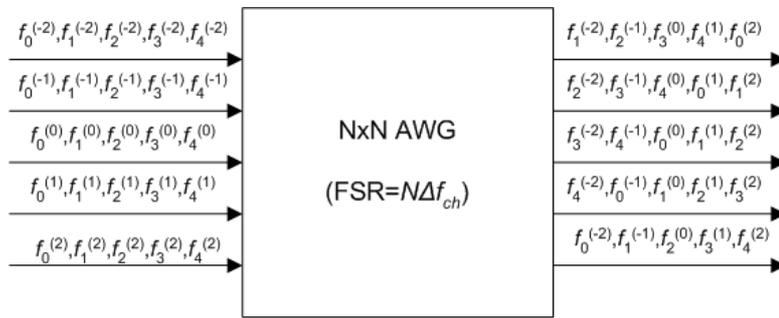
και

$$\Delta f_{ch} = \frac{\Delta x \Delta y}{R \Delta L} \quad (2.58)$$

Το Δf_{ch} είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων f_{pq} που ισούται και με την απόσταση των καναλιών που διαχωρίζει το AWG. Εξαιτίας του M στην (2.57) παρατηρούμε πως υπάρχουν πολλές συχνότητες f_0 που οδηγούνται από την είσοδο 0 στην έξοδο 0 του AWG και

Εξόδος \ Είσοδος	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_0
-3	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_0	f_1
-2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_0	f_1	f_2
-1	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_0	f_1	f_2	f_3
0	f_5	f_6	f_7	f_8	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
1	f_6	f_7	f_8	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
2	f_7	f_8	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
3	f_8	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
4	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8

Σχήμα 2-38: Ο πίνακας δρομολόγησης ενός 9x9 AWG με $FSR=9\Delta f_{ch}$



$$f_i^{(j)} = \text{Συχνότητα } f_i \text{ από την είσοδο } j$$

Σχήμα 2-39: Δρομολόγηση μήκους κύματος μέσω ενός AWG με $FSR=N\Delta f_{ch}$.

επομένως και πολλές συχνότητες f_{pq} που οδηγούνται από την είσοδο p στην έξοδο q . Οι συχνότητες αυτές απέχουν μεταξύ του κατά

$$FSR = f_0(M) - f_0(M-1) = \frac{c}{n_{eff} \Delta L} = \frac{f_0(M)}{M} \quad (2.59)$$

Η ποσότητα FSR ονομάζεται ελεύθερη φασματική περιοχή (Free Spectral Range) του AWG και περιγράφει την περιοδικότητα της φασματικής απόκρισης του AWG. Αν μία συχνότητα f_i οδηγείται από την είσοδο p στην έξοδο q , τότε το ίδιο θα ισχύει και για τις συχνότητες $f_i + kFSR$ όπου k ακέραιος. Το FSR εξαρτάται από τη διαφορά δρόμου μεταξύ δύο διαδοχικών κυματοδηγών του φράγματος, όπως φαίνεται και από τη (2.59).

Στην περίπτωση όπου $FSR=(2P+1)\Delta f_{ch}$ τότε θα ισχύει

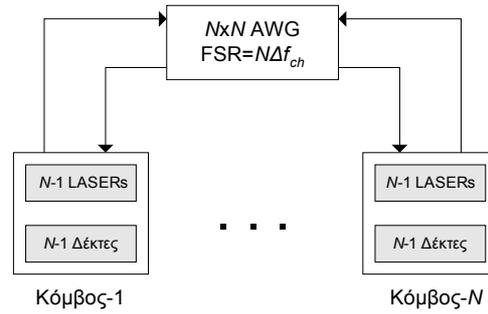
$$f_{p+q}(M) = (M(2P+1) + p + q)\Delta f_{ch} \quad (2.60)$$

$$f_{p+q}(M-1) = ((M-1)(2P+1) + p + q)\Delta f_{ch} \quad (2.61)$$

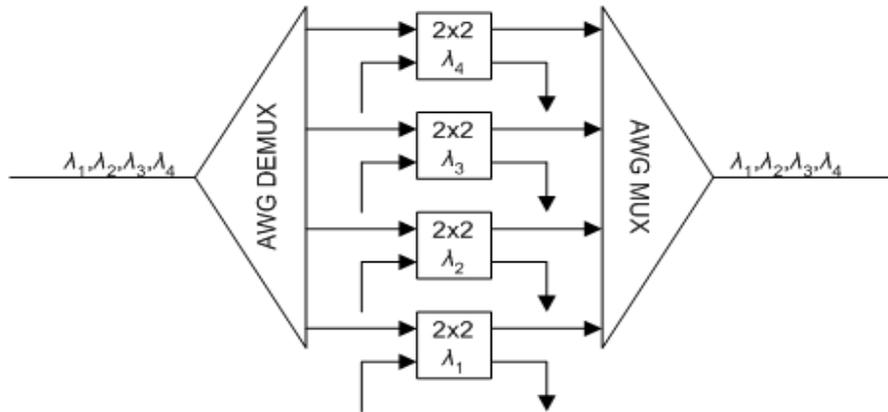
όποτε

$$f_{p+q}(M) = f_{p+q+2P+1}(M-1) \quad (2.62)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.62) οι συχνότητες f_8 και f_1 στον 9x9 AWG, του οποίου ο πίνακας δρομολόγησης δίνεται στο σχήμα 2-37, καταλήγουν στην ίδια έξοδο. Το ίδιο ισχύει για τις



Σχήμα 2-40: $N \times N$ οπτική διασύνδεση με ένα AWG.

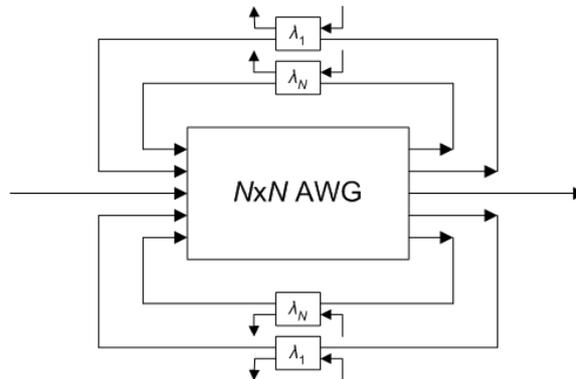


Σχήμα 2-41: ADM που αποτελείται από δύο AWG και 2x2 διακόπτες

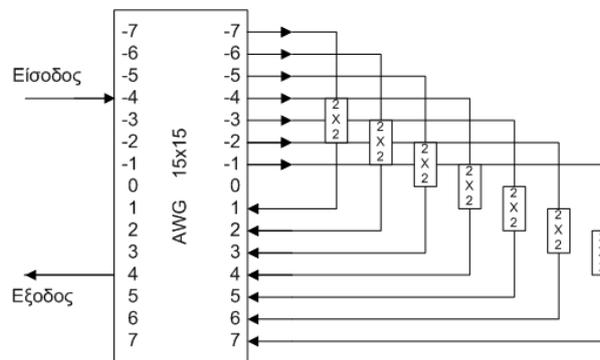
συχνότητες f_m και f_{2p+1-m} . Ο πίνακας δρομολόγησης σε αυτήν την περίπτωση δίνεται στο σχήμα 2-38. Παρατηρούμε πως σε κάθε είσοδο επιλέγοντας κατάλληλα τη συχνότητα του οπτικού σήματος από τις f_0, \dots, f_8 μπορούμε να οδηγηθούμε σε οποιαδήποτε από τις 9 εξόδους του AWG. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι θέτοντας $FSR = N\Delta f_{ch}$ και επιλέγοντας μία συχνότητα από μία ομάδα N οπτικών συχνοτήτων (f_0, \dots, f_N), μπορούμε να οδηγηθούμε από οποιαδήποτε είσοδο ενός $N \times N$ AWG σε οποιαδήποτε έξοδο όπως φαίνεται και στο σχήμα 2-39 για $N=5$.

Ο πίνακας δρομολόγησης του σχήματος 2-38 διαθέτει μία κυκλική συμμετρία, αφού οι συχνότητες κάθε στήλης προκύπτουν από τις συχνότητες της προηγούμενης με κυκλική ολίσθησή τους κατά μία θέση. Η κυκλική αυτή ιδιότητα του AWG επιτρέπει την κατασκευή μίας $N \times N$ οπτικής διασύνδεσης στην οποία χρησιμοποιώντας N μήκη κύματος, υπάρχει η δυνατότητα να λαμβάνουν ταυτόχρονα χώρα $N(N-1)$ συνδέσεις μεταξύ των κόμβων. Μία τέτοια διασύνδεση απεικονίζεται στο σχήμα 2-40 [TOT96]. Κάθε κόμβος k διαθέτει $N-1$ LASER συντονισμένα στα μήκη κύματος $\lambda_1 = c/f_1, \dots, \lambda_{k-1} = c/f_{k-1}, \lambda_{k+1} = c/f_{k+1}, \dots, \lambda_N = c/f_N$ καθώς και $N-1$ δέκτες συντονισμένους στα ίδια μήκη κύματος. Ενεργοποιώντας κάθε χρονική στιγμή τα κατάλληλα LASER κάθε κόμβος έχει τη δυνατότητα να αποκαταστήσει μία σύνδεση με κάθε άλλο κόμβο χρησιμοποιώντας το AWG ως δρομολογητή μήκους κύματος. Το δίκτυο του σχήματος 2-40 αποτελεί μία βελτιωμένη μορφή του δικτύου του σχήματος 1-5, το οποίο χρησιμοποιούσε έναν συζεύκτη αστέρα αντί του AWG, με αποτέλεσμα να αυξάνονται οι απώλειες οπτικής ισχύος και να μην παρέχεται η δυνατότητα εγκατάστασης $N(N-1)$ ταυτόχρονων συνδέσεων.

Σε ένα ιδανικό AWG (χωρίς κατασκευαστικές ατέλειες), ο κύριος λοβός της συνάρτησης μεταφοράς έχει Gaussian μορφή και οι δευτερεύοντες λοβοί έχουν πολύ χαμηλή στάθμη, όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 3 όπου θα παρουσιάσουμε μία πλήρη ηλεκτρομαγνητική μελέτη του AWG. Ωστόσο, εξαιτίας των κατασκευαστικών σφαλμάτων που λαμβάνουν χώρα σε ένα



Σχήμα 2-42: Ένα AWG σε συνδεσμολογία οπίσθιου βρόγχου (loop-back)



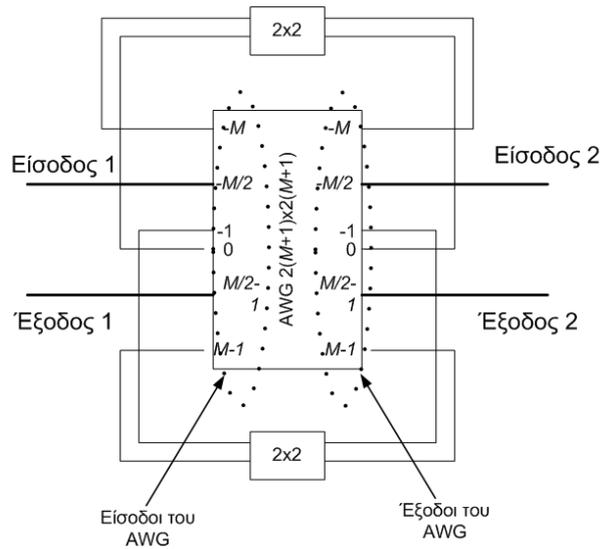
Σχήμα 2-43: Ένα AWG σε συνδεσμολογία αναδίπλωσης (fold-back)

πραγματικό AWG, το ύψος των δευτερευόντων λοβών αυξάνει [TYI95]. Η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος ενός τυπικού AWG μπορεί, ανάλογα με τις κατασκευαστικές ανοχές και τις παραμέτρους σχεδιασμού, να έχει δευτερευόντες λοβούς από -15dB έως και -40dB , όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 4.

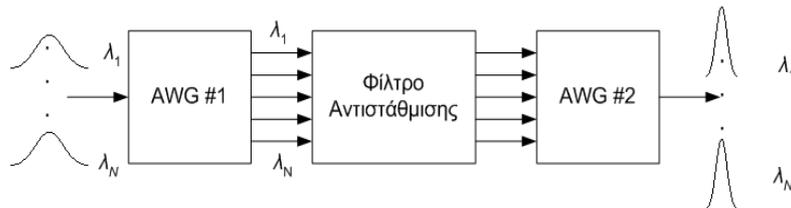
Ένα άλλο πρόβλημα στα AWG είναι η διπλοδιαθλαστικότητα που παρουσιάζουν. Στα AWG που κατασκευάζονται σε υπόστρωμα πυριτίου υπάρχουν δύο εναλλακτικές για την αναίρεση της διπλοδιαθλαστικότητας: Χρήση στρώματος πολυαμιδίου [IOK94], ή κατάλληλος σχεδιασμός των κυματοδηγών του φράγματος [NWL99]. Παρόμοιες τεχνικές χρησιμοποιούνται και για τα AWG που κατασκευάζονται σε ημιαγωγό [SAL96].

Τα AWG συνδυάζονται με οπτικούς μεταγωγείς 2×2 σε ολοκληρωμένη μορφή με σκοπό την κατασκευή ενός ADM όπως φαίνεται στο σχήμα 2-41. Οι μεταγωγείς μπορεί να είναι ενισχυτές ημιαγωγού [ZJG94] ή άλλου τύπου όπως θερμοοπτικοί [SHI98]. Το πρώτο AWG αποπολυπλέκει τα μήκη κύματος των καναλιών εισόδου και τα οδηγεί σε 2×2 μεταγωγείς. Οι διακόπτες είτε αφήνουν το κανάλι να περάσει είτε το αντικαθιστούν με ένα άλλο κανάλι στο ίδιο μήκος κύματος, πραγματοποιώντας με τον τρόπο αυτό την προσθαφαίρεση των καναλιών. Το δεύτερο AWG μετά τους διακόπτες πολυπλέκει τα μήκη κύματος. Πρόσφατα, κατασκευάστηκαν τέτοιου είδους διατάξεις με δυνατότητα να μετάνομα 64 μήκη κύματος [KSO02].

Η διάταξη του σχήματος 2-41 μπορεί να κατασκευαστεί σε InP [Yos02] και λειτουργεί ικανοποιητικά όταν η κεντρική συχνότητα $f_0(M)$ των δύο AWG είναι η ίδια. Στην πράξη ο παραπάνω περιορισμός ενδεχομένως να είναι δύσκολο να επιτευχθεί και χρησιμοποιείται το ίδιο AWG ταυτόχρονα και σαν πολυπλέκτης και σαν αποπολυπλέκτης, όπως φαίνεται στα σχήματα 2-42 και 2-43. Η συνδεσμολογία του AWG του σχήματος 2-42 ονομάζεται συνδεσμολογία



Σχήμα 2-44: 2x2 μεταγωγέας μήκους κύματος που χρησιμοποιεί ένα AWG σε συνδεσμολογία οπίσθιου βρόγχου και αναδίπλωσης ταυτόχρονα



Σχήμα 2-45: Αντιστάθμιση της διασποράς με συνδυασμό δύο AWG και δύο φίλτρων αντιστάθμισης

οπίσθιου βρόγχου (loop-back configuration), [TIK93],[TII96]. Το WDM σήμα εισέρχεται στο AWG από την κεντρική του είσοδο και αποπολυπλέκεται στις εξόδους του. Τα αποπολυπλεγμένα μήκη κύματος οδηγούνται σε 2x2 μεταγωγείς που είναι υπεύθυνοι για την πρόσθεση / αφαίρεση των καναλιών. Έπειτα τα μήκη κύματος οδηγούνται στις εισόδους του AWG όπου πολυπλέκονται στην κεντρική έξοδο. Δυστυχώς όμως εξαιτίας της διαφωνίας του AWG τα κανάλια εισόδου που συνεχίζουν να βρίσκονται στην κεντρική είσοδο θα παρουσιασθούν στην κεντρική έξοδο μαζί με τα κανάλια εξόδου προκαλώντας θόρυβο διαφωνίας.

Για την εξάλειψη του θορύβου αυτού χρησιμοποιείται η διάταξη του σχήματος 2-43 στην οποία χρησιμοποιείται ένα AWG μεγαλύτερου μεγέθους σε συνδεσμολογία αναδίπλωσης (fold-back configuration) [TIO94],[ITS94]. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, στην είσοδο -4 εισέρχεται το σήμα WDM του οποίου τα μήκη κύματος αποπολυπλέκονται στις εξόδους -7 έως -1 του AWG. Τα σήματα από την έξοδο $-q$ οδηγούνται στην έξοδο $-q+8$ και πολυπλέκονται στην είσοδο 4 του AWG αφού περάσουν από τους μεταγωγείς 2x2 που αναλαμβάνουν την προσθήκη / απομάστευση των καναλιών. Το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου βρίσκονται στην ίδια πλευρά του AWG κάτι που σημαίνει πως το σήμα εισόδου για να εμφανιστεί στο σήμα εξόδου θα πρέπει να περάσει δύο φορές μέσα από το AWG, οπότε η ισχύς του θα εξασθενίσει σημαντικά.

Με κατάλληλο συνδυασμό των συνδεσμολογιών αναδίπλωσης και οπίσθιου βρόγχου μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν 2x2 μεταγωγέα μήκους κύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2-44 [SHT94]. Για να κατασκευαστεί ένας μεταγωγέας 2x2 με δυνατότητα μεταγωγής M μηκών κύματος χρησιμοποιείται ένα AWG με μέγεθος $(2M+1) \times (2M+1)$. Οι εισόδους p ($-M \leq p \leq -1$) και $p+M$ του AWG συνδυάζονται σε έναν 2x2 χωρικό μεταγωγέα. Η μία είσοδος και η μία έξοδος

του μεταγωγέα μήκους κύματος βρίσκεται στις θυρίδες εισόδου $p=-M/2$ και $p=M/2-1$ του AWG ενώ το δεύτερο ζευγάρι εισόδου-εξόδου βρίσκεται στις θύρες εξόδου $q=-M/2$ και $q=M/2-1$ του AWG. Τα σήματα στην είσοδο 1 του μεταγωγέα μήκους κύματος αποπολυπλέκονται στις εξόδους $q=-M/2$ έως $q=-1$ και οδηγούνται σε 2×2 χωρικούς μεταγωγείς. Η μία έξοδος των χωρικών μεταγωγέων οδηγείται μέσω μίας συνδεσμολογίας οπίσθιου βρόγχου στην έξοδο 2 και η άλλη μέσω μίας συνδεσμολογίας αναδίπλωσης στην έξοδο 1. Επομένως ανάλογα με την κατάσταση κάθε χωρικού μεταγωγέα, ένα σήμα από την είσοδο 1 του μεταγωγέα μήκους κύματος οδηγείται είτε στην έξοδο 1 είτε στην έξοδο 2. Με τον ίδιο τρόπο λαμβάνει χώρα η μεταγωγή των σημάτων στη δεύτερη είσοδο του μεταγωγέα μήκους κύματος.

Το AWG σε συνδυασμό με ένα κατάλληλο φίλτρο αντιστάθμισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αντιστάθμιση της επίδρασης της χρωματικής διασποράς της οπτικής ίνας σε ένα σήμα WDM όπως φαίνεται στο σχήμα 2-45. Το σήμα αποπολυπλέκεται στο πρώτο AWG και κάθε μήκος κύματος οδηγείται σε ένα φίλτρο που αντισταθμίζει την επίδραση της χρωματικής διασποράς στη φάση των επιμέρους σημάτων του WDM σήματος. Τα αντισταθμισμένα σήματα πολυπλέκονται από το δεύτερο AWG. Το πρώτο και το δεύτερο AWG μπορεί να είναι η ίδια διάταξη, με τη χρήση μίας ανακλαστικής επιφάνειας στην έξοδο του φίλτρου [TOT99].

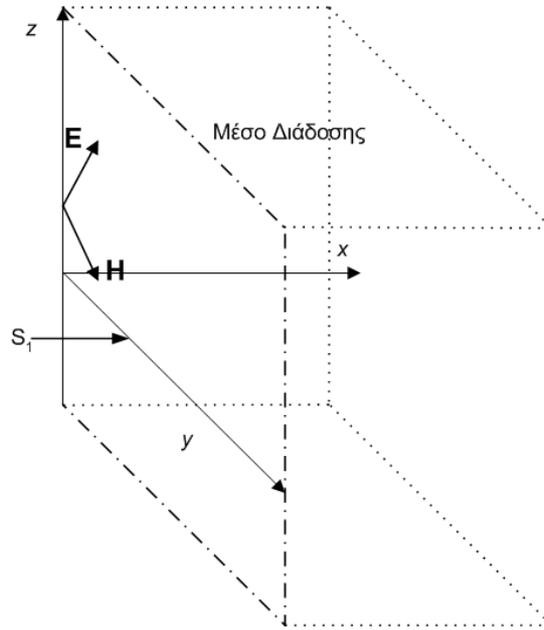
Η διάταξη του σχήματος 2-45 έχει τη δυνατότητα να αντισταθμίζει τόσο τη δεύτερης όσο και την τρίτης τάξεως διασπορά. Ο αντισταθμιστής διασποράς που προτάθηκε το 1999 [TOT99] ήταν σε θέση να αντισταθμίζει διασπορά δεύτερης τάξης μέχρι 100ps/nm και τρίτης τάξης μέχρι 940ps/nm^2 για παλμούς με εύρος από 5 έως 20ps.

3. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ AWG

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παράγραφο 2.8 υπολογίσαμε τη διαφορά φάσεως μεταξύ των διαδρομών που ακολουθεί το σήμα όταν διαδίδεται σε δύο γειτονικούς κυματοδηγούς του AWG και κατασκευάσαμε τον πίνακα δρομολόγησης της διάταξης. Ωστόσο, η παραπάνω μέθοδος δεν αρκεί για μία πλήρη περιγραφή της όλης διάταξης, αφού δεν παρέχει καμία πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς της. Για να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του AWG θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ηλεκτρομαγνητική θεωρία λαμβάνοντας υπόψη όλα τα φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στους συζεύκτες αστέρα αλλά και στους κυματοδηγούς του AWG.

Στο συζεύκτη αστέρα εισόδου του AWG, που αποτελείται από έναν επίπεδο κυματοδηγό (slab waveguide) προσπίπτει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο καθορίζεται από τους τρόπους διάδοσης των κυματοδηγών εισόδου. Για την περιγραφή της διάδοσης στο συζεύκτη αστέρα εισόδου αλλά και στο συζεύκτη αστέρα εξόδου θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις Green. Οι συναρτήσεις Green ενός κυματοδηγού περιγράφουν τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που οφείλεται σε μία σημειακή πηγή. Επομένως το συνολικό πεδίο προκύπτει με την ολοκλήρωση πάνω στην πηγή, της συνάρτησης Green επί την πραγματική κατανομή της πηγής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που στη συγκεκριμένη περίπτωση καθορίζεται από τον τρόπο διάδοσης στον κυματοδηγό εισόδου. Στη βιβλιογραφία, για την περιγραφή της διάδοσης κυμάτων μέσα στο συζεύκτη αστέρα χρησιμοποιείται απευθείας η συνάρτηση Green σε δύο διαστάσεις [Dra89],[Smi93],[MT98]. Στις επόμενες παραγράφους θα δείξουμε πως το τρισδιάστατο πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα δύο διαστάσεων. Συγκεκριμένα στην παράγραφο 3.2 θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του Love για να υπολογίσουμε την αρχική διέγερση στην είσοδο του συζεύκτη αστέρα του AWG. Στις παραγράφους 3.3, 3.4 και 3.5 θα εξετάσουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις Green ενός άπειρου διηλεκτρικού μέσου του οποίου ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από την μία μόνο διάσταση ($n=n(z)$). Στις παραγράφους 3.6, 3.7 και 3.8 θα δείξουμε πως οι συναρτήσεις Green του άπειρου αυτού μέσου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα. Στην παράγραφο 3.9 θα καταλήξουμε σε ασυμπτωτικές μορφές για τις συναρτήσεις Green του συζεύκτη αστέρα και στην παράγραφο 3.10 θα δείξουμε πως, εξαιτίας της μορφής των συναρτήσεων Green το τρισδιάστατο πρόβλημα όντως μπορεί να αναχθεί σε ένα δισδιάστατο. Τα αποτελέσματα θα χρησιμοποιηθούν στο κεφαλαίο 4 για να για να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του AWG η οποία αποδεικνύεται ότι κοντά στην κεντρική συχνότητα προσεγγίζεται από μία Gaussian κατανομή. Επίσης στο ίδιο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε και τις επιπτώσεις της σύζευξης των κυματοδηγών του φράγματος στις επιδόσεις του AWG.



Σχήμα 3-1: Προσπίπτον πεδίο στο $x=0$

3.2 Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ LOVE

Στο σχήμα 3-1, εικονίζεται ένα άπειρο διηλεκτρικό μέσο το οποίο εκτείνεται από το $x=0$ έως το $x=+\infty$. Θεωρούμε πως ο δείκτης διάθλασης του μέσου $n=n(z)$ παρουσιάζει μία μεταβολή μόνο ως προς τη διεύθυνση z . Στο επίπεδο $x=0$ προσπίπτει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με πλάτος ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}(0,y,z)$ και πλάτος μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}(0,y,z)$. Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσα στο μέσο, ορίζουμε τη συνάρτηση Green $\bar{\mathbf{G}}$ σύμφωνα με τη σχέση [Tai71, §4.14],

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{G}} - k^2(z)\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, $\bar{\mathbf{G}}$ είναι η συνάρτηση Green του μέσου, $\bar{\mathbf{I}}$ το μοναδιαίο δυαδικό, $k(z)=\epsilon_0\mu_0n^2(z)$ ενώ ϵ_0 και μ_0 η ηλεκτρική και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Για $x>0$ το ηλεκτρικό πεδίο υπακούει την κυματική εξίσωση

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2(z)\mathbf{E} = 0 \quad (3.2)$$

στην περίπτωση που δεν υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό ρεύμα για $x>0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green

$$\int_V dV (\mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P}) = \oint_S d\mathbf{S} (\mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}) \quad (3.3)$$

για $\mathbf{P}=\mathbf{E}$ και $\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}$ όπου \mathbf{a} ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα, θα λάβουμε:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} = \oint_S \left((\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}) \right) dS \quad (3.4)$$

όπου $d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$. Το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} και το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} ικανοποιούν την εξίσωση

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (3.5)$$

όποτε η (3.4) θα γραφεί

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} = \oint_S \left((-j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{a} \right) dS \quad (3.6)$$

Η επιφάνεια S περιβάλλει τον όγκο V ο οποίος εκτείνεται από το επίπεδο $x=0$ έως το επίπεδο $x=+\infty$. Επομένως μπορεί να γραφεί ως $S=S_1+S_\infty$ όπου S_1 είναι το επίπεδο $x=0$ και S_∞ η υπόλοιπη επιφάνεια. Η συνάρτηση Green και το ηλεκτρικό πεδίο πληρούν τη συνθήκη ακτινοβολίας όταν $|\mathbf{r}|=r=\infty$, η οποία γράφεται ως εξής

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(jk(z)\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{G}} - \nabla \times \bar{\mathbf{G}}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(jk(z)\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad (3.8)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.7) και (3.8) αποδεικνύεται σχετικά εύκολα πως το τμήμα του ολοκληρώματος της (3.6) πάνω στην επιφάνεια S_∞ ισούται με μηδέν και επομένως

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} = \int_{S_1} \left((-j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{a} \right) dS \quad (3.9)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε \mathbf{a} , η (3.9) γράφεται σε διανυσματική μορφή:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left((-j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right) dS \quad (3.10)$$

Αν η συνάρτηση Green είναι συμμετρική¹ τότε ανταλλάσσοντας το \mathbf{r} με το \mathbf{r}' θα έχουμε

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{S_1} \left(\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot (-j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}) - (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \right) dS' \quad (3.11)$$

Στην περίπτωση όπου για $x>0$ υπήρχε ηλεκτρικό ρεύμα η εξίσωση (3.2) θα γραφότανε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2(z)\mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{J} \quad (3.12)$$

όπου $\mathbf{J}=\mathbf{J}(\mathbf{r})$ το ηλεκτρικό ρεύμα για $x>0$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για την εξίσωση (3.12) προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο θα δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{S_1} \left(\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot (-j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}) - (\nabla \times \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \right) dS' + \int_V -j\omega\mu_0 \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J} dV \quad (3.13)$$

Από την εξίσωση (3.13) παρατηρούμε ότι τα διανύσματα \mathbf{J} και $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ πολλαπλασιάζονται με την ίδια συνάρτηση Green και το γινόμενο ολοκληρώνεται στον όγκο V στην πρώτη περίπτωση και στην επιφάνεια S_1 στη δεύτερη. Επομένως το $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα επιπλέον επιφανειακό ρεύμα το οποίο συνεισφέρει στη γέννηση του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} . Ομοίως

¹ Το συμμετρικό $\hat{\mathbf{G}}$ ενός δυαδικού $\bar{\mathbf{G}}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}$$

για κάθε διάνυσμα \mathbf{A} . Μία δυαδική συνάρτηση Green ονομάζεται συμμετρική εάν

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{b} | \mathbf{a}) \text{ για κάθε } \mathbf{a} \text{ και } \mathbf{b}.$$

αποδεικνύεται πως η ποσότητα $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επιπλέον επιφανειακό μαγνητικό ρεύμα το οποίο συνεισφέρει στη γέννηση του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} . Το παραπάνω αποτέλεσμα ονομάζεται αρχή του Love [Col60, §1.4], [Bal82, §11.2] και χρησιμοποιείται συχνά στον ηλεκτρομαγνητισμό για την εύρεση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός μέσου αν γνωρίζουμε την τιμή του στην περιβάλλουσα επιφάνεια του. Στην περίπτωση του συζευκτού αστέρα του AWG το μέσο στο εσωτερικό του οποίου επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ένας επίπεδος κυματοδηγός και ο τρόπος διάδοσης του κυματοδηγού εισόδου αποτελεί την πηγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Επομένως σύμφωνα με την αρχή του Love χρησιμοποιούμε το ισοδύναμο επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα \mathbf{J}_s και το ισοδύναμο επιφανειακό μαγνητικό \mathbf{M}_s :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (3.15)$$

και υπολογίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left(\overline{\mathbf{G}}^{EJ}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') + \overline{\mathbf{G}}^{EM}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') \right) dS \quad (3.16)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \int_{S_1} \left(\overline{\mathbf{G}}^{HJ}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') + \overline{\mathbf{G}}^{HM}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') \right) dS \quad (3.17)$$

Η συνάρτηση

$$\overline{\mathbf{G}}^{EJ} = -j\omega\mu\overline{\mathbf{G}} \quad (3.18)$$

είναι η συνάρτηση Green που συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με το ηλεκτρικό ρεύμα ενώ η συνάρτηση

$$\overline{\mathbf{G}}^{EM} = \nabla \times \overline{\mathbf{G}} \quad (3.19)$$

συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με το μαγνητικό ρεύμα. Ανάλογα ορίζονται και οι συναρτήσεις Green της (3.17).

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Ας θεωρήσουμε ένα άπειρο διηλεκτρικό μέσο του οποίου ο δείκτης διάθλασης $n=n(z)$ μεταβάλλεται μόνο ως προς την κατεύθυνση z . Έστω \mathbf{J} και \mathbf{M} το ηλεκτρικό και το μαγνητικό ρεύμα σε κάθε σημείο του χώρου. Οι εξισώσεις Maxwell στην περίπτωση αυτή θα γραφούν ως εξής [MM97],

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (3.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (3.22)$$

όπου $\varepsilon=\varepsilon(z)=\varepsilon_0 n^2(z)$ η ηλεκτρική διαπερατότητα του μέσου. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός πως το μέσο παρουσιάζει μία ομοιομορφία ως προς τις εγκάρσιες συντεταγμένες x,y χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Fourier δύο διαστάσεων ο οποίος για μία συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζεται ως εξής:

$$F\{f\} = \tilde{f}(\mathbf{k}_\rho) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(\mathbf{r}_t) \exp(j\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{k}_\rho) d\mathbf{r}_t \quad (3.23)$$

$$F^{-1}\{\tilde{f}\} = f(\mathbf{r}_t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}_\rho) \exp(-j\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{k}_\rho) d\mathbf{k}_\rho \quad (3.24)$$

όπου $\mathbf{r}_t=(x,y)$ και $\mathbf{k}_\rho=(k_x,k_y)$. Μετασχηματίζοντας τις (3.21) και (3.22) κατά Fourier και χωρίζοντας τις εγκάρσιες συνιστώσες (x,y) από τη διαμήκη συνιστώσα (z) , λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις:

$$\frac{d}{dz} \tilde{\mathbf{E}}_t = \frac{1}{j\omega\epsilon} (k^2(z) - \mathbf{k}_\rho \mathbf{k}_\rho \cdot) (\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{z}) + \mathbf{k}_\rho \frac{\tilde{J}_z}{\omega\epsilon} - \tilde{\mathbf{M}}_t \times \mathbf{z} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{\mathbf{H}}_t = \frac{1}{j\omega\mu_0} (k^2(z) - \mathbf{k}_\rho \mathbf{k}_\rho \cdot) (\mathbf{z} \times \tilde{\mathbf{E}}_t) + \mathbf{k}_\rho \frac{\tilde{M}_z}{\omega\epsilon} - \mathbf{z} \times \tilde{\mathbf{J}}_t \quad (3.26)$$

$$-j\omega\epsilon \tilde{E}_z = j\mathbf{k}_\rho (\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{z}) + \tilde{J}_z \quad (3.27)$$

$$-j\omega\mu_0 \tilde{H}_z = j\mathbf{k}_\rho (\mathbf{z} \times \tilde{\mathbf{H}}_t) + \tilde{M}_z \quad (3.28)$$

Η περαιτέρω ανάλυση απλοποιείται σημαντικά εάν ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} ως εξής:

$$\mathbf{u} = \frac{k_x}{k_\rho} \mathbf{x} + \frac{k_y}{k_\rho} \mathbf{y} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{v} = -\frac{k_y}{k_\rho} \mathbf{x} + \frac{k_x}{k_\rho} \mathbf{y} \quad (3.30)$$

Βάσει των \mathbf{u} και \mathbf{v} τα εγκάρσια πεδία εκφράζονται ως εξής

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathbf{u}V^e + \mathbf{v}V^h \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{z} = \mathbf{u}I^e + \mathbf{v}I^h \quad (3.32)$$

όπου V^e και V^h είναι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου $\tilde{\mathbf{E}}_t$ στη διεύθυνση των \mathbf{u} και \mathbf{v} , I^e και I^h είναι οι συνιστώσες του $\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{z}$. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (3.25)-(3.26) λαμβάνουμε

$$\frac{dV^p}{dz} = -jk_z^p Z^p I^p + \nu^p \quad (3.33)$$

$$\frac{dI^p}{dz} = -jk_z^p Y^p V^p + i^p \quad (3.34)$$

όπου το p μπορεί να είναι είτε ίσο με e είτε ίσο με h . Οι εξισώσεις (3.33)-(3.34) αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων εξισώσεων, παρόμοιο με αυτό μίας γραμμής μεταφοράς που διεγείρεται από μία πηγή τάσης ν^p και μία πηγή ρεύματος i^p . Οι σταθερές διάδοσης και οι χαρακτηριστικές εμπεδήσεις δίνονται από τις σχέσεις

$$k_z^p = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} \quad (3.35)$$

$$Z^e = \frac{1}{Y_e} = \frac{k_z^e}{\omega \varepsilon} \quad (3.36)$$

$$Z^h = \frac{1}{Y^h} = \frac{\omega \mu}{k_z^h} \quad (3.37)$$

ενώ για τις πηγές τάσης v^p και ρεύματος i^p ισχύει

$$v^e = \frac{k_\rho}{\omega \varepsilon} \tilde{J}_z - \tilde{M}_v \quad (3.38)$$

$$i^e = -\tilde{J}_u \quad (3.39)$$

$$i^h = \frac{k_\rho}{\omega \mu_0} \tilde{M}_z - \tilde{J}_v \quad (3.40)$$

$$v^h = \tilde{M}_u \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.31)-(3.32) και (3.27)-(3.28) το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο γράφεται:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{u}V^e + \mathbf{v}V^h - \mathbf{z} \frac{1}{j\omega \varepsilon} (jk_\rho I^e + \tilde{J}_z) \quad (3.42)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{v}I^e - \mathbf{u}I^h + \mathbf{z} \frac{1}{j\omega \mu_0} (jk_\rho V^h - \tilde{M}_z) \quad (3.43)$$

Παρατηρούμε πως απουσία πηγών ηλεκτρικού και μαγνητικού ρεύματος παράλληλα με την διαστρωμάτωση του μέσου ($J_z=M_z=0$), τα V^e και I^e αντιστοιχούν σε πεδία TM και τα V^h και I^h σε πεδία TE (ως προς την διεύθυνση z). Οι εξισώσεις (3.42)-(3.43) παρέχουν το μετασχηματισμό Fourier του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο πεδίο του χώρου υπολογίζεται με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier (3.24).

3.4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

Οι συναρτήσεις Green των εξισώσεων (3.16)-(3.17) υπολογίζονται από τις συναρτήσεις Green τάσης και ρεύματος των εξισώσεων γραμμών μεταφοράς (3.33)-(3.34). Οι συναρτήσεις Green τάσης και ρεύματος είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$\frac{dV_i^p}{dz} = -jk_z^p Z^p I_i^p \quad (3.44)$$

$$\frac{dI_i^p}{dz} = -jk_z^p Y^p V_i^p + \delta(z-z') \quad (3.45)$$

$$\frac{dV_v^p}{dz} = -jk_z^p Z^p I_v^p + \delta(z-z') \quad (3.46)$$

$$\frac{dI_v^p}{dz} = -jk_z^p Y^p V_v^p \quad (3.47)$$

Η συναρτήσεις Green $V_i^p(z|z')$ και $I_i^p(z|z')$ αντιστοιχούν στην τάση και στο ρεύμα αντίστοιχα, που οφείλεται στην ύπαρξη μίας σημειακής πηγής ρεύματος στο σημείο $z=z'$. Οι συναρτήσεις Green $V_v^p(z|z')$ και $I_v^p(z|z')$ αντιστοιχούν στην τάση και στο ρεύμα αντίστοιχα, που οφείλεται στην ύπαρξη μίας σημειακής πηγής τάσης στο σημείο $z=z'$ [MM97]. Η τάση και το ρεύμα υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$V^p = \langle V_i^p, i^p \rangle + \langle V_v^p, v^p \rangle \quad (3.48)$$

$$I^p = \langle I_i^p, i^p \rangle + \langle I_v^p, v^p \rangle \quad (3.49)$$

όπου το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για δύο συναρτήσεις $f=f(z')$ και $g=g(z')$ του z' ορίζεται ως εξής

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz' f(z') g(z') \quad (3.50)$$

Οι (3.48)-(3.49) μετασχηματισμένες κατά Fourier γράφονται ως εξής

$$\tilde{\mathbf{E}} = \langle \tilde{\mathbf{G}}^{EJ}; \tilde{\mathbf{J}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{G}}^{EM}; \tilde{\mathbf{M}} \rangle \quad (3.51)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \langle \tilde{\mathbf{G}}^{HJ}; \tilde{\mathbf{J}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{G}}^{HM}; \tilde{\mathbf{M}} \rangle \quad (3.52)$$

όπου

$$\langle \mathbf{f}; \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(z') \cdot \mathbf{g}(z') dz' \quad (3.53)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.48)-(3.49) στις (3.42)-(3.43) και χρησιμοποιώντας τις (3.51)-(3.52) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}^{EJ} = & -\mathbf{u}\mathbf{u}V_i^e - \mathbf{v}\mathbf{v}V_i^h + \mathbf{z}\mathbf{u}\frac{k_\rho}{j\omega\epsilon(z)}I_i^e + \mathbf{u}\mathbf{z}\frac{k_\rho}{j\omega\epsilon(z')}V_v^e \\ & + \mathbf{z}\mathbf{z}\frac{k_\rho}{j\omega\epsilon(z')}\left[\frac{k_\rho^2}{j\omega\epsilon(z)}I_v^e - \delta(z-z')\right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{HJ} = -\mathbf{u}\mathbf{v}I_i^h - \mathbf{v}\mathbf{u}I_i^e - \mathbf{z}\mathbf{v}\frac{k_\rho}{j\omega\epsilon(z)}V_i^h + \mathbf{v}\mathbf{z}\frac{k_\rho}{j\omega\epsilon(z')}I_v^e \quad (3.55)$$

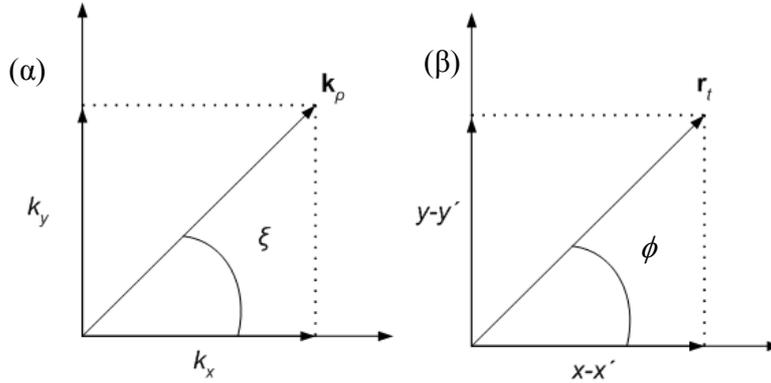
$$\tilde{\mathbf{G}}^{EM} = -\mathbf{u}\mathbf{v}V_v^e + \mathbf{v}\mathbf{u}V_v^h + \mathbf{z}\mathbf{v}\frac{k_\rho}{j\omega\epsilon(z)}I_v^e - \mathbf{v}\mathbf{z}\frac{k_\rho}{j\omega\mu_0}V_i^h \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}^{EJ} = & -\mathbf{u}\mathbf{u}I_v^h - \mathbf{v}\mathbf{v}I_v^e + \mathbf{z}\mathbf{u}\frac{k_\rho}{j\omega\mu_0}V_v^h + \mathbf{u}\mathbf{z}\frac{k_\rho}{j\omega\mu_0}I_i^h \\ & + \mathbf{z}\mathbf{z}\frac{k_\rho}{j\omega\mu_0}\left[\frac{k_\rho^2}{j\omega\mu_0}V_i^h - \delta(z-z')\right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Οι συναρτήσεις Green στο πεδίο του χώρου εξαρτώνται μόνο από τα $\mathbf{r}, \mathbf{r}', z, z'$ και υπολογίζονται βάσει του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$\overline{\mathbf{G}}^{PQ}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \overline{\mathbf{G}}^{PQ}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i; z | z') = F^{-1} \{ \tilde{\mathbf{G}}^{PQ}(\mathbf{k}_\rho; z | z') \} \quad (3.58)$$

Οι συναρτήσεις Green (3.54)-(3.57) είναι αθροίσματα όρων της μορφής



Σχήμα 3-2: Ορισμός των γωνιών ξ και ϕ

$$\begin{aligned} \sin(n\xi) \tilde{f}(k_\rho) \\ \cos(n\xi) \tilde{f}(k_\rho) \end{aligned} \quad (3.59)$$

όπου η γωνία ξ ορίζεται στο σχήμα 3-2(α)

$$\xi = \tan^{-1}(k_y / k_x) \quad (3.60)$$

Επομένως τα διδιάστατα ολοκληρώματα που παρουσιάζονται στην (3.58) μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$F^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos(n\xi) \\ \sin(n\xi) \end{array} \tilde{f}(k_\rho) \right\} = (-j)^n \begin{array}{l} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{array} S_n \{ \tilde{f}(k_\rho) \} \quad (3.61)$$

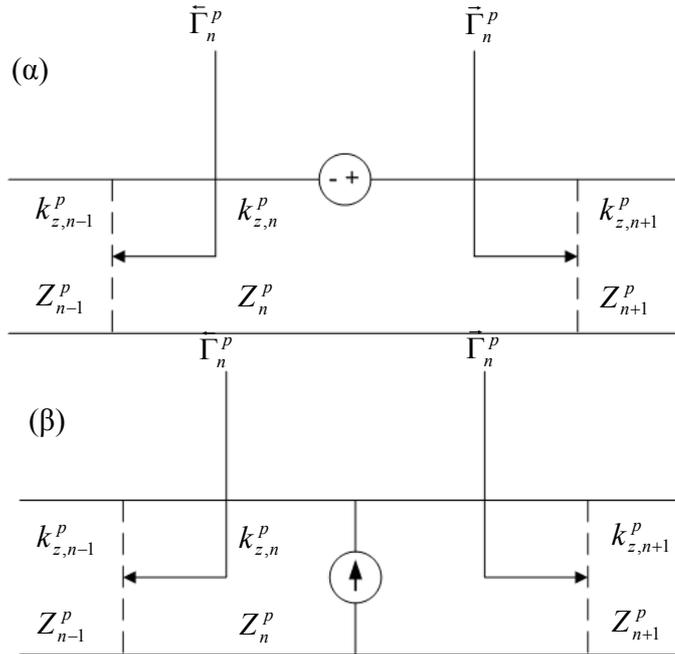
όπου

$$S_n \{ \tilde{f}(k_\rho) \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{f}(k_\rho) J_n(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (3.62)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y-y'}{x-x'} \quad (3.63)$$

Η γωνία ϕ ορίζεται στο σχήμα 3-2(β). Το ολοκλήρωμα (3.62) ονομάζεται ολοκλήρωμα Sommerfeld [Chew95, §2.2]. Επομένως η διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Green σε ένα μέσο του οποίου ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται ως προς z είναι η εξής:

1. Υπολογισμός των συναρτήσεων Green της αντίστοιχης γραμμής μεταφοράς από τις εξισώσεις (3.44)-(3.47)
2. Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier των συναρτήσεων Green του μέσου από τις (3.54)-(3.57)



Σχήμα 3-3: Ισοδύναμες γραμμές μεταφοράς για τις συναρτήσεις Green που αντιστοιχούν (α) σε πηγές τάσης και (β) πηγές ρεύματος.

3. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier των συναρτήσεων Green βάσει των (3.61)-(3.63)

3.5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Στην περίπτωση ενός μέσου του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι κατά τμήματα σταθερός (όπως στην περίπτωση ενός επίπεδου κυματοδηγού) η εύρεση των συναρτήσεων Green της ισοδύναμης γραμμής μεταφοράς πραγματοποιείται μέσω των συντελεστών ανάκλασης κάθε τμήματος. Ας υποθέσουμε πως

$$n(z)=n(z_n) \text{ για } z_n \leq z < z_{n+1}$$

Οι ισοδύναμες γραμμές μεταφοράς απεικονίζονται στο σχήμα 3-3. Οι συντελεστές $\bar{\Gamma}_n^p$ και $\bar{\Gamma}_n^p$ είναι οι συντελεστές ανάκλασης στα αριστερά και δεξιά του τμήματος n στο οποίο βρίσκεται η πηγή τάσης ή ρεύματος. Οι συντελεστές ανάκλασης του στρώματος n συνδέονται με τους συντελεστές ανάκλασης των στρωμάτων $n-1$ και $n+1$, βάση των εξής σχέσεων [MT97]:

$$\bar{\Gamma}_{n+1}^p = \frac{\Gamma_{n,n+1}^p + \bar{\Gamma}_n^p t_n^p}{1 + \Gamma_{n,n+1}^p \bar{\Gamma}_n^p t_n^p} \quad (3.64)$$

$$\bar{\Gamma}_{n-1}^p = \frac{\Gamma_{n,n-1}^p + \bar{\Gamma}_n^p t_n^p}{1 + \Gamma_{n,n-1}^p \bar{\Gamma}_n^p t_n^p} \quad (3.65)$$

όπου

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{Z_i^p - Z_j^p}{Z_i^p + Z_j^p} \quad (3.66)$$

$$t_n^p = \exp(-jk_{zn}^p d_n) \quad (3.67)$$

και $d_n = z_{n+1} - z_n$. Οι συντελεστές ανάκλασης μπορούν να υπολογιστούν εφαρμόζοντας τις (3.64) και (3.65) αναδρομικά δεδομένου ότι οι συντελεστές ανάκλασης στα ακριανά στρώματα είναι μηδέν ($\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_N = 0$) Για $z_n \leq z < z_{n+1}$ και $z_n \leq z' < z_{n+1}$, δηλαδή στην περίπτωση που η πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκεται στο ίδιο στρώμα η συνάρτηση V_i^p δίνεται από τη σχέση:

$$V_i^p(z | z') = \frac{Z_n^p}{2} \left[e^{-jk_{zn}^p |z-z'|} + \frac{1}{D_n^p} \sum_{s=1}^4 R_{ns}^p e^{-jk_{zn}^p \gamma_{ns}} \right] \quad (3.68)$$

όπου

$$D_n^p = 1 - \bar{\Gamma}_n^p \bar{\Gamma}_n^p t_n^p \quad (3.69)$$

$$R_{n1}^p = \bar{\Gamma}_n^p \quad (3.70)$$

$$R_{n1}^p = \bar{\Gamma}_n^p \quad (3.71)$$

$$R_{n3}^p = R_{n4}^p = \bar{\Gamma}_n^p \bar{\Gamma}_n^p \quad (3.72)$$

$$\gamma_{n1} = 2z_{n+1} - (z + z') \quad (3.73)$$

$$\gamma_{n2} = (z + z') - 2z_n \quad (3.74)$$

$$\gamma_{n3} = 2d_n + (z - z') \quad (3.75)$$

$$\gamma_{n4} = 2d_n - (z - z') \quad (3.76)$$

Η εξίσωση που παρέχει το V_v^p είναι η εξής:

$$V_v^p(z | z') = \frac{1}{2} \left[\pm e^{-jk_{zn}^p |z-z'|} - \frac{1}{D_n^p} \sum_{s=1}^4 (-1)^s R_{ns}^p e^{-jk_{zn}^p \gamma_{ns}} \right] \quad (3.77)$$

Το \pm στην (3.77) σημαίνει πως όταν $z > z'$ το πρόσημο της παράστασης είναι το + ενώ στην αντίθετη περίπτωση το -. Οι εξισώσεις που δίνουν τις συναρτήσεις Green I_i^p και I_v^p προκύπτουν από τις εξισώσεις (3.68) - (3.77) εναλλάσσοντας τα Z με Y , τα V_v^p με τα I_v^p και τα V_i^p με τα I_i^p .

Στην περίπτωση όπου το σημείο παρατήρησης βρίσκεται στο στρώμα $m < n$ εκτός του στρώματος της πηγής n , ο υπολογισμός των συναρτήσεων Green της γραμμής μεταφοράς γίνεται βάσει της συνέχειας της τάσης και του ρεύματος στα όρια των στρωμάτων εξαιτίας της οποίας ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\left\{ \begin{array}{l} V^p(z) \\ I^p(z) \end{array} \right\} = V^p(z_n) \frac{\prod_{k=m+1}^{n-1} T_k^p}{1 + \bar{\Gamma}_m^p t_m^p} \left\{ \begin{array}{l} \bar{t}_m^p(z) \\ \bar{y}_m^p(z) \end{array} \right\} \exp(-jk_{zm}^p (z_{m+1} - z)) \quad (3.78)$$

όπου

$$\bar{\Gamma}_k^p = \frac{V^p(z_k)}{V^p(z_{k+1})} = \frac{(1 + \bar{\Gamma}_k^p)\theta_k^p}{1 + \bar{\Gamma}_k^p t_k^p} \quad (3.79)$$

με $\theta_k^p = \exp(-jk_{zk}^p d_k)$ και

$$\bar{t}_m^p(z) = 1 + \bar{\Gamma}_m^p e^{-j2k_{zm}^p(z-z_m)} \quad (3.80)$$

$$\bar{y}_m^p(z) = -Y_m^p (1 - \bar{\Gamma}_m^p e^{-j2k_{zm}^p(z-z_m)}) \quad (3.81)$$

Για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Green για $m > n$ χρησιμοποιούμε τις συμμετρίες των συναρτήσεων Green τάσης και ρεύματος:

$$V_i^p(z|z') = V_i^p(z'|z) \quad (3.82)$$

$$I_v^p(z|z') = I_v^p(z'|z) \quad (3.83)$$

$$V_v^p(z|z') = -I_i^p(z'|z) \quad (3.84)$$

$$I_i^p(z|z') = -V_v^p(z'|z) \quad (3.85)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.82)-(3.85) και τις (3.54)-(3.57) μπορούμε να αποδείξουμε πως οι συναρτήσεις Green του μέσου είναι συμμετρικές.

3.6 ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΕΔΙΟΥ

Η εξισώσεις των παραγράφων 3.3 έως 3.5 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μέσα σε ένα ανομοιογενές ως προς τον άξονα z μέσο, του οποίου οι πηγές ηλεκτρικού και μαγνητικού ρεύματος έχουν αυθαίρετο προσανατολισμό. Στην περίπτωση του συζεχτή αστέρα του AWG που εξετάζουμε οι πηγές ρεύματος προκύπτουν από τους τρόπους των κυματοδηγών εισόδου του AWG οι οποίοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Στους τρόπους E_z^{pq} των οποίων το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο παράλληλα με τον άξονα z της διαστρωμάτωσης και στους τρόπους H_z^{pq} των οποίων το μαγνητικό πεδίο είναι πολωμένο παράλληλα με τον ίδιο άξονα (δείτε σχήμα 3-4) [Mar93, §1.7].

Τα ισοδύναμα ρεύματα για τους τρόπους E_z^{pq} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\mathbf{J}_E = \mathbf{x} \times \mathbf{H} = zH_y \quad (3.86)$$

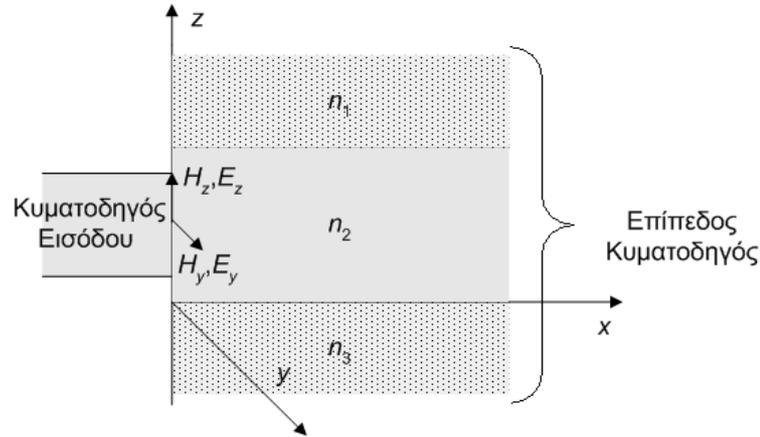
$$\mathbf{M}_E = \mathbf{x} \times \mathbf{E} = -yE_z \quad (3.87)$$

ενώ τα ισοδύναμα ρεύματα για τους τρόπους H_z^{pq} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\mathbf{J}_H = \mathbf{x} \times \mathbf{H} = -yH_z \quad (3.88)$$

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{x} \times \mathbf{E} = zE_y \quad (3.89)$$

Στην περίπτωση του AWG οι κυματοδηγοί εισόδου είναι συνήθως τετραγωνικής διατομής ή



Σχήμα 3-4: Προσπίπτον Ηλεκτρομαγνητικό κύμα από τους κυματοδηγούς εισόδου στον επίπεδο κυματοδηγό που αποτελεί το συζεύκτη αστέρα του AWG

$$\mathbf{J}_E = \mathbf{x} \times \mathbf{H} = zH_y \quad (3.86)$$

$$\mathbf{M}_E = \mathbf{x} \times \mathbf{E} = -yE_z \quad (3.87)$$

ενώ τα ισοδύναμα ρεύματα για τους τρόπους H_z^{pq} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\mathbf{J}_H = \mathbf{x} \times \mathbf{H} = -yH_z \quad (3.88)$$

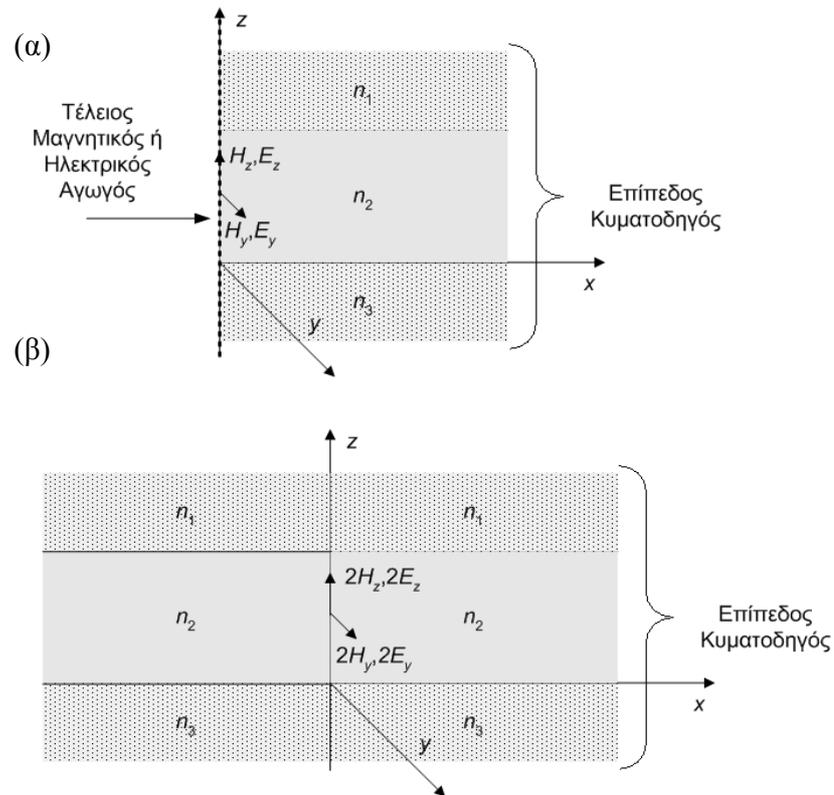
$$\mathbf{M}_H = \mathbf{x} \times \mathbf{E} = zE_y \quad (3.89)$$

Στην περίπτωση του AWG οι κυματοδηγοί εισόδου είναι συνήθως τετραγωνικής διατομής ή ραχιαίοι (ridge waveguides) και διαθέτουμε προσεγγιστικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου των βασικών τους τρόπων. Επομένως τα ισοδύναμα ρεύματα (3.86)-(3.89) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή και εάν οι συναρτήσεις Green του μέσου είναι γνωστές, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα.

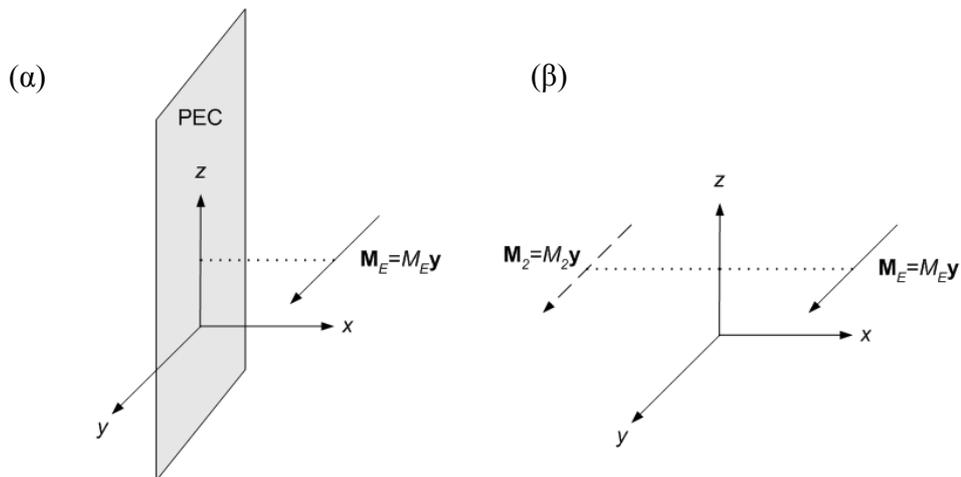
3.7 ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Στην παραγράφους 3.4 και 3.5 ασχοληθήκαμε με τον προσδιορισμό των συναρτήσεων Green ενός ανομοιογενούς άπειρου μέσου. Οι συναρτήσεις Green του μέσου αυτού δεν μπορούν άμεσα να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση του σχήματος 3-4 καθώς, το μέσο τερματίζει στο $x=0$ και επομένως δεν είναι δυνατό να θεωρηθεί άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις. Στο επίπεδο $x=0$ θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι οριακές συνθήκες που επιβάλλει η διαχωριστική επιφάνεια στις συναρτήσεις Green.

Το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά με τη βοήθεια των ισοδύναμων προβλημάτων διέγερσης του σχήματος 3-5. Πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα του σχήματος 3-4 μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα διέγερσης στο εσωτερικό ενός άπειρου προς όλες τις κατευθύνσεις μέσου σε δύο στάδια: Στο πρώτο στάδιο, επιβάλλοντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στη συνάρτηση Green πάνω στην επιφάνεια $x=0$, το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο πρόβλημα του σχήματος 3-5(α). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη θεωρία εικόνων το πρόβλημα



Σχήμα 3-5: Ισοδύναμα προβλήματα διέγερσης (α) αντικατάσταση διαχωριστικής επιφάνειας με τέλειο αγωγό, (β) χρήση θεωρίας εικόνων για μετασχηματισμό προβλήματος ώστε το μέσο να είναι άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις



Σχήμα 3-6: Θεωρία των εικόνων στην περίπτωση ενός μαγνητικού ρεύματος πάνω από ένα ΤΗΑ

μετασχηματίζεται έτσι ώστε το μέσο διάδοσης να είναι άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις (σχήμα 3-5 (β)).

Για να αιτιολογήσουμε το μετασχηματισμό του προβλήματος χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της μοναδικότητας της λύσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σύμφωνα με την οποία:

«Η τιμή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου μέσα σε έναν όγκο V ο οποίος δεν περιέχει πηγές (δηλαδή ηλεκτρικά και μαγνητικά ρεύματα) καθορίζεται **πλήρως** από τις εφαπτομενικές συνιστώσες είτε του ηλεκτρικού είτε του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια S που περιβάλλει τον όγκο V » [Col60, §1.7]

Σύμφωνα με την ιδιότητα της μοναδικότητας, στον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο πρόβλημα του σχήματος 3-4 μπορούμε να αγνοήσουμε την ύπαρξη του μαγνητικού ή του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο $x=0$. Επομένως μπορούμε και να θέσουμε

$$\mathbf{M}_H = 0 \quad (3.90)$$

$$\mathbf{J}_E = 0 \quad (3.91)$$

Η μετάβαση από το πρόβλημα του σχήματος 3-4 στο ισοδύναμο πρόβλημα του σχήματος 3-5(α) γίνεται θέτοντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στις συναρτήσεις Green των εξισώσεων (3.16)-(3.17) που προκύπτουν από τη συνάρτηση Green της σχέσης (3.11). Πράγματι κατά την εξαγωγή της σχέσης (3.11) υποθέσαμε πως η συνάρτηση Green πληροί τη συνθήκη ακτινοβολίας πάνω στην επιφάνεια S_∞ , αλλά δεν προσδιορίσαμε οριακές συνθήκες πάνω στην επιφάνεια S_1 . Αν θέσουμε

$$\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = 0 \text{ για } \mathbf{r} \in S_1 \quad (3.92)$$

τότε, εφόσον η δυαδική συνάρτηση $\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο παράγεται από μία σημειακή πηγή, έπεται πως το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο θα μηδενίζεται στην S_1 , οπότε η S_1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένας Τέλειος Ηλεκτρικός Αγωγός (ΤΗΑ). Στην περίπτωση των E_z^{pq} προσπιπτόντων κυμάτων θα θεωρήσουμε πως η S_1 είναι ένα ΤΗΑ στην επιφάνεια του οποίου υπάρχει ένα μαγνητικό ρεύμα \mathbf{M}_E .

Επιλέγοντας διαφορετικές οριακές συνθήκες για τη συνάρτηση Green μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ΤΗΑ με έναν Τέλειο Μαγνητικό Αγωγό (ΤΜΑ) Αντίστοιχα στην περίπτωση των H_z^{pq} προσπιπτόντων κυμάτων θα θεωρήσουμε πως η S_1 είναι ένας τέλειος μαγνητικός αγωγός στην επιφάνεια του οποίου υπάρχει ένα μαγνητικό ρεύμα \mathbf{J}_H .

Η παρουσία ενός ΤΗΑ ή ενός ΤΜΑ επιτρέπει τον προσδιορισμό της συνάρτησης Green με τη χρήση της θεωρίας εικόνων [Bal82, §11.3]. Ας υποθέσουμε αρχικά πως θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε μία πηγή μαγνητικού ρεύματος η οποία απέχει μία πεπερασμένη απόσταση από ένα επίπεδο ΤΗΑ (σχήμα 3-6). Αν υποθέσουμε πως η πηγή μαγνητικού ρεύματος είναι σημειακή και προσανατολισμένη ως προς τον άξονα των y , τότε

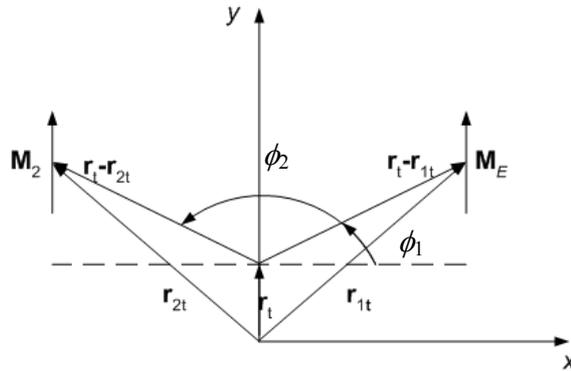
$$\mathbf{M}_E = \mathbf{y} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (3.93)$$

με $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Η εικόνα του \mathbf{M}_E ως προς το επίπεδο $x=0$ ισούται με

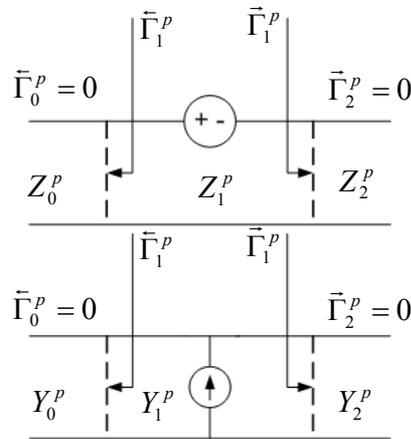
$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{y} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \quad (3.94)$$

με $\mathbf{r}_2 = (-x_1, y_1, z_1)$. Θα δείξουμε πως για $x > 0$, το πρόβλημα του σχήματος 3-6(α) όπου το μαγνητικό ρεύμα \mathbf{M}_E ακτινοβολεί παρουσία του ΤΗΑ είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα 3-6(β) όπου το μαγνητικό ρεύμα που ακτινοβολεί ισούται με $\mathbf{M}_E + \mathbf{M}_2$ χωρίς την παρουσία του ΤΗΑ. Πράγματι και στις δύο περιπτώσεις πληρείται η συνθήκη ακτινοβολίας στην επιφάνεια S_∞ (δηλαδή όταν $x \rightarrow +\infty$). Αρκεί επομένως να αποδειχθεί πως για $x=0$ το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο στο σχήμα 3-6(β) ισούται με μηδέν,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times (\overline{\mathbf{G}}^{EM}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{y} + \overline{\mathbf{G}}^{EM}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{y}) = 0 \text{ για } \mathbf{r} = (0, y, z) \quad (3.95)$$



Σχήμα 3-7: Προσδιορισμός των γωνιών ϕ_1 και ϕ_2 .



Σχήμα 3-8: Ισοδύναμες γραμμές μεταφοράς για ένα επίπεδο κυματοδηγό

Αν ισχύει η (3.95) τότε το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην επιφάνεια $S_1(x=0)$ θα ισούται με μηδέν και για τα δύο προβλήματα του σχήματος 3-6, οπότε τα δύο προβλήματα αυτά θα είναι ισοδύναμα. Για να αποδειχθεί η (3.95) αρκεί να δείξουμε ότι

$$G_{yy}^{EM}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) + G_{yy}^{EM}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_2) = 0 \quad (3.96)$$

$$G_{zy}^{EM}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) + G_{zy}^{EM}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_2) = 0 \quad (3.97)$$

Στην περίπτωση όπου το μέσο διάδοσης έχει ανομοιογένεια μόνο ως προς z τότε η συνάρτηση Green στο φασματικό πεδίο δίνεται από την (3.56) από την οποία συνάγουμε

$$\tilde{G}_{yy}^{EM} = -\frac{k_x k_y}{k_\rho^2} (V_v^e - V_v^h) = -\frac{\sin 2\xi}{2} (V_v^e - V_v^h) \quad (3.98)$$

$$\tilde{G}_{zy}^{EM} = \frac{k_x}{\omega \varepsilon(z)} I_v^e = \cos \xi \frac{k_\rho}{\omega \varepsilon(z)} I_v^e \quad (3.99)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.98)-(3.99) και τις (3.61)-(3.62) αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Fourier και υπολογίζουμε τις συναρτήσεις Green στο πεδίο του χώρου:

$$G_{yy}^{EM} = \frac{\sin 2\phi}{2} S_2(V_v^e - V_v^h) \quad (3.100)$$

$$G_{zy}^{EM} = \frac{\cos \phi}{\omega \mathcal{E}(z)} S_1(k_\rho I_v^e) \quad (3.101)$$

Η γωνία ϕ σχηματίζεται μεταξύ του άξονα x και της προβολής του διανύσματος $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ στο επίπεδο $z=0$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 3-2. Η γωνίες ϕ_1 και ϕ_2 που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}-\mathbf{r}_2$ με τον άξονα των x στο επίπεδο xy φαίνονται στο σχήμα 3-7. Είναι φανερό ότι $\phi_2=\pi-\phi_1$. Επομένως

$$G_{yy}^{EM}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) = \frac{\sin 2\phi_1}{2} S_2(V_v^e - V_v^h) = -\frac{\sin 2\phi_2}{2} S_2(V_v^e - V_v^h) = -G_{yy}^{EM}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2) \quad (3.102)$$

$$G_{zy}^{EM}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) = \frac{\cos \phi_1}{\omega \mathcal{E}(z)} S_1(k_\rho I_v^e) = -\frac{\cos \phi_2}{\omega \mathcal{E}(z)} S_1(k_\rho I_v^e) = G_{zy}^{EM}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2) \quad (3.103)$$

Με τον τρόπο αυτό αποδείξαμε τις (3.96) και (3.97) οπότε και την (3.95). Η σημειακή πηγή μαγνητικού ρεύματος βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $x=0$ και επομένως το συνολικό ισοδύναμο ρεύμα θα ισούται με $2\mathbf{M}_E$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργείται σε ένα μέσο με ανομοιογένεια ως προς z από μία σημειακή πηγή ηλεκτρικού ρεύματος, παρουσία ενός άπειρου επιπέδου TMA ισοδυναμεί με το πεδίο που δημιουργείται απουσία του TMA, από την ίδια ηλεκτρική πηγή και την εικόνα της.

3.8 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥ

Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα, ο συζεύκτης αστέρα του AWG αποτελείται από έναν επίπεδο κυματοδηγό. Επομένως, η ισοδύναμη γραμμή μεταφοράς θα αποτελείται από τρία τμήματα όπως φαίνεται και στο σχήμα 3-8. Στο τμήμα 0 και στο τμήμα 2 δεν υπάρχουν ανακλώμενα κύματα που περιγράφονται με ισοδύναμα σήματα τάσης και ρεύματος οπότε

$$\bar{\Gamma}_0^p = \bar{\Gamma}_2^p = 0 \quad (3.104)$$

Στην περίπτωση των TM κυμάτων όπου $p=e$ οι χαρακτηριστικές εμπεδήσεις των στρωμάτων δίδονται από την (3.36) ενώ στην περίπτωση των TE κυμάτων οι εμπεδήσεις δίνονται από την (3.37). Χρησιμοποιώντας τις (3.64)-(3.65) μαζί με την (3.104) υπολογίζουμε τους συντελεστές ανάκλασης δεξιά και αριστερά της πηγής

$$\bar{\Gamma}_1^e = \Gamma_{01}^e = \frac{Z_0^e - Z_1^e}{Z_0^e + Z_1^e} \quad (3.105)$$

$$\bar{\Gamma}_1^e = \Gamma_{21}^e = \frac{Z_2^e - Z_1^e}{Z_2^e + Z_1^e} \quad (3.106)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.68) είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green V_i^e . Ο παρανομαστής D_n^e για $n=1$, του κλάσματος της (3.68) δίνεται από τη σχέση

$$D_1^e = 1 - \bar{\Gamma}_1^e \bar{\Gamma}_1^e t_1^e = 1 - \frac{Z_0^e - Z_1^e}{Z_0^e + Z_1^e} \frac{Z_2^e - Z_1^e}{Z_2^e + Z_1^e} \exp(j2k_{z1}^e d_1) \quad (3.107)$$

Αντικαθιστώντας τις εμπεδήσεις των στρωμάτων από τις (3.64)-(3.65), η (3.107) γράφεται ως εξής:

$$D_1^e = \frac{\left(\frac{k_{z2}^e k_{z0}^e}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} + \frac{(k_{z1}^e)^2}{\varepsilon_1^2} \right) (1 - e^{j\varphi}) + \left(\frac{k_{z1}^e k_{z0}^e}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} + \frac{k_{z2}^e k_{z1}^e}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} \right) (1 + e^{j\varphi})}{\left(\frac{k_{z2}^e}{\varepsilon_2} + \frac{k_{z1}^e}{\varepsilon_1} \right) \left(\frac{k_{z0}^e}{\varepsilon_0} + \frac{k_{z1}^e}{\varepsilon_1} \right)} \quad (3.108)$$

όπου

$$\varphi = -2k_{z1}^e d_1 \quad (3.109)$$

Στις επόμενες παραγράφους, όπου θα υπολογίσουμε ασυμπτωτικά τα ολοκληρώματα Sommerfeld που εμφανίζονται στις εκφράσεις των συναρτήσεων Green του επίπεδου κυματοδηγού στο φασματικό πεδίο, θα μας απασχολήσουν οι πόλοι της (3.108). Το D_1^e μηδενίζεται όταν

$$-j \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{e^{j\varphi} - 1}{e^{j\varphi} + 1} = \frac{\frac{k_{z1}^e k_{z0}^e}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} + \frac{k_{z2}^e k_{z1}^e}{\varepsilon_2 \varepsilon_1}}{\frac{k_{z2}^e k_{z0}^e}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} + \frac{(k_{z1}^e)^2}{\varepsilon_1^2}} \quad (3.110)$$

Αντικαθιστώντας

$$\kappa = k_{z0}^e, j\rho = k_{z1}^e, jq = k_{z2}^e \quad (3.111)$$

η (3.110) γράφεται ως εξής

$$\tan(\kappa d_1) = \frac{\rho \kappa \varepsilon_2 + q \kappa \varepsilon_0 \varepsilon_1}{-\varepsilon_1^2 \rho q + \kappa^2 \varepsilon_2 \varepsilon_0} \quad (3.112)$$

Η εξίσωση (3.112) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση που επαληθεύουν οι σταθερές εγκάρσιου περιορισμού κ των TM τρόπων του επίπεδου κυματοδηγού. Αν β η σταθερά διάδοσης ενός τρόπου TM του επίπεδου κυματοδηγού, τότε το $\kappa = (k_1 - \beta^2)^{1/2}$ μηδενίζει τον παρανομαστή της συνάρτησης Green V_i^e . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι σταθερές εγκάρσιου περιορισμού κ ενός TE τρόπου του επίπεδου κυματοδηγού μηδενίζουν τον παρανομαστή D_1^h .

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.6, στην περίπτωση των τρόπων E_z^{pq} θεωρούμε ένα μαγνητικό ρεύμα \mathbf{M}_E παράλληλο με τον y άξονα. Οι συναρτήσεις Green για το ηλεκτρικό πεδίο δίνονται από τις

$$G_{yy}^{EM} = \frac{\sin 2\phi}{2} S_2 (V_v^e - V_v^h) \quad (3.113)$$

$$G_{zy}^{EM} = \frac{\cos \phi}{\omega \varepsilon(z)} S_1 (k_\rho I_v^e) \quad (3.114)$$

Οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων Green για το μαγνητικό πεδίο, δίνονται από τις

$$\tilde{G}_{yy}^{HM} = -\frac{k_y^2}{k_\rho^2} I_v^h - \frac{k_x^2}{k_\rho^2} I_v^e = -\frac{1}{2} (I_v^h + I_v^e) + \frac{\cos 2\xi}{2} (I_v^h - I_v^e) \quad (3.115)$$

$$\tilde{G}_{zy}^{HM} = \frac{k_y}{\omega\mu_0} V_v^h = \frac{k_\rho \sin \xi}{\omega\mu_0} V_v^h \quad (3.116)$$

ενώ στο πεδίο του χώρου, εκφράζονται μέσω των ολοκληρωμάτων Sommerfeld

$$G_{yy}^{HM} = -\frac{1}{2} S_0(I_v^h + I_v^e) - \frac{\cos 2\phi}{2} S_2(I_v^h - I_v^e) \quad (3.117)$$

$$G_{zy}^{HM} = -\frac{j \sin \phi}{\omega\mu_0} S_1(V_v^h) \quad (3.118)$$

Με παρόμοιο τρόπο συνάγουμε και τις συναρτήσεις Green για την περίπτωση του ηλεκτρικού ρεύματος

$$G_{yy}^{HJ} = \frac{\sin 2\phi}{2} S_2(I_i^e - I_i^h) \quad (3.119)$$

$$G_{zy}^{HJ} = \frac{\cos \phi}{\omega\mu_0} S_1(k_\rho I_i^e) \quad (3.120)$$

$$G_{yy}^{EJ} = -\frac{1}{2} S_0(V_i^h + V_i^e) - \frac{\cos 2\phi}{2} S_2(V_i^h - V_i^e) \quad (3.121)$$

$$G_{zy}^{EJ} = -\frac{j \sin \phi}{\omega\epsilon(z)} S_1(I_i^h) \quad (3.122)$$

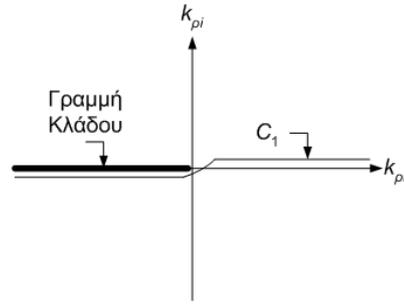
Στην περίπτωση που η πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκεται μέσα στο κεντρικό στρώμα του επίπεδου κυματοδηγού ($n=1$), οι συναρτήσεις Green της ισοδύναμης γραμμής μεταφοράς που δίνονται από τις (3.113)-(3.122) αποτελούνται από όρους της μορφής

$$G(k_\rho) = F(k_\rho) \exp(-jk_{z1}\bar{z}) = F(k_\rho) \exp(-j\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}\bar{z}) \quad (3.123)$$

όπου το \bar{z} ισούται είτε με $|z-z'|$ είτε με ένα από τα γ_{1m} που δίνονται στις (3.73)-(3.76). Τα ολοκληρώματα Sommerfeld στις (3.113)-(3.122) θα έχουν τη μορφή

$$S_n(G(k_\rho)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k_\rho F(k_\rho) \exp(-jk_z^p \bar{z}) J_n(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (3.124)$$

Το ολοκλήρωμα της μορφής (3.124) υπολογίζεται αριθμητικά με τη βοήθεια μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης. Ωστόσο, στην περίπτωση που εξετάζουμε, επιθυμούμε να υπολογίσουμε τα πεδία στην έξοδο του συζεύκτη αστέρα που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από την είσοδο, δηλαδή το ρ λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του ολοκληρώματος Sommerfeld, προσεγγίζεται με μεγάλη ακρίβεια με τη χρήση της μεθόδου Saddle Point, όπως θα δούμε και στις επόμενες παραγράφους.



Σχήμα 3-9: Μονοπάτι ολοκλήρωσης για το ολοκλήρωμα (3.125)

3.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ SOMMERFELD

3.9.1 ΑΛΛΑΓΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Για τη διευκόλυνση του ασυμπτωτικού υπολογισμού του ολοκληρώματος (3.124), μετατρέπουμε το πεδίο ολοκλήρωσης από $(0, +\infty)$ σε $(-\infty, +\infty)$. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε την εξής ιδιότητα των συναρτήσεων Bessel

$$J_0(z) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z) \right) \quad (3.125)$$

όπου $H_0^{(1)}(z)$ και $H_0^{(2)}(z)$ οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την (3.125) στην (3.124) έχουμε, όταν $n=0$,

$$\begin{aligned} S_0(G(k_\rho)) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} k_\rho F(k_\rho) \exp(-jk_z^p \bar{z}) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} k_\rho F(k_\rho) \exp(-jk_z^p \bar{z}) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) dk_\rho \end{aligned} \quad (3.126)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ανάκλασης των συναρτήσεων Hankel

$$H_0^{(1)}(ze^{j\pi}) = H_0^{(2)}(z) \quad (3.127)$$

και πραγματοποιώντας αλλαγή μεταβλητής στο δεύτερο ολοκλήρωμα από k_ρ σε $k_\rho e^{j\pi}$ βρίσκουμε

$$S_0(G(k_\rho)) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_\rho F(k_\rho) \exp(-jk_z^p \bar{z}) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (3.128)$$

αρκεί η $G(k_\rho)$ να είναι συμμετρική γύρω από το $k_\rho=0$. Το μονοπάτι ολοκλήρωσης C_1 του (3.128) επιλέγεται όπως στο σχήμα 3-9, ώστε να μην τέμνει τη γραμμή κλάδου της $H_0^{(2)}(z)$.

3.9.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SADDLE POINT

Η συνάρτηση Hankel έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$H_q^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(\pm j\left(z - \frac{q\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad (3.129)$$

Επομένως για μεγάλες τιμές του $k_\rho \rho$, η φάση του ορίσματος του ολοκληρώματος ολισθαίνει αρκετά γρήγορα. Για τον ασυμπτωτικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I = \int_C f(z) \exp(\Omega q(z)) dz \quad (3.130)$$

όταν $\Omega \rightarrow \infty$, όπου $f(z)$ και $q(z)$ αναλυτικές συναρτήσεις, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Saddle Point. Αν υπάρχει ένα σημείο $z=z_s$ για το οποίο

$$q'(z_s) = 0 \quad (3.131)$$

τότε μεταφερόμαστε από το μονοπάτι ολοκλήρωσης C σε ένα μονοπάτι ολοκλήρωσης P το οποίο περνάει από το σημείο z_s και έχει την ιδιότητα

$$\frac{d}{dz} \text{Im}\{q(z)\} = 0 \quad (3.132)$$

δηλαδή το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $q(z)$ παραμένει σταθερό πάνω στο P . Επειδή πάνω στο P η φάση του $e^{\Omega q(z)}$ παραμένει σταθερή, το P ονομάζεται μονοπάτι σταθερής φάσης. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$q(z) = \tau(s) = q(z_s) - s^2 \quad (3.133)$$

και την (3.132), διαπιστώνουμε εύκολα πως στο μιγαδικό επίπεδο s , το P μετασχηματίζεται στον πραγματικό άξονα, οπότε θα έχουμε

$$I_s = \int_P f(z) \exp(\Omega q(z)) dz = e^{\Omega q(z_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-\Omega s^2} ds \quad (3.134)$$

όπου

$$g(s) = f(z) \frac{dz}{ds} \quad (3.135)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2s}{q'(z)} \quad (3.136)$$

Το όρισμα του ολοκληρώματος (3.134) αποτελείται από το γινόμενο μίας συνάρτησης $g(s)$ με ένα εκθετικό το οποίο φθίνει γρήγορα όσο απομακρυνόμαστε από το $s=0$ όταν $\Omega \rightarrow \infty$. Αν υποθέσουμε πως η συνάρτηση $g(s)$ μεταβάλλεται αργά γύρω από το $s=0$, τότε αρκούν λίγοι όροι από το ανάπτυγμα της $g(s)$ σε σειρά κατά Taylor

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + \frac{g''(0)}{2}s^2 + \dots \quad (3.137)$$

για να περιγράψουν τη συνάρτηση στην περιοχή $s \approx 0$. Σε μία πρώτη προσέγγιση υποθέτουμε πως $g(s) \approx g(0)$, οπότε το ολοκλήρωμα (3.134) προσεγγίζεται ως εξής:

$$I_s = g(0) e^{\Omega q(z_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds \quad (3.138)$$

Για να υπολογίσουμε το $g(0)$ θα πρέπει να γνωρίζουμε την παράγωγο dz/ds που δίνεται από την (3.136) για $s=0$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του De L'Hôpital στην απροσδιόριστη μορφή που προκύπτει από την (3.136) για $s=0$ και υποθέτοντας πως $q''(z_s) \neq 0$, λαμβάνουμε

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=0} = \sqrt{\frac{-2}{q''(z_s)}} \quad (3.139)$$

και το ολοκλήρωμα I_s τελικά προσεγγίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} I_s &\cong \sqrt{\frac{-2}{q''(z_s)}} f(z_s) e^{\Omega q(z_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds \\ &= \sqrt{\frac{-2\pi}{\Omega q''(z_s)}} f(z_s) e^{\Omega q(z_s)} \end{aligned} \quad (3.140)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \quad (3.141)$$

Η (3.140) παρέχει την ασυμπτωτική μορφή του ολοκληρώματος I_s μηδενικής τάξης. Ανάλογα, διατηρώντας περισσότερους από έναν όρους στο ανάπτυγμα (3.137) υπολογίζονται και ασυμπτωτικές μορφές μεγαλύτερης τάξεως που προσεγγίζουν καλύτερα το ολοκλήρωμα I_s . Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί πως συχνά η μηδενική τάξη δίνει ικανοποιητική ακρίβεια για την τιμή του I_s .

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με το ολοκλήρωμα I_s στο οποίο η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος του μιγαδικού μονοπατιού P και όχι με το ολοκλήρωμα I κατά μήκος του αρχικού μονοπατιού C . Αν οι συναρτήσεις $q(z)$ και $f(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις τότε το μονοπάτι C συνήθως μπορεί να μετατραπεί σε ένα μονοπάτι C' το οποίο να περιέχει το P οπότε $I \equiv I_s$. Αν ωστόσο η $f(z)$ παρουσιάζει ανώμαλα σημεία (πόλους ή σημεία διακλάδωσης) που συναντώνται κατά την μετατροπή του C στο C' τότε τα σημεία πρέπει να ληφθούν υπόψη ως εξής:

$$I = I_s + I_{br} + I_p \quad (3.142)$$

όπου I_{br} η συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης και I_p η συνεισφορά των πόλων της $f(z)$. Όπως θα δούμε παρακάτω, στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων Sommerfeld που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό των συναρτήσεων Green, η κυριότερη συνεισφορά προέρχεται από τους πόλους της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.

3.9.3 ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΕΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση της (3.128) περιέχει τη συνάρτηση πολλαπλών τιμών

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} \quad (3.143)$$

(έχουμε παραλείψει τον δείκτη $p=e,h$ καθώς και το δείκτη του στρώματος n για λόγους απλούστευσης). Το στρώμα μέσα στο οποίο βρισκόμαστε ενδεχομένως να εισάγει κάποιες απώλειες ισχύος που περιγράφονται αποδίδοντας στο k και ένα φανταστικό μέρος

$$k = k_r + jk_i \quad (3.144)$$

Αν το στρώμα κάλυπτε ολόκληρο το χώρο, τότε θα είχαμε την περίπτωση της διάδοσης του κύματος στον ελεύθερο χώρο οπότε οι συναρτήσεις Green θα παρουσίαζαν εξάρτηση ως προς \mathbf{r} της μορφής $\exp(-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$. Επειδή το πεδίο δεν είναι δυνατόν να λαμβάνει άπειρη τιμή όταν η απόσταση από την πηγή τείνει στο άπειρο θα πρέπει $k_i < 0$. Επίσης επειδή έχουμε υποθέσει μία χρονική εξάρτηση $\exp(j\omega t)$ θα πρέπει $k_r > 0$, επειδή στον ελεύθερο χώρο τα κύματα διαδίδονται με τέτοια φορά ώστε να απομακρύνονται από την πηγή (δεν υπάρχουν ανακλώμενα κύματα).

Ομοίως, επειδή τα κύματα στον ελεύθερο χώρο γράφονται ως υπέρθεση των κυμάτων με εξάρτηση $\exp(-jk_z|z-z'|)$, θα πρέπει επίσης $k_{zi} < 0$ και $k_{zr} > 0$ όπου k_{zi} και k_{zr} το φανταστικό και πραγματικό μέρος του k_z

$$k_z = k_{zr} + jk_{zi} \quad (3.145)$$

Η συνάρτηση $f(z)=z^{1/2}$ παρουσιάζει ένα σημείο διακλάδωσης στο σημείο $z=0$, οπότε η (3.143) θα παρουσιάζει σημεία διακλάδωσης στα σημεία $k_p=\pm k$. Αν φ_z το όρισμα του z τότε

$$f(z) = z^{1/2} = \sqrt{|z|}(\cos(\varphi_z/2) + j \sin(\varphi_z/2)) \quad (3.146)$$

Οι δύο κλάδοι της $f(z)$ μπορούν να οριστούν ως οι περιοχές $-2\pi \leq \varphi_z \leq 0$, που αποτελεί την άνω επιφάνεια Riemann και $0 \leq \varphi_z \leq 2\pi$, που αποτελεί την κάτω επιφάνεια Riemann. Παρατηρούμε πως $\text{Im}\{f(z)\} > 0$ στην κάτω επιφάνεια Riemann, ενώ $\text{Im}\{f(z)\} < 0$ στην άνω επιφάνεια Riemann. Η γραμμή $\varphi_z=0$ αποτελεί την ευθεία κλάδου της $f(z)$, και όποτε ένα μιγαδικό μονοπάτι διασχίζει την ευθεία αυτή, μεταφερόμαστε από τον ένα κλάδο της $f(z)$ στον άλλο για να παραμένει η $f(z)$ αναλυτική.

Με τον ίδιο τρόπο, επιλέγουμε τις επιφάνειες Riemann της (3.143) έτσι ώστε $\text{Im}\{k_z\} < 0$ στην άνω επιφάνεια Riemann. Αντικαθιστώντας τις (3.144)-(3.145) στις (3.143) βρίσκουμε

$$\text{Re}\{k_z^2\} = k_r^2 - k_i^2 - k_{pr}^2 + k_{pi}^2 \quad (3.147)$$

$$\text{Im}\{k_z^2\} = k_r k_i - k_{pr} k_{pi} \quad (3.148)$$

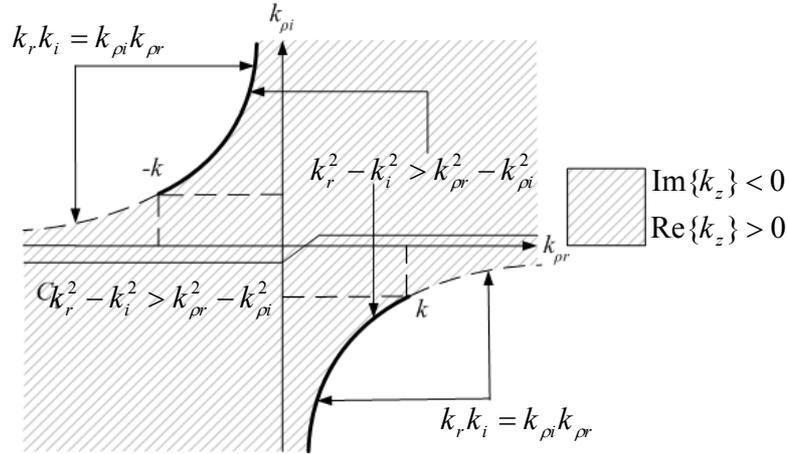
όπου k_{pr} και k_{pi} το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα του k_p . Οι δύο επιφάνειες Riemann χωρίζονται από την ευθεία $\text{Im}\{k_z\}=0$ με $\text{Re}\{k_z\} > 0$. Για να ισχύει $\text{Im}\{k_z\}=0$ θα πρέπει $\text{Re}\{k_z^2\} \geq 0$ και $\text{Im}\{k_z^2\}=0$. Επομένως η συνθήκη $\text{Im}\{k_z\}=0$ πληρείται από τα σημεία εκείνα για τα οποία

$$k_r k_i - k_{pr} k_{pi} = 0 \quad (3.149)$$

$$k_r^2 - k_i^2 \geq k_{pr}^2 - k_{pi}^2 \quad (3.150)$$

Η εξίσωση (3.149) περιγράφει μία υπερβολή που βρίσκεται στο δεύτερο και στο τέταρτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου k_p , αφού $k_r k_i < 0$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 3-10. Οι γραμμές διακλάδωσης απαρτίζονται από τα τμήματα των υπερβολών για τα οποία ισχύει η (3.150). Για παράδειγμα στο τέταρτο τεταρτημόριο, το k ανήκει στην υπερβολή (3.149) και η (3.150) ισχύει για όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην υπερβολή και κάτω από το k , αφού για τα σημεία αυτά ισχύει $k_{pi} > k_i$ και $k_{pr} < k_r$. Στην γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος 3-10 ισχύει $\text{Im}\{k_z\} < 0$ και $\text{Re}\{k_z\} > 0$. Παρατηρούμε πως το μονοπάτι ολοκλήρωσης C_1 του σχήματος 3-9 ανήκει εξολοκλήρου στη γραμμοσκιασμένη περιοχή και επομένως κατά την ολοκλήρωση πάνω στο μονοπάτι C_1 θα ισχύει $\text{Im}\{k_{zn}^p\} < 0$ και $\text{Re}\{k_{zn}^p\} > 0$.

Στην περίπτωση του επίπεδου κυματοδηγού, εξαιτίας των τριών στρωμάτων ($n=0,1,2$) υπάρχουν τρεις συναρτήσεις ριζικών της μορφής (3.143) στο όρισμα του ολοκληρώματος. Επομένως θα περιμέναμε να υπάρχουν και έξι σημεία διακλάδωσης $\pm k_0, \pm k_1, \pm k_2$ τα οποία πιθανόν



Σχήμα 3-10: Οι γραμμές διακλάδωσης της συνάρτησης $k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}$

να επηρεάζουν την μετάβαση από το μονοπάτι ολοκλήρωσης C_1 , στο μονοπάτι σταθερής φάσης P . Ωστόσο, το σημείο $k_\rho = \pm k_1$ δεν αποτελεί σημείο διακλάδωσης της εκάστοτε συνάρτησης $G(k_\rho)$. Για παράδειγμα αν στη συνάρτηση (3.68) για την περίπτωση των τριών στρωμάτων αντικαταστήσουμε το k_{z1} με $-k_{z1}$, ($k_{z1} \rightarrow -k_{z1}$) τότε από τις (3.36)-(3.37) και τις (3.108)-(3.109) θα έχουμε

$$Z_1^p \leftrightarrow -Z_1^p, \bar{\Gamma}_1^p \leftrightarrow 1/\bar{\Gamma}_1^p, \bar{\Gamma}_1^p \leftrightarrow 1/\bar{\Gamma}_1^p \quad (3.151)$$

Πραγματοποιώντας τις αντικαταστάσεις (3.151) στην (3.68) μπορούμε να δείξουμε πως το V_i^p δεν μεταβάλλεται όταν το k_{z1} , αλλάζει πρόσημο. Επομένως η τιμή της V_i^p δεν εξαρτάται από τον κλάδο της k_{z1} , οπότε το $k_\rho = \pm k_1$ δεν αποτελεί σημείο διακλάδωσης για την V_i^p και τα σημεία διακλάδωσης οφείλονται μόνο στα δύο ακριανά στρώματα του επιπέδου κυματοδηγού².

Τέλος, θα πρέπει να σημειώσουμε πως αν $k_i=0$, δηλαδή το μέσο δεν έχει απώλειες, τότε από τις (3.149) και (3.150) συνάγουμε ότι είτε $k_{\rho i}=0$ με $|k_{\rho r}| < k$ είτε $k_{\rho r}=0$. Επομένως οι γραμμές διακλάδωσης όταν δεν υπάρχουν απώλειες είναι ο φανταστικό άξονας και το ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο πραγματικό άξονα, που συνδέει τα σημεία $(k,0)$ και $(-k,0)$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3-11.

3.9.4 Ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

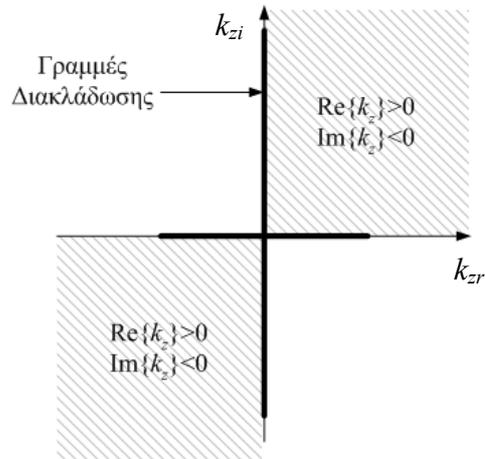
Ο ασυμπτωτικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Sommerfeld διευκολύνεται σημαντικά με χρήση του μετασχηματισμού [FM73, §5.3]

$$k_\rho = k \sin w \text{ και } k_z = k \cos w \quad (3.152)$$

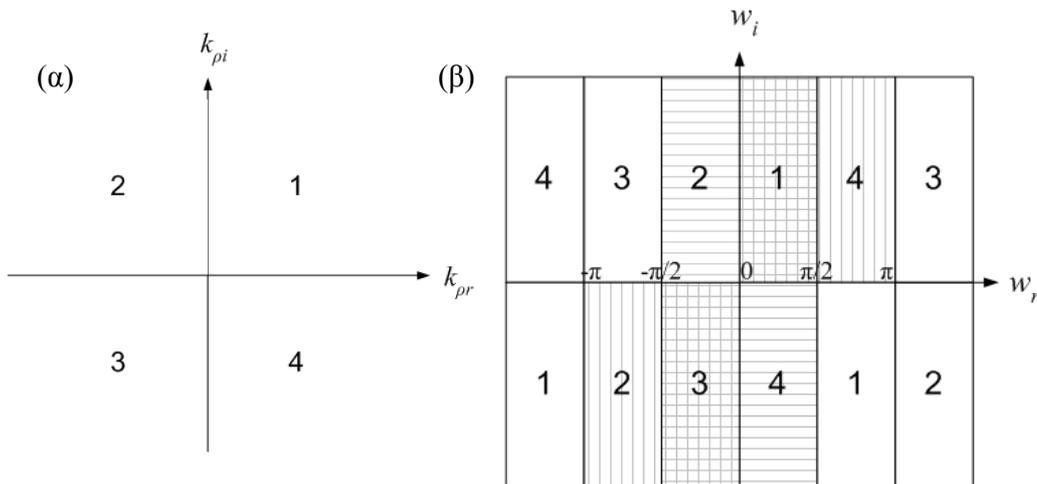
Αν w_r και w_i το πραγματικό και φανταστικό μέρος του w αντίστοιχα, τότε στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν απώλειες ($k_i=0$)

$$k_{\rho r} = k \sin w_r, \cosh w_i \quad (3.153)$$

² Ας σημειωθεί πως ακόμα και στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα στρώματα ($n=0, \dots, N$) τα σημεία διακλάδωσης των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων οφείλονται μόνο στα ακριανά στρώματα ($n=0$ και $n=N$).



Σχήμα 3-11: Γραμμές Διακλάδωση στην περίπτωση $k_i=0$



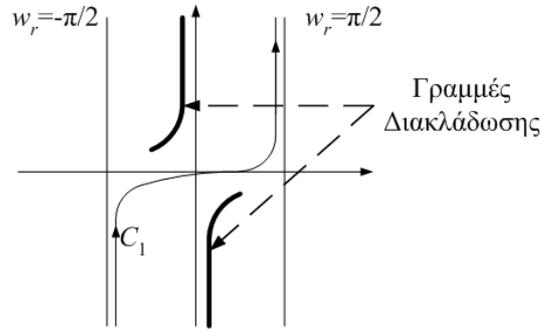
Σχήμα 3-12: Αντιστοίχιση α) των τεταρτημορίων του επιπέδου k_ρ με β) περιοχές του επιπέδου w . Οι οριζόντια γραμμοσκίαση αντιστοιχεί σε περιοχές όπου $k_{zi}>0$ ενώ η κάθετη γραμμοσκίαση σε περιοχές όπου $k_{zr}<0$

$$k_{\rho i} = k \cos w_r \sinh w_i \quad (3.154)$$

$$k_{zr} = k \cos w_r \cosh w_i \quad (3.155)$$

$$k_{zi} = -k \sin w_r \sinh w_i \quad (3.156)$$

Από τις (3.153) και (3.154) διαπιστώνουμε πως τα τέσσερα τεταρτημόρια k_ρ του σχήματος 3-12(α) μετασχηματίζονται στις περιοχές του w που εικονίζονται στο σχήμα 3-12(β). Στο σχήμα 3-12(β), οι οριζόντια γραμμοσκίαση αντιστοιχεί σε περιοχές όπου $k_{zi}<0$ ενώ η κατακόρυφη γραμμοσκίαση σε περιοχές όπου $k_{zr}>0$. Η αντιστοίχιση που εικονίζεται στο σχήμα 3-12 προκύπτει από τις εξισώσεις (3.153)-(3.156). Για παράδειγμα το πρώτο τεταρτημόριο στο επίπεδο k_ρ όπου $k_{\rho r}>0$ και $k_{\rho i}>0$ θα έχουμε $\sin w_r \cosh w_i > 0$ και $\cos w_r \sinh w_i > 0$. Η πρώτη συνθήκη



Σχήμα 3-13: Οι γραμμές διακλάδωσης και το μονοπάτι C_1 στο επίπεδο w

ισχύει για $w_r \in [0, \pi]$ ενώ η δεύτερη για $w_r > 0$, $w_r \in [-\pi/2, \pi/2]$ και για $w_r < 0$, $w_r \notin [-\pi/2, \pi/2]$. Επομένως το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου k_ρ αντιστοιχεί στις περιοχές «1» του επιπέδου w .

Παρατηρούμε στο σχήμα 3-12 πως οι δύο επιφάνειες Riemann για τις οποίες $\text{Im}\{k_z\} = k_{zi} < 0$ και $\text{Im}\{k_z\} = k_{zi} > 0$ απεικονίζονται στις περιοχές $w_r \in [-\pi/2, \pi/2]$, και $w_r \in [\pi/2, 3\pi/2]$ αντίστοιχα. Επομένως οι δύο διαδοχικές επιφάνειες Riemann στο επίπεδο k_ρ εμφανίζονται ως διαδοχικές περιοχές στο w .

Το μονοπάτι C_1 του σχήματος 3-12, έχει την ιδιότητα, όταν $k_{\rho r} \rightarrow +\infty$ το $k_{\rho i}$ να είναι ελαφρά θετικό ενώ όταν $k_{\rho r} \rightarrow -\infty$ το $k_{\rho i}$ να είναι ελαφρά αρνητικό. Από την (3.153) παρατηρούμε πως για να ισχύει $k_{\rho r} \rightarrow -\infty$ θα πρέπει $\sin(w_r) < 0$ και $|w_i| \rightarrow \infty$. Επειδή όμως και $k_{\rho i} > 0$ θα πρέπει $\cos(w_r) \sinh(w_i) < 0$, οπότε είτε $w_r \in [-\pi/2, \pi/2]$ και $w_i < 0$ είτε $w_r \notin [-\pi/2, \pi/2]$ και $w_i > 0$. Επειδή όμως το μονοπάτι C_1 βρίσκεται εξολοκλήρου στην άνω επιφάνεια Riemann του k_z θα πρέπει $w_r \in [-\pi/2, \pi/2]$ οπότε συνάγουμε πως $w_i \rightarrow -\infty$ και $w_r \in [-\pi/2, 0]$. Επειδή όμως $k_{\rho i} \rightarrow 0$ έπεται πως το μονοπάτι C_1 για μεγάλες αρνητικές τιμές του w_i θα πλησιάζει την ευθεία $w_r = -\pi/2$. Ανάλογοι συλλογισμοί και για την περίπτωση $k_{\rho i} < 0$ και $k_{\rho r} \rightarrow +\infty$, τοποθετούν το άλλο άκρο του μονοπατιού C_1 ασυμπτωτικά κοντά στην ευθεία $w_r = +\pi/2$ με $w_i > 0$. Τέλος το μονοπάτι C_1 τέμνει τον πραγματικό άξονα κοντά στο κέντρο των αξόνων του επιπέδου k_ρ . Επειδή το κέντρο του k_ρ μετασχηματίζεται στο κέντρο του w έπεται πως το C_1 περνάει κοντά από το κέντρο των αξόνων του w . Το μονοπάτι C_1 στο επίπεδο w εικονίζεται στο σχήμα 3-13. Στο ίδιο σχήμα εικονίζονται και οι γραμμές διακλάδωσης³ του σχήματος 3-10.

3.9.5 ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ C_1 ΣΤΟ P

3.9.5.i Προσδιορισμός του μονοπατιού P και συμπεριφορά στο άπειρο

Όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ο υπολογισμός των συναρτήσεων Green στο πεδίο του χρόνου προϋποθέτει τη δυνατότητα υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$S_n(G(k_\rho)) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_\rho F(k_\rho) \exp(-jk_z^p \bar{z}) H_n^{(2)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (3.157)$$

³ Ας σημειωθεί πως οι γραμμές διακλάδωσης του σχήματος 3-10 αντιστοιχούν σε ένα μέσο με απώλειες, οπότε $k_i \neq 0$ ενώ ο μετασχηματισμός (3.152) μελετήθηκε όταν $k_i = 0$. Ωστόσο, η απεικόνιση του σχήματος 3-13 παρέχει μία ικανοποιητική περιγραφή ακόμα και όταν το k_i είναι ελαφρά αρνητικό ($k_i \rightarrow 0^-$).

όπου η $F(k_\rho)$ διαθέτει σημεία διακλάδωσης στα $k=\pm k_0$ και $k=\pm k_2$ καθώς και πόλους, ορισμένοι από τους οποίους αντιστοιχούν στους τρόπους TE και TM του επίπεδου κυματοδηγού (παράγραφος 3.8). Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $H_n^{(2)}(z)$ για μεγάλα z είναι η εξής:

$$H_n^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j\left(z - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (3.158)$$

και επομένως για $\rho \rightarrow +\infty$, το ολοκλήρωμα (3.159) γράφεται

$$S_n(G(k_\rho)) \sim \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_\rho \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} F(k_\rho) \exp(-j(k_z^p \bar{z} + k_\rho \rho + n\pi/2 + \pi/4)) dk_\rho \quad (3.159)$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\rho = L \sin \theta \text{ και } \bar{z} = L \cos \theta \quad (3.160)$$

καθώς και το μετασχηματισμό (3.152) το ολοκλήρωμα (3.155) γράφεται ως εξής

$$S_n(G(k_\rho)) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \exp(-j(k_1 L \cos(w - \theta))) dw \quad (3.161)$$

$$f(w) = \frac{1}{4\pi} k_\rho \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} F(k_\rho) \exp(-j(n\pi/2 + \pi/4)k_1 \cos w) \quad (3.162)$$

Η παράγωγος της φάσης του εκθετικού στο ολοκλήρωμα (3.161) μηδενίζεται όταν $\sin(w - \theta) = 0$. Το σημείο $w = \theta$ είναι το σημείο z_s από το οποίο πρέπει να περνάει το μονοπάτι σταθερής φάσης P , όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.9.2. Πάνω στο μονοπάτι σταθερής φάσης P ισχύει

$$\text{Im}\{j \cos(w - \theta)\} = \cos(w_r - \theta) \cosh w_i \quad (3.163)$$

και επειδή το σημείο $w = \theta + j0$ ανήκει στο P θα έχουμε $\cos(w_r - \theta) \cosh w_i = 1$, οπότε

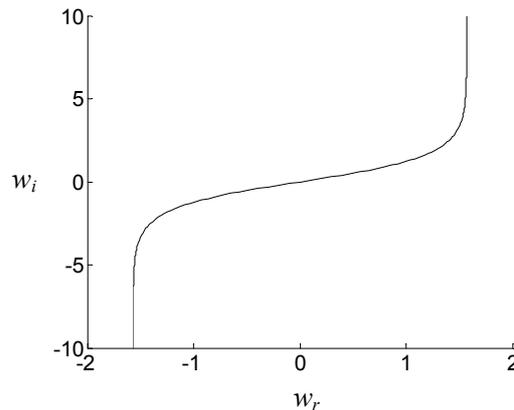
$$w_r - \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\cosh w_i}\right) \quad (3.164)$$

Παρατηρούμε πως αφού $\cosh w_i \geq 0$, πάντα μπορούμε να βρούμε δύο $a \in [-\pi/2, \pi/2]$ τέτοια ώστε $a = \cos^{-1}(1/\cosh w_i)$. Όταν $w_i > 0$ επιλέγουμε και το $a > 0$ ενώ όταν $w_i < 0$ επιλέγουμε και το $a < 0$. Επομένως το μονοπάτι P θα εκφράζεται από τη σχέση

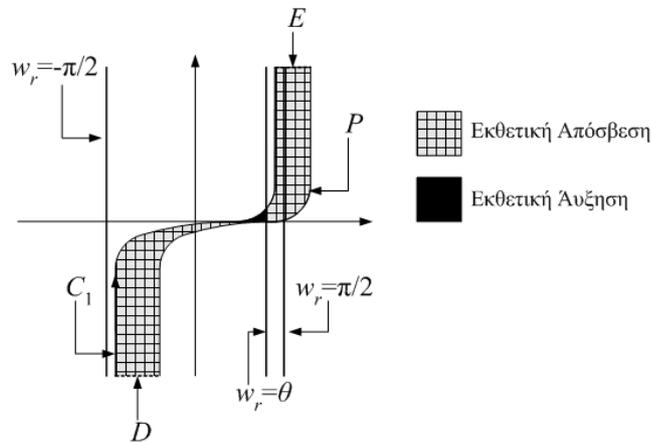
$$w_r - \theta = \pm \left| \cos^{-1}\left(\frac{1}{\cosh w_i}\right) \right| \quad (3.165)$$

όπου το πρόσημο μπροστά από την απόλυτη τιμή καθορίζεται από το πρόσημο του w_i . Στο σχήμα 3-14 έχουμε απεικονίσει το μονοπάτι P σύμφωνα με την εξίσωση (3.165) για $\theta = 0$. Όταν $w_i \rightarrow +\infty$, τότε θα έχουμε $w_r \rightarrow \theta + \pi/2$ ενώ όταν $w_i \rightarrow -\infty$, τότε $w_r \rightarrow \theta - \pi/2$.

Στο σχήμα 3-15 φαίνεται το μονοπάτι C_1 αλλά και το μονοπάτι σταθερής φάσης P . Όπως αναφέραμε, σκοπός μας είναι να μετασχηματίσουμε το μονοπάτι C_1 στο μονοπάτι P , ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Saddle Point [BH86, §7], [Bur81, §5], [FM73, §5]. Καταρχήν παρατηρούμε πως η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι ανάλογη του $h = \exp(-jk_1 L \cos(w - \theta))$ του οποίου το μέτρο ισούται με $\exp(-k_1 L \sin(w_r - \theta) \sinh w_i)$. Για $0 < w_r - \theta < \pi/2$ και $w_i \rightarrow +\infty$, το h παρουσιάζει μία μείωση ισχυρότερη από την εκθετική (εξαιτίας του $\sinh w_i$). Το



Σχήμα 3-14: Γραφική παράσταση της συνάρτησης που δίνεται από την (3.161)



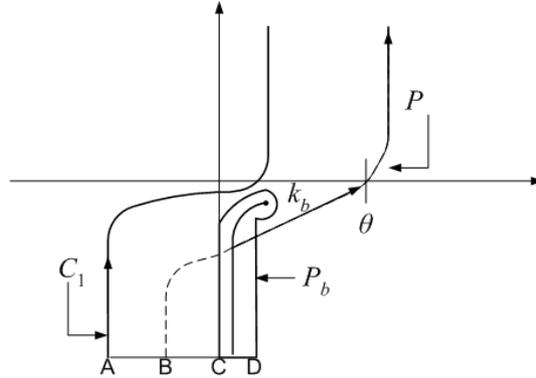
Σχήμα 3-15: Το μονοπάτι P και το μονοπάτι C_1 . Η γκρι περιοχή με οριζόντια και κατακόρυφη γραμμοσκίαση αντιστοιχεί σε κύματα που αποσβένουν εκθετικά ενώ η μικρή μαύρη περιοχή σε κύματα που αυξάνουν εκθετικά

ίδιο ισχύει και για $-\pi/2 < w_r - \theta < 0$ και $w_i \rightarrow -\infty$. Επομένως, για μία αναλυτική συνάρτηση, μπορούμε να μεταβούμε από το μονοπάτι C_1 στο μονοπάτι P κινούμενοι πάνω στα μονοπάτια D και E που εικονίζονται στο σχήμα 3-15, αφού εξαιτίας της θέσης των E και D η συνεισφορά τους είναι αμελητέα. Στην περίπτωση μας, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση διαθέτει πόλους και σημεία διακλάδωσης των οποίων η συνεισφορά, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά τη μετάβαση από το C_1 στο P .

3.9.5.ii Συνεισφορά των πόλων

Έστω ότι ένας πόλος w_p βρίσκεται όντως ανάμεσα στα C_1 και P ενώ κανένας άλλος πόλος και κανένα σημείο διακλάδωσης δεν υπάρχει ανάμεσα στα δύο μονοπάτια. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της μιγαδικής ανάλυσης, το ολοκλήρωμα στο κλειστό μονοπάτι $C=C_1 \rightarrow E \rightarrow P \rightarrow D$ θα ισούται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης στο $w=w_p$ επί τον παράγοντα $2\pi j$. Επομένως

$$\oint_C = \int_{C_1} - \int_P = 2\pi j \text{Υπόλοιπο στο σημείο } w=w_p \quad (3.166)$$



Σχήμα 3-16: Παράκαμψη ενός σημείου διακλάδωσης στο $w=w_b$

Η συνεισφορά του πόλου στο ολοκλήρωμα δίνεται από την [FM73, §5]

$$I_p = 2\pi j \exp(-jkL_1 \cos(w_p - \theta)) \text{Res}\{f(w)\}_{w=w_p} \quad (3.167)$$

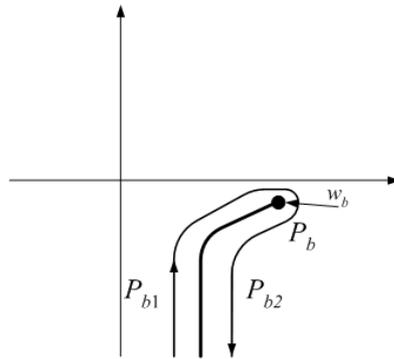
Παρατηρούμε πως η εξάρτηση του I_p από το k_1L εξαρτάται από το $\cos(w_p - \theta)$ και επομένως από τη θέση όπου βρίσκεται ο πόλος w_p στο επίπεδο w . Επειδή

$$-j \cos(w_p - \theta) = -j \cos(w_{nr} - \theta) \cosh w_i - \sin(w_{nr} - \theta) \sinh w_i \quad (3.168)$$

έπεται πως εάν ο πόλος βρίσκεται στην περιοχή $0 < w_{pr} - \theta < \pi/2$ και $w_{pi} > 0$ ή στην περιοχή $-\pi/2 < w_{pr} - \theta < 0$ και $w_{pi} < 0$, τότε το I_p αποσβένει εκθετικά καθώς αυξάνεται το k_1L . Επομένως, αν ένας πόλος w_p βρίσκεται στις γραμμοσκιασμένες με γκρι χρώμα περιοχές του σχήματος 3-15, η συνεισφορά του θα φθίνει εκθετικά. Παρατηρούμε πως στο σχήμα 3-15 υπάρχει μία μικρή περιοχή στο επίπεδο w και ανάμεσα στα μονοπάτια P και C_1 , γραμμοσκιασμένη με μαύρο χρώμα, στην οποία αν βρεθεί ένας πόλος w_p η συνεισφορά του I_p θα αυξάνει εκθετικά. Ωστόσο, η περιοχή αυτή μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή αναγκάζοντας το μονοπάτι C_1 να πλησιάζει όλο και περισσότερο τον άξονα των k_{pr} του σχήματος 3-9. Όσο περισσότερο πλησιάζει το C_1 τον άξονα των k_{pr} στο επίπεδο k τόσο περισσότερο το μετασχηματισμένο μονοπάτι C_1 στο επίπεδο w τείνει να πλησιάσει την ευθεία $w_r = \pi/2$.

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 3.8, ορισμένοι από τους πόλους της συνάρτησης προς ολοκλήρωση αντιστοιχούν στους τρόπους TM (αν $p=e$) και στους τρόπους TE (αν $p=m$). Για τους πόλους $k_p = k_{pp}$ που αντιστοιχούν σε τρόπους που βρίσκονται πάνω από την αποκοπή θα ισχύει $k_{pp} \leq k_1$ ενώ για τους υπολοίπους θα ισχύει $k_{pp} > k_1$. Από την εξίσωση (3.154) και επειδή το k_{pp} είναι πραγματικό, προκύπτει πως στο επίπεδο w οι πόλοι θα απεικονίζονται είτε πάνω στην ευθεία $w_i = 0$, δηλαδή τον πραγματικό άξονα, είτε πάνω στις ευθείες $w_r = m\pi + \pi/2$, όπου το m είναι ακέραιος. Από την (3.153) προκύπτει πως οι πόλοι για τους οποίους $k_{pp} \leq k_1$ πρέπει να βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα, ενώ οι πόλοι για τους οποίους ισχύει $k_{pp} > k_1$ πρέπει να βρίσκονται πάνω στις ευθείες $w_r = m\pi + \pi/2$. Από το σχήμα 3-14 παρατηρούμε πως η μόνη ευθεία $w_r = m\pi + \pi/2$ που βρίσκεται ανάμεσα στα C_1 και P είναι η $w_r = \pi/2$ και πως αν ένας πόλος βρίσκεται πάνω σε αυτήν την ευθεία βρίσκεται και ανάμεσα στα C_1 και P . Για έναν πόλο που βρίσκεται στην ευθεία $w_r = \pi/2$ θα έχουμε

$$h = \exp(-jk_1 \rho \cosh w_{ip} - k_1 \bar{z} \sinh w_{ip}) \quad (3.169)$$



Σχήμα 3-17: Υπολογισμός της συνεισφοράς ενός σημείου διακλάδωσης

Παρατηρούμε επομένως πως η συνεισφορά του πόλου φθίνει εκθετικά με το \bar{z} . Στην περίπτωση όπου ο πόλος βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα ($k_{pp} \leq k_1$) η συνεισφορά του I_p δεν θα αποσβένει εκθετικά αλλά θα παρουσιάζει μία εξάρτηση της μορφής $\exp(-jk_1 L \cos(w_r - \theta))$. Επομένως, όταν απομακρυνόμαστε από την πηγή ($L \gg 1/k_1$) η συνεισφορά των πόλων της προς ολοκλήρωσης συνάρτησης θα οφείλεται κυρίως στους πόλους που αντιστοιχούν στους τρόπους διάδοσης του επίπεδου κυματοδηγού που βρίσκονται πάνω από την αποκοπή.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα πότε ένας πόλος που αντιστοιχεί στα κύματα TE και TM βρίσκεται ανάμεσα στα C_1 και P παρατηρούμε πως το μονοπάτι P τέμνει τον άξονα των w_r στο σημείο $\theta + j0$. Εάν ένας πόλος $k_{pp} = k_1 \sin w_p$ αντιστοιχεί στα κύματα TE και TM που είναι πάνω από την αποκοπή, θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα των w_r . Επομένως εάν $w_p < \theta$ τότε ο πόλος θα βρίσκεται ανάμεσα στα C_1 και P . Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του Heaviside $U(x)$ που ισούται με 1 εάν $x \geq 0$ και 0 εάν $x < 0$, η συνεισφορά I_p του πόλου γράφεται ως εξής:

$$I_p = 2\pi j U(\theta - \theta_p) \exp(-jkL_1 \cos(w_p - \theta)) \text{Res}\{f(w)\}_{w=w_p} \quad (3.170)$$

όπου θ_p είναι η τιμή του θ για την οποία κατά τη μετάβαση από το C_1 στο P συναντούμε τον πόλο w_p . Όταν ένας πόλος βρίσκεται στον πραγματικό άξονα θα έχουμε $\theta_p = w_p$.

3.9.5.iii Συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης.

Όπως αναφέραμε, εκτός από τους πόλους της συνάρτησης $f(w)$, ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί και στα σημεία διακλάδωσής της που συναντούμε κατά τη μετάβαση από το μονοπάτι C_1 στο μονοπάτι P . Η συνεισφορά ενός σημείου διακλάδωσης w_b μπορεί να υπολογιστεί αν παρακάμψουμε το w_b μέσω του μονοπατιού P_b , όπως δείχνει το σχήμα 3-16. Επειδή το $h = \exp(-jk_1 L \cos(w - \theta))$ αποσβένει στην περιοχή $w_i < 0$ και $w_r \in [-\pi/2, 0]$, έπεται πως η ολοκλήρωση κατά μήκος των μονοπατιών AB, BD και BC θα παράγει αποτέλεσμα που θα τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Η μετάβαση από το μονοπάτι C_1 στο μονοπάτι P λαμβάνει χώρα ως εξής: Από το σημείο A μετακινούμαστε στο σημείο D (αφού περάσουμε τον κλάδο που αντιστοιχεί στο σημείο w_b). Έπειτα μετακινούμαστε από το D στο C μέσω του μονοπατιού P_b το οποίο περνάει γύρω από το σημείο διακλάδωσης $w = w_b$. Από το σημείο C μεταφερόμαστε στο σημείο B, από το οποίο περνάει το μονοπάτι σταθερής φάσης και στο οποίο ανήκει και το σημείο $\theta + j0$. Στη συνέχεια ακολουθούμε το μονοπάτι σταθερής φάσης το οποίο ενώνεται με το C_1 στην περιοχή $w_r \rightarrow +\infty$, όπως στο σχήμα 3-15. Παρατηρούμε πως από το σημείο B μέχρι τη γραμμή διακλάδωσης η συνάρτηση πάνω στο μονοπάτι σταθερής φάσης βρίσκεται στην επιφάνεια Riemann με $\text{Im}\{k_z\} > 0$.

Επειδή το $h = \exp(-jk_1 L \cos(w-\theta))$ φθίνει εκθετικά καθώς κινούμαστε προς το σημείο $w_r \rightarrow -\infty$ για $w_r \in [-\pi/2, 0]$, συνάγουμε πως η κύρια συνεισφορά της ολοκλήρωσης πάνω στο P_b θα προέρχεται από το τμήμα του P_b που βρίσκεται κοντά στο w_b . Στη γενική περίπτωση, πρέπει να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$I_{br} = \int_{P_b} f(w) \exp(\Omega q(w)) dw \quad (3.171)$$

πάνω σε ένα μονοπάτι P_b γύρω από μία γραμμή διακλάδωσης που καταλήγει στο σημείο διακλάδωσης $w=w_b$ και στο οποίο το $\exp(\Omega q(w))$ φθίνει καθώς απομακρυνόμαστε από το w_b (σχήμα 3-17). Όπως και στην περίπτωση της μεθόδου saddle point θεωρούμε μία νέα μεταβλητή s έτσι ώστε

$$s^2 = q(w_b) - q(w) \quad (3.172)$$

με $\text{Re}\{s^2\} < 0$ αφού έχουμε υποθέσει πως το $\exp(\Omega q(w))$ φθίνει καθώς απομακρυνόμαστε από το w_b . Επιλέγουμε το μονοπάτι σταθερής φάσης που περνάει από το w_b έτσι ώστε $s^2 > 0$. Αν υποθέσουμε πως

$$f(w) \rightarrow a + b\sqrt{w-w_b} \quad \text{καθώς } w \rightarrow w_b \quad (3.173)$$

Για $w \approx w_b$ θα έχουμε $q(w) \approx q(w_b) + q'(w_b)(w-w_b)$ οπότε και

$$s \approx \sqrt{-q'(w_b)} \sqrt{w-w_b} \quad (3.174)$$

ή αντιστρέφοντας

$$\sqrt{w-w_b} \approx \frac{s}{\sqrt{-q'(w_b)}} \quad (3.175)$$

ενώ τετραγωνίζοντας την (3.175) και παραγωγίζοντας ως προς w θα έχουμε

$$\frac{dw}{ds} \approx \frac{2s}{-q'(w_b)} \quad (3.176)$$

Από την (3.173) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $f(s)$ γράφεται

$$f(s) \approx a + \frac{bs}{\sqrt{-q'(w_b)}} \quad (3.177)$$

Επειδή το s δίνεται από τη σχέση (3.174) και επειδή η $(w-w_b)^{1/2}$ έχει διαφορετικό πρόσημο στα τμήματα P_{b1} και P_{b2} έπεται πως και το s θα πρέπει να έχει διαφορετικό πρόσημο στα τμήματα αυτά. Επιλέγουμε $s < 0$ στο τμήμα P_{b1} και $s > 0$ στο τμήμα P_{b2} . Τότε έπεται πως

$$\int_{P_{b1}} f(w) e^{\Omega q(w)} dw \approx e^{\Omega q(w_b)} \int_{-\infty}^0 f(w) \frac{dw}{ds} e^{-\Omega s^2} ds \quad (3.178)$$

$$\int_{P_{b2}} f(w) e^{\Omega q(w)} dw \approx e^{\Omega q(w_b)} \int_0^{+\infty} f(w) \frac{dw}{ds} e^{-\Omega s^2} ds \quad (3.179)$$

όποτε

$$I_{br} = \int_{P_b} f(w) e^{\Omega q(w)} dw \cong e^{\Omega q(w_b)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \frac{dw}{ds} e^{-\Omega s^2} ds \quad (3.180)$$

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $f(w)dw/ds$ σε δυναμοσειρά ως προς το s , προκύπτει ότι ασυμπτωτικά θα έχουμε

$$I_{br} \sim \frac{b\sqrt{\pi}}{[-\Omega q'(w_b)]^{3/2}} e^{\Omega q(w_b)} \quad (3.181)$$

Από την (3.172) βρίσκουμε ότι

$$b = 2 \lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f'(w) \quad (3.182)$$

οπότε τελικά [FM73, §5]

$$I_{br} \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{[\Omega |q'(w_b)|]^{3/2}} \left[\lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f'(w) \right] \exp(\Omega q(w_b) - j \frac{3}{2} \arg[-q'(w_b)]) \quad (3.183)$$

Στην περίπτωση του ολοκληρώματος (3.161) η συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης θα δίνεται από την

$$I_{br} \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{[k_1 L \sin(\theta - w_b)]^{3/2}} \left[\lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f'(w) \right] \times \exp(jk_1 L \cos(w_b - \theta)) \exp\left(-j \frac{3}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arg(k_1 \sin(w_b - \theta)) \right\}\right) \quad (3.184)$$

Παρατηρούμε πως εν γένει η συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης ελαττώνεται σύμφωνα με το $(k_1 L)^{-3/2}$, σε αντίθεση με τη συνεισφορά των πόλων που δεν ελαττώνεται αυξανόμενου του $k_1 L$ αν ο πόλος βρίσκεται στον πραγματικό άξονα (οπότε ο αντίστοιχος τρόπος βρίσκεται πάνω από την αποκοπή).

3.9.5.iv Συνεισφορά του μονοπατιού P

Τέλος η συνεισφορά του μονοπατιού P μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο Saddle Point που παρουσιάσαμε στην παράγραφο (3.9.2). Σύμφωνα με την εξίσωση (3.140) θα έχουμε

$$I_s \sim \sqrt{\frac{2\pi}{jk_1 L}} f(\theta) \exp\left(ik_1 L - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.185)$$

Ανακεφαλαιώνοντας τους υπολογισμούς των προηγούμενων παραγράφων, παρατηρούμε πως κατά τον ασυμπτωτικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Sommerfeld που εμφανίζονται στις συναρτήσεις Green, στην περίπτωση όπου η πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκεται στο ίδιο στρώμα ($n=m=1$) πρέπει να λάβουμε υπόψη τις εξής συνεισφορές:

Α) Συνεισφορά των πόλων της εξίσωσης εξαιτίας του $1/D_1^p$. Η συνεισφορά των πόλων που έχουν φανταστικό μέρος φθίνει εκθετικά και η κύρια συνεισφορά προέρχεται από τους πόλους που αντιστοιχούν στους τρόπους TE και TM του επίπεδου κυματοδηγού που βρίσκονται πάνω από την αποκοπή. Η συνεισφορά των τελευταίων παρουσιάζει συμπεριφορά $O(1)$ σε σχέση με το γινόμενο $k_1 L$, όπου L είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης.

Β) Συνεισφορά του μονοπατιού P . Η συνεισφορά του μονοπατιού P συμπεριφέρεται ως $O((k_1L)^{-3/2})$ οπότε μπορεί να αγνοηθεί σε σχέση με τη συνεισφορά των πόλων που αντιστοιχούν στα κύματα TE και TM όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Γ) Συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης. Η συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης παρουσιάζει συμπεριφορά $O((k_1L)^{-3/2})$ και επομένως μπορεί να αγνοηθεί σε σχέση με τη συνεισφορά των πόλων που αντιστοιχούν στα κύματα TE και TM και στη συνεισφορά του μονοπατιού P .

3.10 ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΣΥΖΕΥΚΤΗ ΑΣΤΕΡΑ ΤΟΥ AWG

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε την ανάλυση των προηγούμενων παραγράφων για να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική μορφή των συναρτήσεων Green μέσα στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα. Στην περίπτωση του ηλεκτρικού ρεύματος, οι συναρτήσεις Green δίνονται από τις (3.121) και (3.122). Αν υποθέσουμε πως η γωνία ϕ είναι μικρή τότε $\cos(2\phi) \approx 1$ και $\sin\phi \approx \phi$ οπότε

$$G_{yy}^{EJ} \approx -\frac{1}{2}S_0(V_i^h + V_i^e) - \frac{1}{2}S_2(V_i^h - V_i^e) \quad (3.186)$$

$$G_{zy}^{EJ} = -\frac{j\phi}{\omega\epsilon_1}S_1(I_i^h) \quad (3.187)$$

Οι συναρτήσεις Green (3.186) και (3.187) ισχύουν στην περίπτωση όπου η πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκονται μέσα στο στρώμα $n=1$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι σύμφωνα με την εξίσωση (3.129) $e^{j\pi H_0^{(2)}(z)} \rightarrow H_2^{(2)}(z)$ όταν $z \rightarrow \infty$, θα έχουμε $S_2(G(k,\rho)) \approx -S_0(G(k,\rho))$ για $\rho \rightarrow \infty$ και

$$G_{yy}^{EJ} \approx +S_0(V_i^h) \quad (3.188)$$

Παρατηρείστε πως για $\phi \rightarrow 0$ η συνάρτηση Green G_{zy}^{EJ} τείνει στο μηδέν και το πεδίο δεν έχει οριζόντια ως προς τον άξονα z .

3.10.1 ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΩΝ ΠΟΛΩΝ

Η συνάρτηση V_i^h δίνεται από την (3.77) για $p=h$ και αποτελείται από το άθροισμα πέντε όρων κάθε ένας εκ των οποίων εκφράζεται με ένα ολοκλήρωμα Sommerfeld με εξάρτηση της μορφής (3.124). Οι πόλοι της V_i^h καθορίζονται από τα μηδενικά της D_1^h . Χρησιμοποιώντας τις (3.162) και (3.169) προκύπτει πως η συνεισφορά ενός πόλου β_p ισούται με

$$I_p = 2\pi j \frac{Z_1 e^{j\pi/4} \sqrt{\beta_p}}{8\pi D_1^h(k_p) \sqrt{2\rho}} e^{-j\beta_p \rho} \times \left\{ \bar{\Gamma}_1^h e^{-j\beta_p(2d-z-z')} + \bar{\Gamma}_1^h e^{-j\beta_p(z+z')} + \bar{\Gamma}_1^h \bar{\Gamma}_1^h e^{-j\beta_p(2d+z-z')} + \bar{\Gamma}_1^h \bar{\Gamma}_1^h e^{-j\beta_p(2d-z+z')} \right\} \quad (3.189)$$

όπου έχουμε υποθέσει πως $z_2=d$ και $z_1=0$. Επειδή το β_p πληροί τη σχέση

$$1 - \bar{\Gamma}_1^h \bar{\Gamma}_1^h e^{-j2\beta_p d} = 0 \quad (3.190)$$

η εξίσωση (3.183) μετασχηματίζεται στην

$$I_p = j \frac{Z_1 e^{j\pi/4} \sqrt{\beta_p}}{4D'_h(k_p) \sqrt{2\rho}} e^{-j\beta_p \rho} R(z|z') \quad (3.191)$$

όπου

$$R(z|z') = \left\{ \left(\bar{\Gamma}_1^h \right)^{-1} e^{-j\beta_p(2d-z-z')} + \bar{\Gamma}_1^h e^{-j\beta_p(z+z')} + e^{-j\beta_p(z-z')} + e^{-j\beta_p(-z+z')} \right\} \quad (3.192)$$

Για λόγους απλοποίησης των πράξεων θα υποθέσουμε πως τα ακριανά στρώματα του επίπεδου κυματοδηγού έχουν τον ίδιο δείκτη διάθλασης, δηλαδή $k_2=k_0$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$D_1^h = 1 - \left(\frac{Z_0^h - Z_1^h}{Z_0^h + Z_1^h} \right)^2 \exp(-j2k_{z1}^h d) \quad (3.193)$$

Αντικαθιστώντας την (3.36) και στην (3.192) και παραγωγίζοντας ως προς k_p αποδεικνύεται ότι

$$\left. \frac{dD_1^h(k_p)}{dk_p} \right|_{k_p=\beta_p} = \frac{2j\beta_p}{p} \left(2\frac{1}{q} + d \right) \quad (3.194)$$

όπου έχουμε θέσει

$$p = k_{z1}^h \text{ και } jq = k_{z0}^h \quad (3.195)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.129) και την (3.193) στην (3.189) βρίσκουμε πως

$$I_p = \frac{-\omega\mu}{8(2/q+d)} H_0^2(\beta_p \rho) R(z|z') \quad (3.196)$$

Η συνάρτηση $R(z|z')$ μπορεί να συσχετισθεί με την ιδιοσυνάρτηση $\phi_h(z)$ που περιγράφει την εξάρτηση ως προς z του τρόπου TE στον οποίο αντιστοιχεί ο πόλος $k_p=\beta_p$ και η οποία δίνεται από την εξής σχέση:

$$\phi_h(z) = A \cos(pz) + B \sin(pz) = \frac{1}{2} (A - jB) e^{jpz} + \frac{1}{2} (A + jB) e^{-jpz} \quad (3.197)$$

Στην περίπτωση των κυμάτων TE έχουμε $A/B=-p/q$ οπότε

$$\frac{A - jB}{A + jB} = \frac{A/B - j}{A/B + j} = \frac{p + jq}{p - jq} = \left(\bar{\Gamma}_1^h \right)^{-1} \quad (3.198)$$

και επομένως

$$\phi_h(z) = \frac{A + jB}{2} \left(e^{-jpz} + \left(\bar{\Gamma}_1^h \right)^{-1} e^{jpz} \right) \quad (3.199)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.199) συνάγουμε ότι

$$\phi_h(z) \phi_h^*(z') = \frac{|A|^2 + |B|^2}{4} R(z|z') \quad (3.200)$$

Συνήθως κανονικοποιούμε τη συνάρτηση $\phi_h(z)$ έτσι ώστε

$$N_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_h(z)|^2 dz = 1 \quad (3.201)$$

Πραγματοποιώντας τις πράξεις αποδεικνύεται ότι η (3.201) ισχύει όταν

$$A^2 = \frac{2p^2}{(d+2/q)(p^2+q^2)} \quad (3.202)$$

οπότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $A/B = -p/q$ θα έχουμε

$$\frac{|A|^2 + |B|^2}{4} = \frac{1}{2(d+2/q)} \quad (3.203)$$

Συνδυάζοντας την (3.203) και (3.200)

$$2(d+2/q)\phi_h(z)\phi_h^*(z') = R(z|z') \quad (3.204)$$

και από την (3.196) έπεται πως η συνεισφορά του πόλου θα ισούται με

$$I_p = -\frac{\omega\mu_0}{4} H_0^{(2)}(\beta_p \rho) \phi_h(z)\phi_h^*(z') \quad (3.205)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε πως η συνεισφορά του πόλου TM, $k_p = \beta_p$ (ο οποίος λόγω της διπλοδιαθλαστικότητας του επίπεδου κυματοδηγού θα διαφέρει από αυτόν του αντίστοιχου τρόπου TE) στην συνάρτηση Green του μαγνητικού πεδίου με το μαγνητικό ρεύμα \vec{G}_{yy}^{HM} θα δίνεται από την σχέση

$$I_p = -\frac{\omega\epsilon_1}{4} H_0^{(2)}(\beta_p \rho) \phi_e(z)\phi_e^*(z') \quad (3.206)$$

όπου $\phi_e(z)$ η ιδιοσυνάρτηση του μαγνητικού πεδίου του τρόπου TM στον οποίο αντιστοιχεί ο πόλος β_p .

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρουσιάσουμε και έναν εναλλακτικό τρόπο βάσει του οποίου μπορούμε να συνάγουμε τις (3.205) και (3.206). Στην περίπτωση των τρόπων TE είδαμε πως κοντά στον κεντρικό κυματοδηγό ($\phi \neq 0$), η συνάρτηση Green (3.187) έχει αμελητέα τιμή, οπότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι εφαπτομενικό ως προς τον άξονα της διαστρωμάτωσης z . Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται πως και η συνάρτηση Green

$$G_{xy}^{EJ} = \frac{\sin(2\phi)}{2} S_2(V_i^e - V_i^h) \cong 0 \quad (2.207)$$

δηλαδή πως το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο με τον άξονα των y και επομένως πρόκειται για ένα κύμα TE. Στην περίπτωση αυτή, η κυματική εξίσωση γράφεται

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = -j\omega\mu J_y \quad (3.208)$$

και η συνάρτηση Green που συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με το ηλεκτρικό ρεύμα θα δίνεται από την

$$\nabla^2 G_{yy}^{EJ} + k^2 G_{yy}^{EJ} = -j\omega\mu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.209)$$

Αναπτύσσοντας την συνάρτηση Green ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις των τρόπων θα έχουμε

$$G_{yy}^{EJ}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_r A_r(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}')\phi_h^r(z) \quad (3.210)$$

όπου οι ιδιοσυναρτήσεις υπακούουν την εξίσωση

$$\frac{d^2\phi_h^r}{dz^2} + p_r^2\phi_h^r = 0 \quad (3.211)$$

Αντικαθιστώντας την (3.204) στην (3.203) και χρησιμοποιώντας την (3.205), λαμβάνουμε

$$\sum_n \left\{ \nabla_t^2 A_n + (k^2 - p_n^2) A_n \right\} \phi_h^r = -j\omega\mu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.212)$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_h^m αμφότερα τα μέλη και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_h^m (\phi_h^r)^* dz = \delta_{mk} \quad (3.213)$$

η (3.212) θα δώσει

$$\nabla_t^2 G_r(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}') + (k^2 - p_r^2) G_r(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}') = -j\omega\mu_0 \delta(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}') \quad (3.214)$$

όπου $G_r = A_r / (\phi_h^r(z'))^*$. Μετασχηματίζοντας την (3.214) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σταθερά διάδοσης των τρόπων TE συνδέεται με την ιδιοτιμή των ιδιοσυναρτήσεων της (3.211) ως εξής

$$\beta_r^2 = k^2 - p_r^2 \quad (3.215)$$

βρίσκουμε

$$\tilde{G}_r = \frac{j\omega\mu_0}{(k_\rho^2 - \beta_r^2)} \quad (3.216)$$

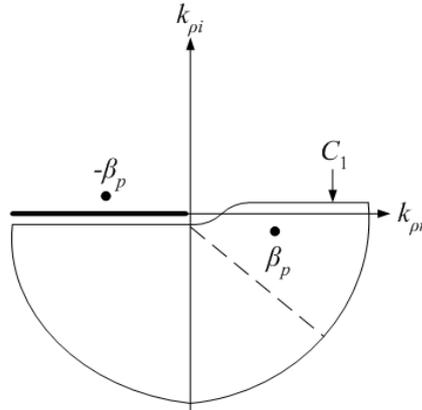
Στο πεδίο του χώρου η (3.216) δίνει

$$G_r = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} dk_\rho k_\rho \frac{1}{k_\rho^2 - \beta_r^2} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \quad (3.217)$$

Σύμφωνα με την (3.159) η συνάρτηση $H_0^{(2)}(z)$ όπου $z=z_r+jz_i$ φθίνει εκθετικά όταν το z βρίσκεται σε ένα ημικύκλιο στον κάτω αρνητικό φανταστικό άξονα. Επομένως το μονοπάτι C_1 στο σχήμα 3-9 μπορεί να κλείσει όπως φαίνεται στο σχήμα 3-18 με ένα ημικύκλιο με άπειρη ακτίνα που βρίσκεται στο τέταρτο και τρίτο τεταρτημόριο. Μέσα στο κλειστό μονοπάτι βρίσκεται ο πόλος $+\beta_r$ άρα,

$$\begin{aligned} G_r &= (j2\pi) \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \text{Res} \left\{ k_\rho \frac{1}{k_\rho^2 - \beta_r^2} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \right\}_{k_\rho=\beta_r} \\ &= -\frac{\omega\mu_0}{4} H_0^{(2)}(\beta_r \rho) \end{aligned} \quad (3.218)$$

Η συνάρτηση Green δίνεται από την (3.210) στην οποία αν αντικαταστήσουμε την (3.218) θα έχουμε



Σχήμα 3-18: Μονοπάτι ολοκλήρωσης C_1

$$G_{yy}^{EJ}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{\omega\mu_0}{4} \sum_r H_0^{(2)}(\beta_r \rho) \phi_r^h(z) (\phi_r^h(z'))^* \quad (3.219)$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι αν υποθέσουμε πως στο ηλεκτρικό πεδίο αποτελείται μόνο από τους τρόπους TE τότε η συνάρτηση Green δίνεται από ένα άθροισμα όρων της μορφής (3.205). Με άλλα λόγια, οι πόλοι που αντιστοιχούν στους τρόπους TE δημιουργούν κύματα των οποίων η εξάρτηση ως προς τις εγκάρσιες προς τη διαστρωμάτωση συντεταγμένες περιγράφεται από τη συνάρτηση Hankel $H_0^{(2)}(\beta_r \rho)$ που αντιστοιχεί σε κυκλικά κύματα σε δύο διαστάσεις. Η εξάρτηση των κυμάτων ως προς τη συνιστώσα z περιγράφεται από τις ιδιοσυναρτήσεις $\phi_r^h(z)$.

3.10.2 ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΣΗΜΕΙΩΝ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ

Όπως είδαμε και στην παράγραφο 3.9.5 αν ένα σημείο διακλάδωσης βρίσκεται ανάμεσα στα μονοπάτια C_1 και P , τότε συνεισφέρει στην τιμή της ασυμπτωτικής ανάπτυξης του ολοκληρώματος Sommerfeld σύμφωνα με την (3.184). Η συνάρτηση προς ολοκλήρωση αποτελείται από το άθροισμα τεσσάρων συναρτήσεων της μορφής $f_s(w) \exp(-jk_1 L \cos(w-\theta_s))$ όπου

$$f_s(w) = \frac{\omega\mu_0 \sqrt{2k_1} e^{j\pi/4}}{8\pi \sqrt{\pi\rho}} \frac{R_{1s}^h}{D_1^h} \sqrt{\sin w} \quad (3.220)$$

Στην περίπτωση ενός συμμετρικού επίπεδου κυματοδηγού ($k_0=k_2$) θα έχουμε από τις (3.70)-(3.72):

$$R_{11}^h = R_{12}^h = \bar{\Gamma}_1 = \frac{k_{z0}^h - k_{z1}^h}{k_{z0}^h + k_{z1}^h} = -\frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 w} - \cos w}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 w} + \cos w} \quad (3.221)$$

$$R_{13}^h = R_{14}^h = (R_{11}^h)^2 \quad (3.222)$$

$$D_1^h = 1 - (\bar{\Gamma}_1^h)^2 \exp(-2j k_1 \cos w) \quad (3.223)$$

όπου $\varepsilon=k_0/k_1=n_0/n_1$. Για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης θα πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(w)=f_s(w)$ στην (3.184) και έπειτα να βρούμε το όριο $(w-w_b)^{1/2} f_s(w)$ όταν $w \rightarrow w_b$. Οι προαναφερόμενοι υπολογισμοί είναι πολύ δύσκολο να

πραγματοποιηθούν χωρίς τη χρήση συμβολικών υπολογισμών σε υπολογιστή. Χρησιμοποιώντας το Mathematica έχουμε

$$A = \lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f_1'(w) = \lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f_2'(w) = \frac{2 \exp(2jk_1 d \cos w_b) (1 + \exp(2jk_1 d \cos w_b)) \sec w_b (\sin w_b)^{3/2}}{(1 - \exp(2jk_1 d \cos w_b))^2 \sqrt{-\sin(2w_b)}} \quad (3.224)$$

$$B = \lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f_3'(w) = \lim_{w \rightarrow w_b} \sqrt{w - w_b} f_4'(w) = \frac{4 \exp(4jk_1 d \cos w_b) \sec w_b (\sin w_b)^{3/2}}{(1 - \exp(2jk_1 d \cos w_b))^2 \sqrt{-\sin(2w_b)}} \quad (3.225)$$

Αν θέσουμε $\varepsilon = (k_0/k_1)^2 = (n_0/n_1)^2$ τότε θα έχουμε

$$\cos w_b = \sqrt{1 - \varepsilon}, \quad \sin w_b = \sqrt{\varepsilon}, \quad \sec w_b = (1 - \varepsilon)^{1/2}, \quad \sin(2w_b) = 2\varepsilon^{1/2} (1 - \varepsilon)^{1/2} \quad (3.226)$$

οπότε

$$A = \frac{2e^{2jp_0 d} (1 + e^{2jp_0 d})}{(1 - e^{2jp_0 d})^2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{-2(1 - \varepsilon)^{3/4}}} \quad (3.227)$$

$$B = \frac{4e^{4jp_0 d}}{(1 - e^{2jp_0 d})^2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{-2(1 - \varepsilon)^{3/4}}} \quad (3.228)$$

όπου

$$p_0 = k_1 \sqrt{(1 - \varepsilon)} \quad (3.229)$$

Αντικαθιστώντας

$$k_1 L_s \sin(w_b - \theta_s) = k_1 (\gamma_{1s} \varepsilon^{1/2} - (1 - \varepsilon)^{1/2} \rho) \quad (3.230)$$

$$k_1 L_s \cos(w_b - \theta_s) = k_1 (\rho \varepsilon^{1/2} + (1 - \varepsilon)^{1/2} \gamma_{1s}) \quad (3.231)$$

και

$$\arg\{-jk_1 \sin(w_b - \theta_s)\} = \arg\left(-j \frac{k_1}{L_s} (\varepsilon^{1/2} \gamma_{1s} - (1 - \varepsilon)^{1/2} \rho)\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.232)$$

όταν

$$\rho > \frac{\varepsilon^{1/2}}{1 - \varepsilon^{1/2}} \gamma_{1s} \quad (3.233)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.183) και τις (3.230)-(3.232) λαμβάνουμε

$$I_{bs} = \sum_s I_{bs,s} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi j} \sqrt{\frac{2k_1}{\rho}} \sum_s \frac{C_s}{|k_1 \varepsilon^{1/2} \gamma_{1s} - (1-\varepsilon)^{1/2} \rho|^{3/2}} \exp(-jk_1 \varepsilon^{1/2} \rho + (1-\varepsilon)^{1/2} \gamma_{1s}) \quad (3.234)$$

με $C_s=A$ όταν $s=1,2$ και $C_s=B$ όταν $s=3,4$. Σύμφωνα με την (3.234) η συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης αποσβένει αναλόγως του ρ^{-2} καθώς αυξάνει το ρ .

3.10.3 ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΟΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙΟΥ P

Σύμφωνα με την εξίσωση (3.185), η συνεισφορά του μονοπατιού P δίνεται από την σχέση

$$I_{saddle} = \sum_{s=0}^4 \sqrt{\frac{2\pi}{jk_1 L_s}} f_s(\theta_s) \exp(-jk_1 L_s) \quad (3.235)$$

όπου οι συναρτήσεις f_s για $1 \leq s \leq 4$ δίνονται από την (3.220) ενώ

$$f_s(w) = \frac{\omega\mu_0 \sqrt{2k_1} e^{j\pi/4}}{8\pi \sqrt{\pi\rho}} \sqrt{\sin w} \quad (3.236)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.235), (3.220) και (3.236) βρίσκουμε

$$I_{saddle} \sim \frac{\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{e^{-jk_1 L_0}}{L_0} + \sum_{s=1}^4 \frac{R_{1s}^h(\theta_s)}{D_1^h(\theta_s) L_s} e^{-jk_1 L_s} \right) \quad (3.237)$$

Όταν $\rho \rightarrow +\infty$ θα έχουμε $\theta_s \rightarrow \theta \rightarrow \pi/2$ οπότε και $L_s \rightarrow \rho$. Στην περίπτωση αυτή το σημείο θ_s ταυτίζεται με τον πόλο $w=\pi/2$ ($k_\rho=k_1$ στο επίπεδο k_ρ) της συνάρτησης $D_1^h(\theta_s)$ και η (3.237) δεν ισχύει πλέον. Για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά του μονοπατιού P στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$I_{saddle} = \int_P f(z) e^{\Omega q(z)} dz = e^{\Omega q(z_s)} \sqrt{\frac{-2\pi}{\Omega q''(z_s)}} \left[g(z_s) - a \frac{q^{(3)}(z_s)}{6q''(z_s)} \right] \quad (3.238)$$

όπου

$$a = \lim_{z \rightarrow z_s} f(z)(z - z_s) \quad (3.239)$$

$$g(z_s) = \lim_{z \rightarrow z_s} (f(z) - a(z - z_s)^{-1}) \quad (3.240)$$

Στην περιπτώσή μας $q^{(3)}=jk_1 L \sin(w-\pi/2)$ που ισούται με μηδέν για $w=\pi/2$. Με τη βοήθεια του Mathematica υπολογίζουμε τους συντελεστές $a=a_s$ για κάθε μία από τις συναρτήσεις $f_s(w)$ και βρίσκουμε

$$a_1 = a_2 = C \lim_{w \rightarrow \pi/2} \left((w - \pi/2) \frac{R_{11}^h}{D_1^h} \sqrt{\sin w} \right) = \frac{jC \sqrt{\varepsilon - 1}}{4j - 2k_1 d \sqrt{\varepsilon - 1}} \quad (3.241)$$

$$a_3 = a_4 = C \lim_{w \rightarrow \pi/2} \left((w - \pi/2) \frac{R_{13}^h}{D_1^h} \sqrt{\sin w} \right) = \frac{jC\sqrt{\varepsilon-1}}{2k_1 d \sqrt{\varepsilon-1} - 4j} \quad (3.242)$$

όπου

$$C = \frac{e^{j\pi/4} \omega \mu_0}{8\pi} \sqrt{\frac{2k_1}{\pi \rho}} \quad (3.243)$$

και

$$g_1(\pi/2) = g_2(\pi/2) = \frac{Ck_1 d(\varepsilon-1)}{-4j\sqrt{\varepsilon-1} + 2k_1 d(\varepsilon-1)} \quad (3.244)$$

$$g_3(\pi/2) = g_4(\pi/2) = \frac{jC\sqrt{\varepsilon-1}(k_1^2 d^2(\varepsilon-1) + 4)}{2(k_1 d \sqrt{\varepsilon-1} - 2j)(2\sqrt{\varepsilon-1} + jk_1 d(\varepsilon-1))} \quad (3.245)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.238) για κάθε ένα από τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $f_s(w)$ και θεωρώντας πως $L_s \cong L_0$ βρίσκουμε

$$I_{saddle} \cong \frac{\omega \mu_0}{4\pi L_0} \left(1 + \sum_{s=1}^4 g'_s(\pi/2) \right) e^{-jk_1 L_0} \quad (3.246)$$

όπου

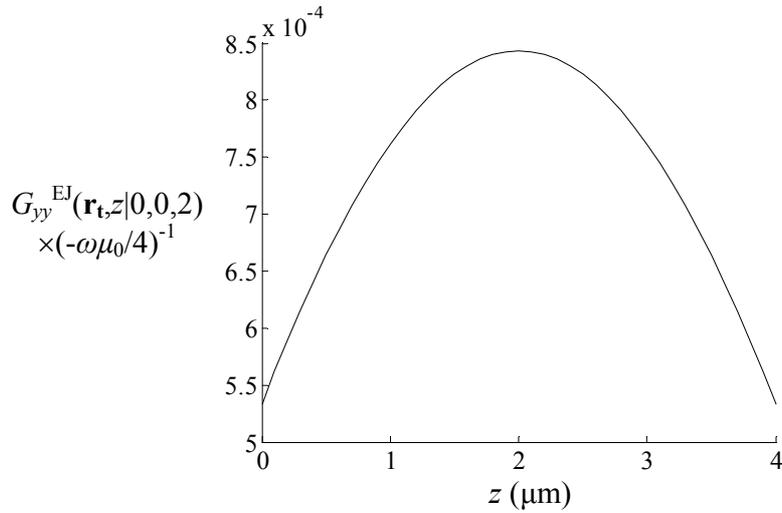
$$g'_s = g_s / C \quad (3.247)$$

Οι εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε στις προηγούμενες παραγράφους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ασυμπτωτικό υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μέσα στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα του AWG. Η κυρίαρχη ασυμπτωτική συμπεριφορά προέρχεται από τους πόλους των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων στα ολοκληρώματα Sommerfeld των συναρτήσεων Green και δίνεται από την (3.205) για την περίπτωση των πόλων TE και από την (3.206) στην περίπτωση των τρόπων TM. Για τον υπολογισμό της συνεισφοράς των σημείων διακλάδωσης των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων χρησιμοποιούμε την (3.234) ενώ για την συνεισφορά του μονοπατιού P χρησιμοποιούμε την (3.246). Όπως θα δούμε και στη συνέχεια οι δύο τελευταίες συνεισφορές είναι αρκετά μικρότερες από την συνεισφορά των πόλων και επομένως μπορούν να αγνοηθούν.

3.10.4 ΜΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 3.10.1 έως 3.10.3 για να υπολογίσουμε τα πεδία μέσα σε έναν συμμετρικό επίπεδο κυματοδηγό με δείκτη διάθλασης $n_1=1.5$ για το μεσαίο στρώμα και $n_0=n_2=1.49$ για τα δύο ακριανά. Η παράμετρος $\varepsilon=(n_0/n_1)^2$ ισούται με $\varepsilon=0.9867$ ενώ το πάχος του μεσαίου στρώματος ισούται με $d=4\mu\text{m}$. Θα θεωρήσουμε πως η πηγή βρίσκεται στο $z'=2$ και θα υπολογίσουμε το πεδίο σε απόσταση $\rho=10000\mu\text{m}$ από την πηγή.

Η συνεισφορά των πόλων στην περίπτωση των κυμάτων TE περιγράφεται από τη σχέση (3.206). Ο επίπεδος κυματοδηγός υποστηρίζει έναν τρόπο διάδοσης TE ο οποίος έχει ενεργό δείκτη διάθλασης $n_{eff}=1.4960$. Οι ιδιοσυναρτήσεις των τρόπων TE ενός επίπεδου κυματοδηγού, είναι γνωστές σε κλειστή μορφή και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των πόλων στην ασυμπτωτική μορφή της συνάρτησης Green G_{yy}^{EJ}



Σχήμα 3-19: Η συνεισφορά του πόλου στην συνάρτηση Green G_{yy}^{EJ}

$$G_{yy}^{EJ}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -\frac{\omega\mu_0}{4} H_0^{(2)}(\beta\rho)\phi_1^h(z)\phi_1^h(z') \quad (3.248)$$

όπου $\beta=2\pi n_{\text{eff}}/\lambda$. Για τον πιο πάνω υπολογισμό, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ιδιοσυναρτήσεις των τρόπων TE ενός επίπεδου κυματοδηγού είναι πραγματικές. Στο σχήμα 3-19 έχουμε απεικονίσει την συνάρτηση Green (3.247) για $0 \leq z \leq 4$.

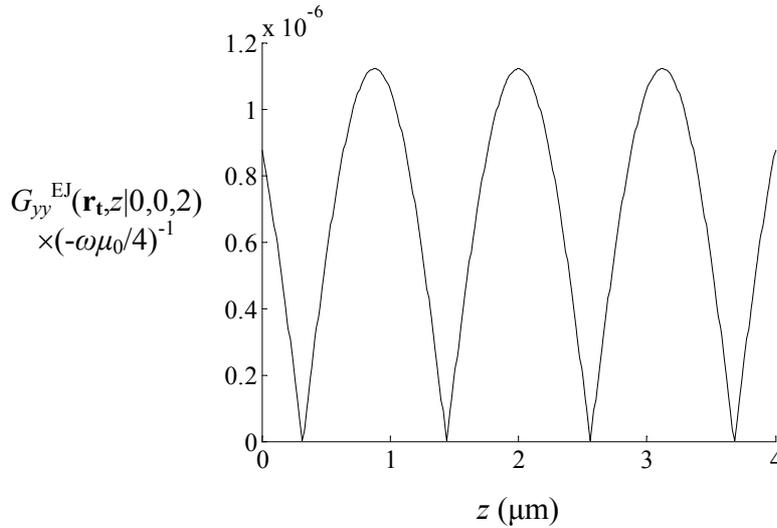
Η συνεισφορά του σημείου διακλάδωσης υπολογίζεται μέσω της σχέσης (3.232) και έχει απεικονιστεί στο σχήμα 3-20. Συγκρίνοντας τα σχήματα 3-19 και 3-20 παρατηρούμε πως η συνεισφορά των σημείων διακλάδωσης είναι πολύ μικρότερη από τη συνεισφορά των πόλων και επομένως μπορεί να αγνοηθεί. Η διαφορά μεταξύ της συνεισφοράς των πόλων και της συνεισφοράς των σημείων διακλάδωσης οφείλεται στο γεγονός ότι η πρώτη φθίνει ασυμπτωτικά ανάλογα του $\rho^{-1/2}$ ενώ η δεύτερη ανάλογα με ρ^{-2} .

Τέλος όσον αφορά την συνεισφορά του μονοπατιού P , από τις (3.232) και (3.233) έχουμε $g'_1(\pi/2)=g'_2(\pi/2)=-1.732$ και $g'_3(\pi/2)=g'_4(\pi/2)=2.975$. Επειδή $1/\pi/L_0 \cong 1/\pi/\rho \cong 3.81 \times 10^{-5} \mu\text{m}$ έπεται πως η συνεισφορά του μονοπατιού P θα ισούται με

$$\frac{1}{4}\omega\mu_0(1-2 \times 1.732+2 \times 2.975) \times 3.81 \times 10^{-5} = \frac{1}{4}\omega\mu_0 \times 1.32 \times 10^{-4}$$

δηλαδή περίπου μία τάξη μεγέθους μικρότερη από τη συνεισφορά των πόλων. Επειδή η συνεισφορά των πόλων φθίνει ανάλογα του $\rho^{-1/2}$ ενώ η συνεισφορά του μονοπατιού P ανάλογα με το ρ^{-1} έπεται πως όσο αυξάνει η απόσταση η συνεισφορά του μονοπατιού P θα μειώνεται γρηγορότερα από τη συνεισφορά των πόλων.

Επομένως κατά την αντιμετώπιση του προβλήματος μίας πηγής ηλεκτρικού ρεύματος στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα, μπορούμε σε μία πρώτη προσέγγιση να θεωρήσουμε μονάχα τη συνάρτηση Green που προέρχεται από τη συνεισφορά του τρόπου TE ο οποίος βρίσκεται πάνω από την αποκοπή. Παρόμοια, για το πρόβλημα μίας πηγής μαγνητικού ρεύματος στο εσωτερικό του συζεύκτη αστέρα, μπορούμε σε μία πρώτη προσέγγιση να θεωρήσουμε μονάχα τη συνεισφορά του τρόπου TM ο οποίος βρίσκεται πάνω από την αποκοπή.



Σχήμα 3-20: Συνεισφορά του σημείου διακλάδωσης στη συνάρτηση Green G_{yy}^{EJ}

3.10.5 ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΕΞΟΔΟΥ

Στις προηγούμενες παραγράφους δείξαμε πως όταν στην είσοδο του συζεύκτη αστέρα βρίσκεται ένας κυματοδηγός στο εσωτερικό του οποίου το πεδίο καθορίζεται από τον τρόπο E_z^{pq} , τότε θεωρούμε ένα ισοδύναμο μαγνητικό ρεύμα $\mathbf{M}_E = M\mathbf{y}$ παράλληλο προς τη διαστρωμάτωση του επίπεδου κυματοδηγού. Αντίστοιχα όταν το πεδίο καθορίζεται από τον τρόπο H_z^{pq} , θεωρούμε ένα ισοδύναμο ηλεκτρικό ρεύμα $\mathbf{J}_H = J\mathbf{y}$ το οποίο επίσης έχει διεύθυνση παράλληλη προς τη διαστρωμάτωση. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το πεδίο που αντιστοιχεί σε μία σημειακή πηγή μαγνητικού ή ηλεκτρικού ρεύματος χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Green G_{yy}^{HM} και G_{yy}^{EJ} και για να βρούμε το πεδίο στην έξοδο του συζεύκτη αστέρα ολοκληρώνουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Green με το ισοδύναμο μαγνητικό ή ηλεκτρικό ρεύμα στην είσοδο του συζεύκτη αστέρα και λαμβάνουμε το ηλεκτρικό πεδίο E_y που προέρχεται από τους τρόπους H_z^{pq} καθώς και το μαγνητικό πεδίο H_y το οποίο προέρχεται από τους τρόπους E_z^{pq} . Στην έξοδο του συζεύκτη αστέρα βρίσκονται οι κυματοδηγοί εξόδου οι οποίοι υποστηρίζουν με τη σειρά τους τρόπους E_z^{pq} και H_z^{pq} που διεγείρονται εξαιτίας των E_y και H_y αντίστοιχα.

Ωστόσο, εκτός των συναρτήσεων G_{yy}^{HM} και G_{yy}^{EJ} υπάρχουν και οι συναρτήσεις G_{zy}^{HM} και G_{zy}^{EJ} . Στην περίπτωση της G_{zy}^{EJ} έχουμε

$$G_{zy}^{EJ} = -\frac{j \sin \phi}{\omega \varepsilon_1} S_1(I_i^h) \cong -\frac{\sin \phi}{\omega \varepsilon_1} S_0(I_i^h) \quad (3.249)$$

όπου η τελευταία σχέση ισχύει επειδή ασυμπτωτικά $H_1^{(2)}(z) \rightarrow H_0^{(2)}(z)e^{-j\pi/2}$ όταν $z \rightarrow +\infty$. Από τη σχέση (3.44) βρίσκουμε ότι $I_i^h = dV_i^h/dz/(-j\omega\mu_0)$ και επομένως

$$G_{zy}^{EJ} \cong -\frac{j \sin \phi}{\varepsilon_1 \omega^2 \mu_0} \frac{d}{dz} \{S_0(V_i^h)\} = -\frac{j \sin \phi}{\varepsilon_1 \omega^2 \mu_0} \times \frac{dG_{yy}^{EJ}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')}{dz} \quad (3.250)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.219)

$$G_{zy}^{EJ} \cong \frac{j \sin \phi}{\omega \varepsilon_1} H_0^{(2)}(\beta \rho) \phi^h(z') \frac{d\phi^h(z)}{dz} \quad (3.251)$$

Η (3.251) περιγράφει τη z συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται εξαιτίας του τρόπου H_z^{pq} η οποία και ενδέχεται να διεγείρει τον τρόπο E_z^{pq} του κυματοδηγού εξόδου. Ωστόσο πρέπει να σημειωθεί πως κοντά στον κεντρικό κυματοδηγό έχουμε $\phi \approx 0$ και εξαιτίας του $\sin \phi$ στην (3.245) θα έχουμε $G_{zy}^{EJ} \approx 0$. Επίσης η εξάρτηση $\psi_z(z)$ ως προς z , του βασικού τρόπου E_z^{pq} του κυματοδηγού φράγματος είναι συμμετρική ως προς το $z=d/2$ σε αντίθεση με το $d\phi^h/dz$ το οποίο είναι αντισυμμετρικό ως προς το $z=d/2$ εξαιτίας της συμμετρίας του ϕ^h ως προς το $z=d/2$. Επομένως, ο συντελεστής διέγερσης του τρόπου που καθορίζεται από το ολοκλήρωμα του γινομένου $\psi_z(z) G_{zy}^{EJ}$ θα έχει αμελητέα τιμή. Άρα, ο τρόπος H_z^{pq} στην είσοδο του συζεύκτη αστέρα δημιουργεί ένα πεδίο στο εσωτερικό του που στην έξοδο διεγείρει μόνο τον βασικό τρόπο H_z^{pq} του κυματοδηγού εξόδου. Με το ίδιο σκεπτικό αποδεικνύεται πως και ο τρόπος E_z^{pq} στην είσοδο του συζεύκτη αστέρα δημιουργεί ένα πεδίο στο εσωτερικό του που στην έξοδο διεγείρει μόνο το βασικό τρόπο E_z^{pq} του κυματοδηγού εξόδου.

3.10.6 ΑΠΟ ΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων, θα δείξουμε πως η λειτουργία του συζεύκτη αστέρα μπορεί να περιγραφεί σε δύο διαστάσεις παράλληλες με την διαστρωμάτωση. Όπως αναφέραμε και στην 3.10.5 η περιγραφή της διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εντός του εσωτερικού του συζεύκτη αστέρα περιγράφεται από τις συναρτήσεις Green G_{yy}^{HM} και G_{yy}^{EJ} οι οποίες έχουν γραφεί σε μορφή χωριζόμενων μεταβλητών. Για παράδειγμα η συνάρτηση G_{yy}^{EJ} έχει γραφεί ως

$$G_{yy}^{EJ}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -\frac{\omega \mu_0}{4} H_0^{(2)}(\beta \rho) \phi^h(z) \phi^h(z') \quad (3.252)$$

Από την (3.252) παρατηρούμε πως οι μεταβλητές z και z' έχουν διαχωριστεί από τη μεταβλητή $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Ας υποθέσουμε πως το ηλεκτρικό πεδίο του τρόπου H_z^{pq} του κυματοδηγού εισόδου ισούται με

$$\mathbf{E}(x', y', z') = \mathbf{y}E = \mathbf{y} \psi_{y1}(y') \psi_{z1}(z') \quad (3.253)$$

Στο σχήμα 3-21 φαίνεται η γεωμετρία του συζεύκτη αστέρα σε δύο διαστάσεις [Dra89] και το σύστημα των συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Εάν ο κυματοδηγός εισόδου δεν παρουσιάζει ισχυρές μεταβολές δείκτη διάθλασης τότε εξαιτίας της προσέγγισης ασθενούς κυματοδήγησης (weak guidance approximation) θα έχουμε

$$\mathbf{H}_t = \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \mathbf{x} \times \mathbf{E}_t = \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^{1/2} \psi_{y1}(y') \psi_{z1}(z') \mathbf{z} \quad (3.254)$$

και το ισοδύναμο ηλεκτρικό ρεύμα θα ισούται με

κυματοδηγού εισόδου. Στην έξοδο του συζεύκτη αστέρα το πεδίο διεγείρει το βασικό τρόπο του κυματοδηγού εξόδου. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο στην περίπτωση του ηλεκτρικού ρεύματος \mathbf{J}_E μονάχα ο βασικός τρόπος H_z^{pq} διεγείρεται (θεωρούμε πως ο κυματοδηγός εξόδου είναι μονότροπος, οπότε υποστηρίζει μονάχα έναν τρόπο H_z^{pq} και έναν τρόπο E_z^{pq}). Για να βρούμε το συντελεστή διέγερσης του βασικού τρόπου H_z^{pq} του κυματοδηγού εξόδου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι δύο διαφορετικοί τρόποι ενός κυματοδηγού χωρίς απώλειες k και j είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους βάσει του εσωτερικού γινομένου

$$\langle \mathbf{E}_k, \mathbf{E}_j \rangle = \int_{A_\infty} (\mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_j^*) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \text{ για } k \neq j \quad (3.260)$$

όπου \mathbf{E}_k και \mathbf{H}_k είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο του k τρόπου, A_∞ μία επιφάνεια απείρων διαστάσεων κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης και \mathbf{n} ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς τη διεύθυνση διάδοσης. Επομένως, το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} σε έναν κυματοδηγό αναλύεται ως εξής στους τρόπους διάδοσης του κυματοδηγού:

$$\mathbf{E} = \sum_k D_k \mathbf{E}_k \quad (3.261)$$

με

$$D_k = \frac{\langle \mathbf{E}, \mathbf{E}_k \rangle}{\langle \mathbf{E}_k, \mathbf{E}_k \rangle} \quad (3.262)$$

Στην περίπτωση μας το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο προς τον άξονα των y και δίνεται από την (3.257) ενώ ο τρόπος H_z^{pq} του κυματοδηγού φράγματος δίνεται από

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{y}E = \mathbf{y}\psi_{y_2}(y)\psi_{z_2}(z) \quad (3.263)$$

$$\mathbf{H}_{t1} = n \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \mathbf{x} \times \mathbf{E}_1 = n \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \psi_{y_2}(y)\psi_{z_2}(z)\mathbf{z} \quad (3.264)$$

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{E}_1 \rangle = n(\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} C_{in} C_{out} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_{y_2}(y)\psi_{out}(y) \quad (3.265)$$

όπου

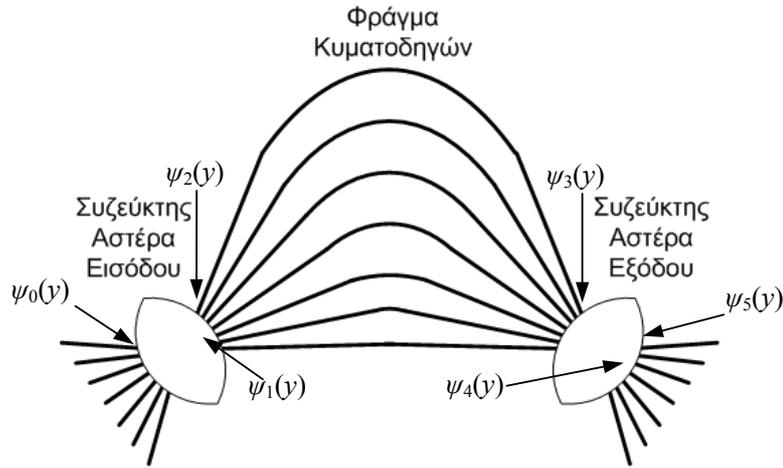
$$C_{in} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_{z_1}(z)\phi^h(z) \quad (3.266)$$

$$C_{out} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_{z_2}(z)\phi^h(z) \quad (3.267)$$

ενώ

$$\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rangle = n(\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_{y_2}^2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_{z_2}^2(z) \quad (3.268)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.262) και τις (3.263)-(3.268) θα έχουμε για το συντελεστή διέγερσης του βασικού τρόπου



Σχήμα 3-22: Γεωμετρία του AWG σε δύο διαστάσεις και τα πεδία που πρέπει να υπολογιστούν

$$D_1 = C_{in} C_{out} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_{z_2}(y) \psi_{out}(y) \quad (3.269)$$

Το μέγεθος $|D_1|^2$ εκφράζει το ποσοστό της ισχύος από το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο διεγείρει τον βασικό τρόπο του κυματοδηγού.

Για να βρούμε το συντελεστή διέγερσης του βασικού τρόπου σε κάθε κυματοδηγό εξόδου του συζεύκτη αστέρων χρησιμοποιούμε το γεγονός πως αν ο τρόπος του κεντρικού κυματοδηγού εξόδου ισούται με $\mathbf{E}_1^{(0)} = \mathbf{y} \psi_{z_2}(z) \psi_{y_2}(y)$ ο βασικός τρόπος του κυματοδηγού m ο οποίος απέχει απόσταση y_m από τον κεντρικό κυματοδηγό θα δίνεται από την $\mathbf{E}_1^{(m)} = \mathbf{y} \psi_{z_2}(z) \psi_{y_2}(y - y_m)$. Αν ονομάσουμε C_m τον συντελεστή διέγερσης του βασικού τρόπου του m κυματοδηγού τότε το C_m θα δίνεται από την

$$C_m = C_{in} C_{out} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_{z_2}(y - y_m) \psi_{out}(y) \quad (3.270)$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για τους τρόπους H_z^{pq} . Ωστόσο, με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση του συντελεστή διέγερσης για την περίπτωση των τρόπων E_z^{pq} , η οποία έχει την ίδια μορφή με την (3.270) με τη διαφορά ότι οι ιδιοσυναρτήσεις $\psi_{z_2}(z)$ και $\psi_{y_2}(y)$ αντιστοιχούν στο βασικό τρόπο E_z^{pq} του οποίου το μαγνητικό πεδίο δίνεται από την $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{y} \psi_{z_2}(z) \psi_{y_2}(y)$ (για τον κεντρικό κυματοδηγό εξόδου). Επίσης οι συντελεστές C_{in} και C_{out} προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε το $\phi^i(z)$ με το $\phi^e(z)$ ενώ οι ιδιοσυναρτήσεις $\psi_{z_1}(z)$ και $\psi_{y_1}(y)$ αντιστοιχούν στο βασικό τρόπο E_z^{pq} του κυματοδηγού εισόδου. Τέλος η συνάρτηση $\psi_{out}(y)$ υπολογίζεται από την (3.259) αν αντικαταστήσουμε το β με β' όπου β' η σταθερά διάδοσης του TM τρόπου που υποστηρίζει ο επίπεδος κυματοδηγός.

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ AWG

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο υπολογίσαμε την ασυμπτωτική έκφραση της συνάρτησης Green στο εσωτερικό των συζευκτών αστέρα του AWG. Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Green για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του AWG. Θα δείξουμε πως κοντά στο κεντρικό μήκος κύματος η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να προσεγγισθεί με μία Gaussian μεταβολή και θα εξετάσουμε την ακρίβεια της παραπάνω προσέγγισης. Επίσης μέσω της θεωρίας συζευγμένων τρόπων θα μελετήσουμε την επίδραση που έχει η σύζευξη των κυματοδηγών φράγματος στα φασματικά χαρακτηριστικά του AWG.

4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΑΓΝΟΩΝΤΑΣ ΤΗ ΣΥΖΕΥΞΗ

Στην παρούσα παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το διδιάστατο μοντέλο για το συζεύκτη αστέρα για να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς ενός AWG. Στο σχήμα 4-1 έχουμε απεικονίσει σε δύο διαστάσεις το AWG και σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\psi_s(y)$ στους κυματοδηγούς εξόδου.

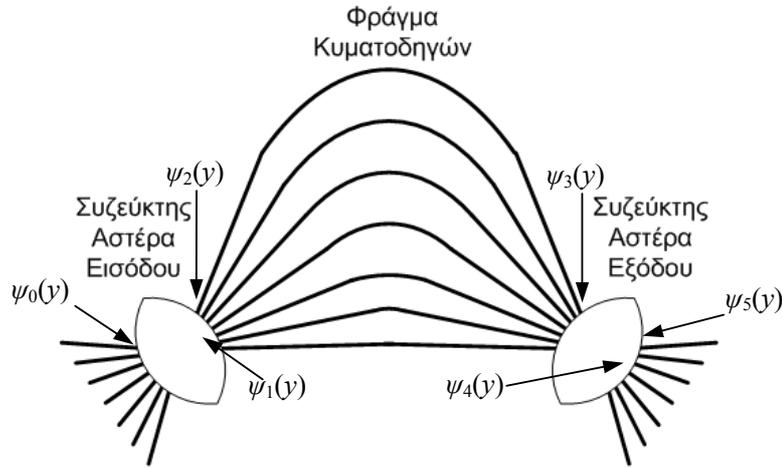
Στην είσοδο του πρώτου συζεύκτη αστέρα του AWG η συνάρτηση $\psi_0(y)$ θα δίνεται από την

$$\psi_0(y) = \sum_{p=-P}^P a_p u_{in}(y - p\Delta y_{in}) \quad (4.1)$$

όπου $u_{in}(y) = \psi_{y1}(y)$ είναι το προφίλ του βασικού τρόπου διάδοσης του κεντρικού κυματοδηγού εισόδου (είτε του E_z^{pq} είτε του H_z^{pq}), a_p ο συντελεστής διέγερσης του κυματοδηγού εισόδου p ενώ Δy_{in} είναι η απόσταση των κέντρων δύο διαδοχικών κυματοδηγών εισόδου (θεωρούμε πως οι κυματοδηγοί ισαπέχουν). Στην έξοδο του πρώτου συζεύκτη αστέρα το πεδίο δίνεται από την

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &\cong \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_s R}} e^{-j\beta_s R} e^{j\pi/4} \sum_p a_p \int dy' u_{in}(y' - p\Delta y_{in}) e^{+j\beta_s \frac{yy'}{R}} \\ &= K \sum_p a_p e^{j\beta_s \frac{p\Delta y_{in} y}{R}} U_{in}\left(\beta_s \frac{y}{R}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου



Σχήμα 4-1: Γεωμετρία του AWG σε δύο διαστάσεις και τα πεδία που πρέπει να υπολογιστούν

$$K = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_s R}} e^{-j\beta_s R} e^{j\pi/4} \quad (4.3)$$

U_{in} ο μετασχηματισμός Fourier του $u_{in}(y)$ ενώ $\beta_s = \beta$ εάν ο τρόπος εισόδου είναι H_z^{pq} και $\beta_s = \beta'$ εάν ο τρόπος εισόδου είναι E_z^{pq} . Για να βρούμε τον συντελεστή διέγερσης C_m του βασικού τρόπου κάθε κυματοδηγού πρέπει να υπολογίσουμε το

$$C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} dy u_g(y - m\Delta y_g) \psi_1(y) = K \sum_p a_p \int dy U_{in} \left(\beta_s \frac{y}{R} \right) u_g(y - m\Delta y_g) e^{j\beta_s \frac{p\Delta y_{in} y}{R}} \quad (4.4)$$

Στην παραπάνω εξίσωση Δy_g είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κυματοδηγών του φράγματος και $u_g(y)$ το προφίλ του βασικού τρόπου των κυματοδηγών του φράγματος. Επειδή η ακτίνα του συζεύκτη αστέρα R είναι πολύ μεγάλη, το $U_{in}(\beta_s y/R)$ θα μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από το $u_g(y)$ και ο συντελεστής C_m θα δίνεται προσεγγιστικά από την

$$C_m \cong K U_{in} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) \sum_p a_p \int dy u_g(y - m\Delta y_g) e^{j\beta_s \frac{p\Delta y_{in} y}{R}} = K U_{in} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) \sum_p a_p U_g \left(\beta_s \frac{p\Delta y_{in}}{R} \right) e^{j\beta_s \frac{p\Delta y_{in} m\Delta y_g}{R}} \quad (4.5)$$

Το πεδίο στην είσοδο του φράγματος κυματοδηγών θα δίνεται από την

$$\psi_2(y) = \sum_m C_m u_g(y - m\Delta y_g) \quad (4.6)$$

Το πεδίο μέσα σε κάθε κυματοδηγό του φράγματος μεταβάλλει τη φάση του ανάλογα με το μήκος $L_m = L_0 + m\Delta L$ του κυματοδηγού. Αν β_w η σταθερά διάδοσης μέσα στον κυματοδηγό, το πεδίο στην έξοδο του φράγματος θα δίνεται από τη σχέση

$$\psi_3(y) = \sum_m C_m u_g(y - m\Delta y_g) e^{-j\beta_w L_m} \quad (4.7)$$

Το πεδίο $\psi_s(y)$ εισέρχεται μέσα στο δεύτερο συζεύκτη αστέρα του AWG και όπως και στην περίπτωση του πρώτου συζεύκτη αστέρα στην έξοδο θα έχουμε

$$\psi_s(y) = \sum_q D_q u_{out}(y - q\Delta y_g) \quad (4.8)$$

όπου $u_{out}(y)$ το προφίλ του τρόπου του κεντρικού κυματοδηγού εξόδου. Ο συντελεστής διέγερσης του κυματοδηγού εξόδου q δίνεται από την

$$D_q \cong KU_g \left(\beta_s \frac{q\Delta y_{out}}{R} \right) \sum_m C_m U_{out} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) e^{j\beta_s \frac{q\Delta y_{out} m\Delta y_g}{R} - j\beta_w L_m} \quad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας την (4.5) στην (4.9) βρίσκουμε για το συντελεστή διέγερσης

$$D_q \cong K^2 U_g \left(\beta_s \frac{q\Delta y_{out}}{R} \right) \sum_{pm} a_p \left\{ U_g \left(\beta_s \frac{p\Delta y_{in}}{R} \right) \times U_{in} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) U_{out} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) e^{j\beta_s \frac{(q\Delta y_{out} + p\Delta y_{in})m\Delta y_g}{R} - j\beta_w L_m} \right\} \quad (4.10)$$

Το D_q που εκφράζει το πλάτος του τρόπου διάδοσης του κυματοδηγού εξόδου q , παρουσιάζει μία μεταβολή με τη συχνότητα, εξαιτίας της σταθεράς διάδοσης του βασικού τρόπου των κυματοδηγών του φράγματος β_w και του συζεύκτη αστέρα β_s . Επειδή το πλάτος του πεδίου στον κυματοδηγού εξόδου q είναι ανάλογο του D_q έπεται πως το D_q είναι ανάλογο της συνάρτησης μεταφοράς της εξόδου q του AWG.

Αν ορίσουμε τον συντελεστή E_m ως

$$E_m = K^2 U_{in} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) U_{out} \left(\beta_s \frac{m\Delta y_g}{R} \right) \quad (4.11)$$

και e_{pq} ως

$$e_{pq} = U_g \left(\beta_s \frac{q\Delta y_{out}}{R} \right) U_g \left(\beta_s \frac{p\Delta y_{in}}{R} \right) \quad (4.12)$$

Αν υποθέσουμε επιπλέον πως μόνο ένας κυματοδηγός εισόδου είναι διεγερμένος, τότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται

$$D_{pq} = e_{pq} \sum_m E_m e^{j\beta_s \frac{(q\Delta y_{out} + p\Delta y_{in})m\Delta y_g}{R} - j\beta_w L_m} \quad (4.13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το δείκτη p στο D_{pq} για να υποδείξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από τον κυματοδηγό εισόδου p στον κυματοδηγό εξόδου q .

4.2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Αν υποθέσουμε πως το AWG είναι συμμετρικό (δηλαδή οι κυματοδηγοί εισόδου και εξόδου έχουν ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά και έχουν τοποθετηθεί με τον ίδιο τρόπο πάνω στους συζεύκτες αστέρα εισόδου και εξόδου) έπεται πως $\Delta y_{in} = \Delta y_{out}$. Επίσης θεωρούμε πως οι κυματοδηγοί φράγματος έχουν μήκος $L_m = L_0 + m\Delta L$, τότε από την (4.13) συνάγουμε ότι

$$D_{pq} = e_{pq} \sum_m E_m \exp\left(-j \frac{2\pi m}{\lambda} \left(n_w \Delta L - \frac{n_s (p+q) \Delta y_g \Delta y}{R} \right)\right) \quad (4.14)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $\beta_s = 2\pi n_s f/c$ και $\beta_w = 2\pi n_w f/c$ με n_s και n_w το δείκτη του βασικού τρόπου του επίπεδου κυματοδηγού και των κυματοδηγών του φράγματος αντίστοιχα και λ το μήκος κύματος. Το μέγιστο του D_{pq} συντελείται όταν

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(n_w \Delta L - \frac{n_s (p+q) \Delta y_g \Delta y}{R} \right) = 2\pi M \quad (4.15)$$

όπου ο ακέραιος M ονομάζεται τάξη του AWG. Για $p=q=0$ το μήκος κύματος $\lambda = \lambda_0(M)$ για το οποίο το D_{00} μεγιστοποιείται δίνεται από την

$$\lambda_0(M) = \frac{n_w \Delta L}{M} \quad (4.16)$$

ενώ στη γενική περίπτωση το μήκος κύματος για το οποίο το D_{pq} μεγιστοποιείται δίνεται από την

$$\lambda_{pq}(M) = \lambda_0(M) - \Delta\lambda(p+q) \quad (4.17)$$

όπου

$$\Delta\lambda = \frac{n_s \Delta y_g \Delta y}{RM} \quad (4.18)$$

Οι συχνότητες $f_{pq}(M)$ για τις οποίες μεγιστοποιείται το D_{pq} δίνονται από την

$$f_{pq}(M) = f_{p+q}(M) = \frac{c}{\lambda_0 - \Delta\lambda(p+q)} \cong f_0 \left(1 + \frac{\Delta f_{ch}}{f_0} (p+q) \right) \quad (4.19)$$

όπου

$$f_0 = f_0(M) = \frac{cM}{n_{eff} \Delta L} \quad (4.20)$$

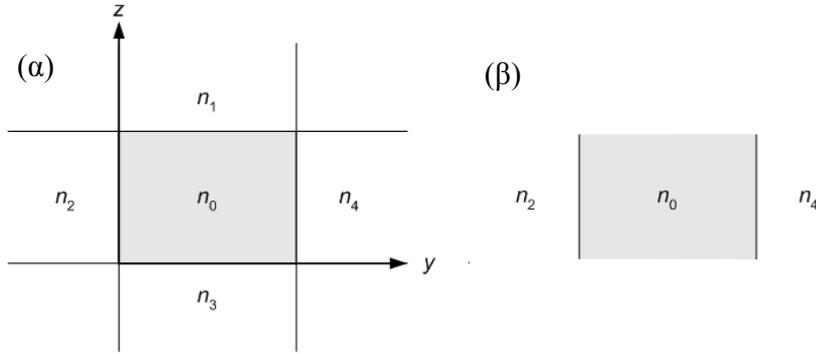
και όπως είδαμε στην παράγραφο 2.8,

$$\Delta f_{ch} = f_0 \frac{n_s \Delta y_g \Delta y}{n_w R \Delta L} \quad (4.21)$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε στις ίδιες εξισώσεις με εκείνες της παραγράφου 2.8, αφού ακολουθήσαμε μία παρόμοια διαδικασία. Χρησιμοποιώντας την (4.14), (4.16), (4.18) βρίσκουμε

$$D_{pq} = e_{pq} \sum_m E_m \exp\left(-j \frac{2\pi m M}{\lambda} (\lambda_0(M) - (p+q)\Delta\lambda)\right) \quad (4.22)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς για $p=q=0$ δίνεται από την εξίσωση



Σχήμα 4-2: Υπολογισμός του προφίλ τρόπου ενός ορθογώνιου κυματοδηγού με την χρήση της μεθόδου ενεργού δείκτη διάθλασης (effective index).

$$D_{00} = e_{00} \sum_m E_m \exp\left(-j \frac{2\pi m M}{\lambda} \lambda_0(M)\right) \quad (4.23)$$

Συγκρίνοντας τις (4.22)-(4.23) βρίσκουμε ότι συνδέονται με την εξής σχέση:

$$D_{pq}(\lambda) = \frac{e_{pq}}{e_{00}} D_{00} \left(\lambda - \frac{p+q}{\lambda_0(M)} \lambda \Delta\lambda \right) \quad (4.24)$$

Κοντά στο $\lambda \approx \lambda_0(M)$ θα έχουμε $\lambda/\lambda_0(M) \approx 1$ και επομένως

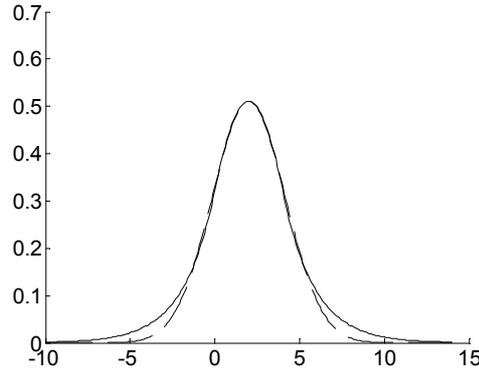
$$D_{pq}(\lambda) = \frac{e_{pq}}{e_{00}} D_{00} (\lambda - (p+q)\Delta\lambda) \quad (4.25)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς D_{pq} προκύπτει από τη μετατόπιση κατά $\Delta\lambda$ της συνάρτησης D_{00} του κεντρικού κυματοδηγού εισόδου και του κεντρικού κυματοδηγού εξόδου και τον πολλαπλασιασμό της με τον παράγοντα e_{pq}/e_{00} .

4.2.2 GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πως για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς D_{pq} μεταξύ της p εισόδου και της q εξόδου ενός AWG αρκεί να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς D_{00} μεταξύ της κεντρικής εισόδου $p=0$ και της κεντρικής εξόδου $q=0$. Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς D_{00} , σύμφωνα με τις (3.11)-(3.13), πρέπει να γνωρίζουμε το προφίλ του βασικού τρόπου διάδοσης των κυματοδηγών φράγματος $u_g(y)$ και των κυματοδηγών εισόδου $u_{in}(y)$ και εξόδου $u_{out}(y)$. Στην περίπτωση όπου οι κυματοδηγοί φράγματος είναι ορθογώνιοι θαμμένοι μέσα σε ένα διηλεκτρικό σώμα ή ραχιαίοι, τότε γνωρίζουμε το προφίλ του βασικού τρόπου τους προσεγγιστικά σε κλειστή μορφή. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του ενεργού δείκτη διάθλασης (effective refractive index) για να υπολογίσουμε το προφίλ του βασικού τρόπου του κυματοδηγού όπως εικονίζεται στο σχήμα 4-2.

Σύμφωνα με την τεχνική του ενεργού δείκτη διάθλασης, στην περίπτωση όπου οι δείκτες διάθλασης των διαφόρων τμημάτων του κυματοδηγού δεν παρουσιάζουν μεγάλες αυξομειώσεις, τότε για να υπολογίσουμε τη μεταβολή του βασικού τρόπου κατά την διεύθυνση z , αγνοούμε τα



Σχήμα 4-3: Προφίλ βασικού τρόπου (συνεχής γραμμή) και Gaussian προσέγγιση (διακεκομμένη γραμμή)

στρώματα με δείκτες διάθλασης n_1 και n_3 στο σχήμα 4-2(a) και υπολογίζουμε το προφίλ του τρόπου θεωρώντας μόνο την διαστρωμάτωση ως προς z , του 4-2(β). Το προφίλ του τρόπου ταυτίζεται με το προφίλ του τρόπου ενός επίπεδου κυματοδηγού με δείκτη διάθλασης ενδιάμεσου στρώματος ίσο με n_0 και δείκτη διάθλασης των πλευρικών στρωμάτων ίσο με n_2 και n_4 . Στο σχήμα 4-3 έχουμε απεικονίσει γραφικά το προφίλ του βασικού τρόπου διάδοσης TE το οποίο λαμβάνεται με τη βοήθεια της μεθόδου του ενεργού δείκτη διάθλασης για $n_2=n_4=1.49$ και $n_0=1.5$, μήκος κύματος $\lambda=1.55\mu\text{m}$ και πάχος ενδιάμεσου στρώματος $d=4\mu\text{m}$. Μαζί με το προφίλ του τρόπου αντιπαραβάλλουμε με διακεκομμένες γραμμές την προσέγγιση του με μία Gaussian $\exp(-y^2/w_0^2)$ της οποίας το ενεργό πλάτος w_e ορίζεται από την

$$w_e = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(y)|^2 dy}{\max\{|u(y)|^2\}} = w_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (4.26)$$

και τίθεται ίσο με το ενεργό πλάτος του τρόπου διάδοσης του κυματοδηγού. Στην περίπτωση ενός επίπεδου κυματοδηγού το w_e δίνεται από την

$$w_e = \frac{1}{2} d \left(1 + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} \right) \quad (4.27)$$

όπου

$$v_i = \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_i^2 - n_{eff}^2} \quad (4.28)$$

και n_{eff} ο ενεργός δείκτης διάθλασης του επίπεδου κυματοδηγού. Αν $n_2 \cong n_4$ τότε αντί της (4.27) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εμπειρική σχέση [SD96]

$$w_e \cong d \left(0.5 + \frac{1}{V - 0.6} \right) \quad (4.29)$$

όπου

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_0^2 - n_2^2} \quad (4.30)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.26) και (4.27) βρίσκουμε $w_0 \approx 3.04 \mu\text{m}$ για την περίπτωση του επίπεδου κυματοδηγού που εξετάζουμε. Από το σχήμα 3.24 παρατηρούμε πως η Gaussian προσεγγίζει πολύ καλά το προφίλ του τρόπου διάδοσης. Η προσέγγιση αυτή παραμένει ικανοποιητική και για τους τρόπους TM, χρησιμοποιώντας πάλι τις (4.27)-(4.30), αρκεί η διαφορά μεταξύ των δεικτών διάθλασης των στρωμάτων να είναι μικρή. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την Gaussian προσέγγιση για το βασικό τρόπο διάδοσης ώστε να υπολογίσουμε τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς.

4.2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Η μεγάλη ευκολία με την χρήση της Gaussian προσέγγισης οφείλεται στο γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier του προφίλ του τρόπου διάδοσης, που απαιτείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς του AWG, είναι γνωστός σε αναλυτική μορφή. Αν υποθέσουμε πως

$$u_{in}(y) = u_{out}(y) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_1} \exp(-y^2 / w_1^2) \quad (4.31)$$

$$u_g(y) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_2} \exp(-y^2 / w_2^2) \quad (4.32)$$

με $w_1(2/\pi)^{1/2}$ και $w_2(2/\pi)^{1/2}$ τα ενεργά πλάτη των $u_{in}(y)$ και $u_g(y)$. Ο μετασχηματισμός Fourier των (4.31),(4.32) δίνεται από τις

$$U_{in}\left(\beta_s \frac{y}{R}\right) = U_{out}\left(\beta_s \frac{y}{R}\right) \cong \exp\left(-\frac{\beta_s^2 y^2 w_1^2}{4R^2}\right) \quad (4.33)$$

$$U_g\left(\beta_s \frac{y}{R}\right) \cong \exp\left(-\frac{\beta_s^2 y^2 w_2^2}{4R^2}\right) \quad (4.34)$$

και χρησιμοποιώντας τις (4.11) και (4.12) βρίσκουμε

$$E_m = K^2 \exp\left(-\frac{\beta_s^2 w_1^2 m^2 \Delta y_g^2}{2R^2}\right) \quad (4.35)$$

$$e_{pq} = \exp\left(-\frac{\beta_s^2 (p^2 + q^2) w_2^2 \Delta y_{in}^2}{4R^2}\right) \quad (4.36)$$

Συνήθως κανονικοποιούμε τους τρόπους διάδοσης έτσι ώστε για τους συντελεστές E_m να ισχύει

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m = 1 \quad (4.37)$$

Ορίζουμε τον συντελεστή a ως:

$$a = \frac{\beta_s^2 w_1^2 \Delta y_g^2}{2R^2} \quad (4.38)$$

και χρησιμοποιώντας την (4.35) και (4.37) οι συντελεστές E_m θα δίνονται από τη σχέση:

$$E_m = \frac{1}{E} \exp(-am^2) \quad (4.39)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $D_{00}(\lambda)$ μεταξύ της κεντρικής εισόδου και της κεντρικής εξόδου του AWG δίνεται από την

$$D_{00} = \sum_m E_m \exp\left(-j \frac{2\pi m}{FSR} f\right) = \sum_m E_m \exp\left(-j \frac{2\pi m}{FSR} \nu\right) \quad (4.40)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (4.23), αντικαθιστώντας

$$FSR = \frac{f_0(M)}{M} = \frac{c}{n_w \Delta L} \quad (4.41)$$

και $e_{00}=1$ από την (4.36). Η συχνότητα ν δίνεται από την σχέση $\nu=f_0(M)$ και εκφράζει την απομάκρυνση από την κεντρική συχνότητα του AWG. Παρατηρούμε πως $D_{00}(f+FSR)=D_{00}(f)$, δηλαδή η ποσότητα FSR εκφράζει την ελεύθερη φασματική περιοχή του AWG (για τον λόγο αυτό άλλωστε συμβολίζεται με τα αρχικά των λέξεων Free Spectral Range – Ελεύθερη Φασματική Περιοχή).

4.2.3.i Μορφή της κεντρικής συνάρτησης μεταφοράς $D_{00}(\lambda)$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως για μεγάλο αριθμό $M_w=2P+1$ κυματοδηγών φράγματος και εάν υποθέσουμε ότι $E_p=E_P \ll E_0$ τότε, σύμφωνα με τον ορισμό του ολοκληρώματος κατά Riemann, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα στην (4.40) με ένα ολοκλήρωμα

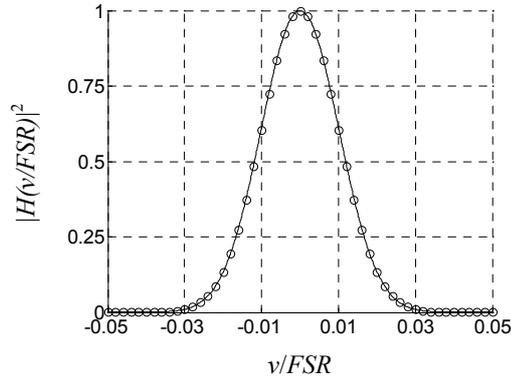
$$D_{00}(\nu) \cong \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} dm \exp(-am^2) \exp\left(-j \frac{2\pi m}{FSR} \nu\right) = \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{a FSR^2}\right) \quad (4.42)$$

Παρατηρούμε πως εξαιτίας της κανονικοποίησης (4.37) έχουμε $D_{00}(0)=1$. Αποδείξαμε επομένως πως η συνάρτηση μεταφοράς του AWG μπορεί σε μία πρώτη προσέγγιση να θεωρηθεί Gaussian. Για να βρούμε το εύρος μισής ισχύος της $D_{00}(\nu)$ λύνουμε την εξίσωση $|D_{00}(B/2)|^2=1/2$ από την οποία προκύπτει

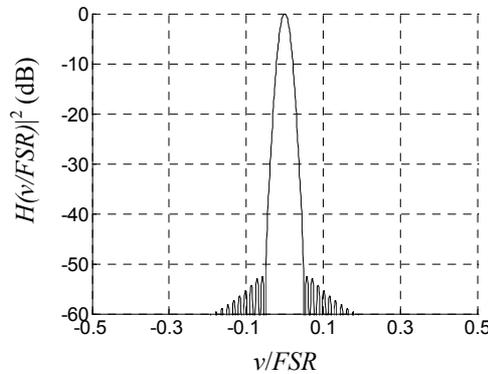
$$B = \frac{\sqrt{2a \ln 2} FSR}{2\pi} = \frac{\beta_s w_1 \Delta y_g \sqrt{\ln 2}}{\pi R c n_w \Delta L} \quad (4.43)$$

Για να ισχύει η (4.42) ο συντελεστής a που δίνεται από την (4.38) πρέπει να έχει τέτοια τιμή ώστε $\exp(-aP^2) \ll 1$. Η προαναφερόμενη επιλογή εξασφαλίζει επίσης ότι οι απώλειες ισχύος στο AWG θα είναι μικρές. Πράγματι, αν το E_p δεν ήταν αρκετά μικρότερο από το E_0 , τότε ένα σημαντικό τμήμα της οπτικής ισχύος δεν θα έφτανε τον δεύτερο συζεύκτη αστέρα, εφόσον οι συντελεστές E_m καθορίζουν την ισχύ του φωτός από το συζεύκτη αστέρα που διέρχεται από τον κυματοδηγό φράγματος m . Επομένως στα AWG το a έχει τέτοια τιμή ώστε το E_p/E_0 να είναι αρκετά μικρότερο της μονάδας. Για παράδειγμα, εάν $E_p/E_0=0.01$, τότε $\exp(-aP^2)=0.01$, οπότε $a=\ln(100)/P^2 \cong 4/P^2 \cong 16/M_w^2$ (για μεγάλες τιμές του M_w). Άρα, ο αριθμός των κυματοδηγών καθορίζει το συντελεστή a και επομένως και το κανονικοποιημένο εύρος μισής ισχύος B/FSR :

$$\frac{B}{FSR} \cong \frac{4\sqrt{2 \ln 2}}{\pi M_w} \cong \frac{1.5}{M_w} \quad (4.44)$$



Σχήμα 4-4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος $|H(v)|^2$ (συνεχής γραμμές) για $M_w=64$, $a=0.039$ και η Gaussian προσέγγιση της (μικροί κύκλοι)



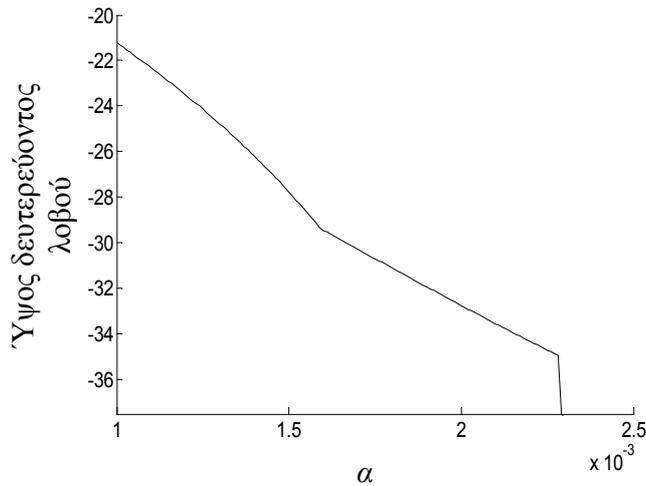
Σχήμα 4-5: Λογαριθμική Γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος $|H(v)|^2$ για $M_w=64$ και $a=0.039$

Στο σχήμα 4-4 έχουμε παραστήσει γραφικά τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύος $D_{00}(v/FSR)$ που προκύπτει από την (4.40) για $M_w=64$, $a=16/M_w^2=0.039$ καθώς και την Gaussian προσέγγιση της (με κύκλους). Παρατηρούμε πως η Gaussian προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια τη συνάρτηση μεταφοράς κοντά στην κεντρική συχνότητα $v=0$. Το κανονικοποιημένο εύρος μισής ισχύος της συνάρτησης μεταφοράς του σχήματος 4-4 ισούται με 0.0238, ενώ η σχέση (4.34) δίνει κανονικοποιημένο εύρος μισής ισχύος ίσο με 0.0234, αρκετά κοντά στην πραγματική του τιμή.

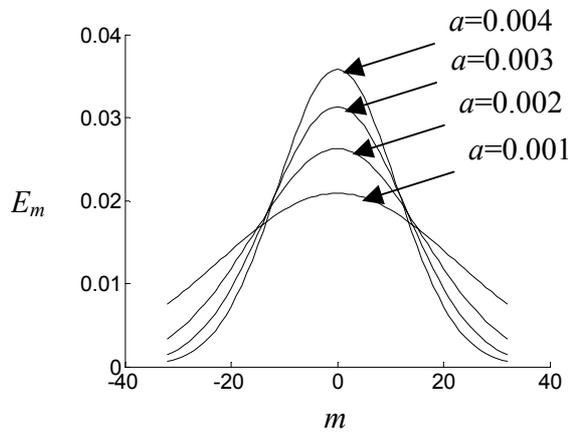
Στο σχήμα 4-5 έχουμε παραστήσει γραφικά τη συνάρτηση μεταφοράς ισχύος (4.40) σε λογαριθμική κλίμακα. Οι δευτερεύοντες λοβοί έχουν πολύ χαμηλή στάθμη και φυσικά δεν περιγράφονται από την Gaussian προσέγγιση (4.42). Συνήθως η απόσταση μεταξύ των καναλιών καθορίζεται από το εύρος -40dB , B_{40} , του κεντρικού λοβού της συνάρτησης μεταφοράς. Χρησιμοποιώντας την Gaussian προσέγγιση έχουμε

$$\frac{B_{40}}{FSR} = \frac{\sqrt{8a \ln 10}}{\pi} \cong \frac{4\sqrt{8 \ln 10}}{\pi M_w} \cong \frac{5.464}{M_w} \quad (4.45)$$

Το εύρος -40dB της συνάρτησης μεταφοράς του σχήματος 4-5 ισούται με 0.0854 που βρίσκεται αρκετά κοντά στην τιμή 0.0880 που δίνει η (4.45).



Σχήμα 4-6: Μεταβολή του ύψους των δευτερευόντων λοβών με το συντελεστή α



Σχήμα 4-7: Η κατανομή E_m για τέσσερις τιμές του α και $M_w=65$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των κυματοδηγών φράγματος M_w αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη παράμετρο σχεδίασης αφού καθορίζει και τον αριθμό των καναλιών N_{ch} που μπορεί να διαχωρίσει το AWG,

$$N_{ch} = \frac{FSR}{B_{40}} \cong \frac{M_w}{5.464} \quad (4.46)$$

Υπενθυμίζεται πως η (4.46) ισχύει όταν έχουμε επιλέξει $a \cong 16/M_w^2$, και πως διαφορετικές τιμές του a θα έχουν ως αποτέλεσμα διαφορετική σχέση μεταξύ N_{ch} και M_w . Μικρότερες τιμές του a επιτυγχάνουν μικρότερο λόγο M_w/N_{ch} , κάτι που σημαίνει πως χρειάζεται μικρότερος αριθμός κυματοδηγών φράγματος έτσι ώστε το AWG να αποπολυπλέκει τον ίδιο αριθμό καναλιών.

Ωστόσο, το a δεν μπορεί να γίνει πολύ μικρό καθώς τότε αυξάνει το ύψος των δευτερευόντων λοβών της συνάρτησης μεταφοράς $D_{00}(\lambda)$. Η συμπεριφορά αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 4-6 όπου έχουμε παραστήσει γραφικά το ύψος των δευτερευόντων λοβών σε συνάρτηση με τον συντελεστή α για $M_w=65$. Οι τιμές του α κυμαίνονται από 0.001 έως 0.004. Στο σχήμα 4-7 έχουμε παραστήσει γραφικά την κατανομή των συντελεστών E_m για $\alpha=\{0.001,0.002,0.003,0.004\}$. Από τα σχήματα 4-7 και 4-6 παρατηρούμε πως το μέγεθος των δευτερευόντων λοβών εξαρτάται από τη μορφή των οι συντελεστών E_m . Η σχέση μεταξύ της

μορφής των E_m και του ύψους των δευτερευόντων λοβών μπορεί να ερμηνευθεί βάσει του γεγονότος ότι η συνάρτηση μεταφοράς $D_{00}(v)$ είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier των E_m σύμφωνα με την (4.40). Στο $m=\pm P$ τα E_m παρουσιάζουν απότομη μετάβαση από την τιμή E_P στο 0, όταν $\alpha=0.001$. Επομένως αναμένουμε πως ο μετασχηματισμός Fourier τους και άρα η $D_{00}(v)$ θα έχουν υψηλότερες συνιστώσες μακριά από το $v=0$. Το φαινόμενο της ανύψωσης των δευτερευόντων λοβών μακριά από το $v=0$ με την αύξηση του a οφείλεται στην ολοένα και πιο απότομη μετάβαση από το E_P στο 0, που παρουσιάζουν οι συντελεστές E_m στα σημεία $m=\pm P$.

4.2.3.ii Ομοιομορφία καναλιών του AWG

Η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της p εισόδου και q εξόδου προκύπτει από την (4.25) που γράφεται και ως

$$D_{pq}(f) = \frac{e_{pq}}{e_{00}} D_{00}(f + (p+q)\Delta f_{ch}) \quad (4.47)$$

Ο συντελεστής e_{pq}/e_{00} καθορίζει την ομοιομορφία των αποπολυπλεγμένων καναλιών του AWG στις εξόδους του και δίνεται από την

$$\frac{e_{pq}}{e_{00}} = e_{pq} = \exp\left(-\frac{\beta_s^2(p^2 + q^2)w_2^2\Delta y_{in}^2}{4R^2}\right) \quad (4.48)$$

και χρησιμοποιώντας την (4.32) λαμβάνουμε

$$\frac{e_{pq}}{e_{00}} = e_{pq} = \exp\left(-a\frac{w_2^2\Delta y_{in}^2}{2w_1^2\Delta y_g^2}(p^2 + q^2)\right) = \exp\left(-\frac{8w_2^2\Delta y_{in}^2}{M_w^2w_1^2\Delta y_g^2}(p^2 + q^2)\right) \quad (4.49)$$

αφού θέσαμε $e_{00}=1$ και $\alpha=16/M_w^2$. Σύμφωνα με την (4.49) η απόδοση e_{pq}/e_{00} μειώνεται όσο αυξάνεται το p^2+q^2 , δηλαδή όσο απομακρυνόμαστε από τον κεντρικό κυματοδηγό εισόδου ή τον κεντρικό κυματοδηγό εξόδου. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να λάβουν τα p και q δεν ξεπερνάει το $N_{ch}/2$ (αφού ο αριθμός των κυματοδηγών εισόδου/εξόδου πρέπει να ισούται με τον αριθμό των καναλιών N_{ch}), οπότε

$$\left(\frac{e_{pq}}{e_{00}}\right)_{\min} = \exp\left(-\frac{aw_2^2\Delta y_{in}^2N_{ch}^2}{2w_1^2\Delta y_g^2M_w^2}\right) \cong \exp\left(-0.27\frac{w_2^2\Delta y_{in}^2}{w_1^2\Delta y_g^2}\right) \quad (4.50)$$

όπου αντικαταστήσαμε την (4.41) στο τρίτο μέλος της (4.50). Άρα στη χειρότερη περίπτωση η διαφορά ισχύος μεταξύ της κεντρικής συνάρτησης μεταφοράς και της συνάρτησης μεταφοράς ενός άλλου συνδυασμού εισόδου/εξόδου θα είναι

$$T_{\min} = \exp\left(-\frac{aw_2^2\Delta y_{in}^2N_{ch}^2}{w_1^2\Delta y_g^2M_w^2}\right) \cong \exp\left(-0.54\frac{w_2^2\Delta y_{in}^2}{w_1^2\Delta y_g^2}\right) \quad (4.51)$$

Σύμφωνα με την (4.51) η ομοιομορφία των καναλιών βελτιώνεται όσο αυξάνεται η πυκνότητα $\Delta y_{in}/w_1$ των κυματοδηγών εισόδου και όσο μειώνεται η πυκνότητα $\Delta y_g/w_2$ των κυματοδηγών εξόδου.

4.2.4 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ GAUSSIAN ΜΟΝΤΕΛΟ

Η Gaussian προσέγγιση που εφαρμόσαμε στις προηγούμενες παραγράφους προσφέρει έναν κατ' αρχήν υπολογισμό των γεωμετρικών χαρακτηριστικών ενός AWG βάση των απαιτήσεων ως προς τα φασματικά χαρακτηριστικά του. Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ένα AWG με απόσταση καναλιών ίση με Δf_{ch} , πλήθος καναλιών ίσο με N_{ch} , κεντρική συχνότητα ίση με f_0 και ελάχιστη απόδοση ίση με T_{min} . Επίσης θεωρούμε πως οι κυματοδηγοί εισόδου και φράγματος έχουν δεδομένα χαρακτηριστικά. Τα μεγέθη που πρέπει να υπολογίσουμε είναι:

- η ακτίνα R του συζεύκτη αστέρα
- ο αριθμός των κυματοδηγών φράγματος M_w
- η διαφορά μήκους και η απόσταση μεταξύ δύο κυματοδηγών φράγματος ΔL και Δy_g ,
- η απόσταση μεταξύ δύο κυματοδηγών εισόδου Δy_{in}

Για να υπολογίσουμε τη διαφορά μήκους μεταξύ των δύο κυματοδηγών, αρκεί να υπολογίσουμε την ελεύθερη φασματική περιοχή FSR του AWG που απαιτούμε. Συνήθως επιλέγουμε την FSR ώστε να χωράει N_{ch} κανάλια ακριβώς, δηλαδή

$$FSR = N_{ch} \Delta f_{ch} \quad (4.52)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.41) έχουμε

$$\Delta L = \frac{c}{n_w FSR} \quad (4.53)$$

όπου n_w είναι ο ενεργός δείκτης διάθλασης του κυματοδηγού του φράγματος που υπολογίζεται από τη γεωμετρία του και θεωρείται γνωστός. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την (4.45) για να υπολογίσουμε την τιμή του συντελεστή a του AWG. Σύμφωνα με την (4.45)

$$a = \frac{\pi^2}{8 \ln 10} \left(\frac{FSR}{B_{40}} \right)^2 \quad (4.54)$$

όπου μπορούμε να θέσουμε $B_{40} = \Delta f_{ch}$ που συνεπάγεται ότι, θεωρητικά, η απομόνωση των καναλιών θα είναι καλύτερη από -40dB (αν το ύψος των δευτερευόντων λοβών δεν ξεπερνά τα -40dB). Ο αριθμός των κυματοδηγών M_w επιλέγεται ώστε η κατανομή E_m να μην παρουσιάζει έντονη ασυνέχεια στις άκρες της οι οποίες θα ανεβάσουν το ύψος των δευτερευόντων λοβών. Για το σκοπό αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς D_{00} για αρκετές τιμές του M_w

$$D_{00}(f) = \frac{\sum_{m=-M_w/2-1}^{M_w/2+1} e^{-am^2} \exp\left(-j \frac{2\pi m}{FSR} f\right)}{\sum_{m=-M_w/2-1}^{M_w/2+1} e^{-am^2}} \quad (4.55)$$

και να επιλέξουμε αυτήν που οδηγεί σε ύψος δευτερευόντων λοβών μικρότερο από -40dB. Ωστόσο, όπως είδαμε και προηγουμένως η επιλογή,

$$M_w = \frac{4}{\sqrt{a}} \quad (4.56)$$

οδηγεί σε χαμηλές τιμές δευτερευόντων λοβών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποφύγουμε τη διαδικασία υπολογισμού των δευτερευόντων λοβών της (4.55). Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των κυματοδηγών συνδέεται άμεσα με τον αριθμό των καναλιών βάση της (4.45).

Ο καθορισμός του συντελεστή a θέτει έναν περιορισμό στις δυνατές τιμές των R και Δy_g και συγκεκριμένα σύμφωνα με την (4.32), στο λόγο τους $\Delta y_g/R$

$$\frac{\Delta y_g}{R} = \frac{\sqrt{2a}}{\beta_s w_1} = \frac{c\sqrt{2a}}{2\pi f_0 n_s w_1} \quad (4.57)$$

Η ελάχιστη τιμή του Δy_g καθορίζεται από τη σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος καθώς και από τις απώλειες στην επαφή μεταξύ του φράγματος και του συζεύκτη αστέρα εισόδου. Αν η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών Δy_g είναι μεγάλη τότε ένα τμήμα της προσπίπτουσας δέσμης δεν διεγείρει τους κυματοδηγούς και επομένως αυξάνονται οι απώλειες του AWG. Αντίθετα, αν οι κυματοδηγοί έχουν τοποθετηθεί κοντά ο ένας στον άλλο τότε οι δευτερευόντες λοβοί ανυψώνονται εξαιτίας του φαινομένου της σύζευξης κυματοδηγών. Δυστυχώς δεν υπάρχει τρόπος να καταλήξουμε σε μία απλή σχέση μεταξύ του ύψους των δευτερευόντων λοβών, της τιμής των απωλειών και της απόστασης μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος καθώς μία τέτοια ανάλυση προϋποθέτει την εφαρμογή της θεωρίας σύζευξης κυματοδηγών όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο. Σε πρακτικά AWG η απόσταση μεταξύ των κέντρων των πυρήνων των κυματοδηγών είναι της τάξης της διαμέτρου του πυρήνα τους. Επομένως δεδομένης της τιμής του Δy_g , μπορούμε από την (4.57) να υπολογίσουμε την ακτίνα R του συζεύκτη αστέρα που απαιτείται ώστε ο συντελεστής a να έχει την τιμή που υπολογίσαμε από την (4.54).

Για να προσδιορίσουμε την απόσταση των κυματοδηγών εξόδου χρησιμοποιούμε την σχέση (4.51) που συνδέει την ελάχιστη σχετική διαφορά ισχύος T_{min} μεταξύ δύο συνδυασμών εισόδου-εξόδου του AWG. Χρησιμοποιώντας την (3.321) λαμβάνουμε

$$\Delta y_{in} = \sqrt{\frac{\ln|T_{min}|}{a} \frac{w_1 \Delta y_g M_w}{w_2 N_{ch}}} \quad (4.58)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παρέχουν τη δυνατότητα ενός προσεγγιστικού υπολογισμού των γεωμετρικών παραμέτρων του AWG σε συνάρτηση με τα επιθυμητά του χαρακτηριστικά.

4.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΧΩΡΙΣ ΤΗ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε πως η συνάρτηση μεταφοράς του AWG μπορεί να προσεγγισθεί από μία Gaussian της οποίας το εύρος μισής ισχύος δίνεται από την (4.43). Η Gaussian αυτή προσέγγιση της συνάρτησης μεταφοράς είναι απόρροια της Gaussian προσέγγισης του τρόπου διάδοσης των κυματοδηγών φράγματος. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε μία έκφραση που επιτρέπει τον προσεγγιστικό υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς του AWG χωρίς την Gaussian προσέγγιση. Έως ένα σημείο τούτο μπορεί να λάβει χώρα βάση των σχέσεων (4.11) και (4.13) σύμφωνα με τις οποίες η κεντρική συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από την

$$D_{00}(f) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_{in}(m\Omega)U_{out}(m\Omega) \exp\left(j \frac{2\pi m}{FSR} \nu\right) \quad (4.59)$$

όπου

$$\Omega = \frac{\beta_s}{R} \Delta y_g \quad (4.60)$$

Το άθροισμα στην (4.59) προσεγγίζεται από ένα ολοκλήρωμα

$$D_{00}(f) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dx U_{in}(x) U_{out}(x) \exp\left(j \frac{2\pi x}{FSR\Omega} v\right) \quad (4.61)$$

Σύμφωνα με την (4.61) η $D_{00}(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου των συναρτήσεων $U_{in}(x)$ και $U_{out}(x)$. Επομένως θα δίνεται από το συγκερασμό των $u_{in}(y)$ και $u_{out}(y)$ δηλαδή:

$$D_{00}(f) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dy u_{in}(y) u_{out}\left(-y - \frac{2\pi}{\Omega} \frac{v}{FSR}\right) dy \quad (4.62)$$

Σύμφωνα με την (4.62) η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται προσεγγιστικά από το συγκερασμό του προφίλ των τρόπων διάδοσης εισόδου και εξόδου. Στην περίπτωση όπου οι τρόποι διάδοσης προσεγγιστούν από μία Gaussian, ο συγκερασμός της (4.62) μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή δίνοντας

$$D_{00}(f) = \exp\left(-\frac{2\pi^2 v^2}{\Omega^2 w_1^2 FSR^2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{a FSR^2}\right) \quad (4.63)$$

Καταλήγουμε δηλαδή σε μία Gaussian προσέγγιση όπως είδαμε και στην παράγραφο 4.1

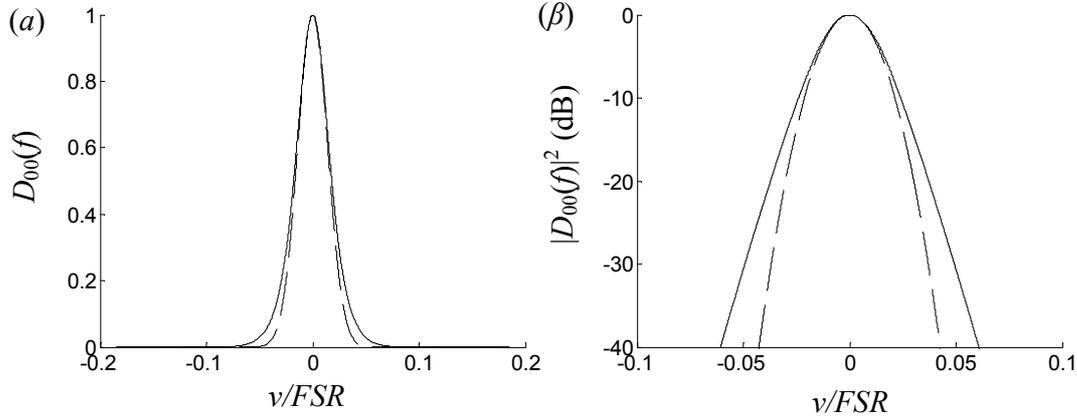
4.3.1 ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΗΣ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Η εξίσωση (4.61) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διερευνήσουμε πόσο καλά προσεγγίζει τη συνάρτηση μεταφοράς η Gaussian (4.63). Αν υποθέσουμε πως το προφίλ του βασικού τρόπου διάδοσης u_{in} είναι συμμετρικό και πως $u_{out}=u_{in}$ τότε έπεται πως η (4.62) γράφεται ως εξής:

$$D_{00}(f) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dy u_{in}(y) u_{in}\left(y + \frac{\pi w_1 \sqrt{2}}{a} \frac{v}{FSR}\right) dy \quad (4.64)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως $\Omega=(2a)^{1/2}/w_1$. Για την περίπτωση όπου ο δείκτης διάθλασης του πυρήνα και του μανδύα του κυματοδηγού του φράγματος είναι $n_1=1.5$ και $n_2=1.49$ ενώ η οριζόντια διάσταση του πυρήνα είναι $d=4\mu\text{m}$, τότε στο $\lambda=1.55\mu\text{m}$ έχουμε $w_1=3.04\mu\text{m}$ όπως είδαμε και στην παράγραφο 4.1. Αν υποθέσουμε πως $a=0.0039$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.64) για να διαπιστώσουμε την ακρίβεια της Gaussian προσέγγισης της συνάρτησης μεταφοράς του AWG. Στο σχήμα 4-8 έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τη συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνουμε χρησιμοποιώντας το προφίλ του τρόπου διάδοσης TE που υπολογίζουμε βάση της μεθόδου ενεργού δείκτη διάθλασης (συνεχείς γραμμές) και της Gaussian προσέγγισης (διακεκομμένες γραμμές) τόσο σε κανονική όσο και σε λογαριθμική κλίμακα.

Από το σχήμα 4-8 παρατηρούμε πως η Gaussian προσέγγιση περιγράφει με ακρίβεια τη συνάρτηση μεταφοράς εντός του 3dB-εύρους της αλλά δεν προσεγγίζει καλά τον κύριο λοβό της συνάρτησης μεταφοράς για τιμές κάτω από τα -3dB. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι ο κύριος λοβός της Gaussian είναι στενότερος από ότι της συνάρτησης μεταφοράς που προβλέπει η (4.64), κάτι που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη διαδικασία σχεδιασμού. Στο συγκεκριμένο



Σχήμα 4-8: Ακρίβεια της Gaussian προσέγγισης σε (α) κανονική και (β) λογαριθμική κλίμακα για $\alpha=0.0039$, $n_1=1.5$, $n_2=1.49$ και $d=4\mu\text{m}$

παράδειγμα, η Gaussian προσέγγιση προβλέπει ότι η συνάρτηση μεταφοράς πέφτει κατά -40dB στο σημείο $v/FSR \approx 0.042$ ενώ η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει από την (4.64) έχει πέσει περίπου κατά -30dB στο ίδιο σημείο. Επομένως η Gaussian προσέγγιση υποτιμάει τη διαφωνία του AWG, αλλά όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η διαφωνία στα AWG είναι ούτως ή άλλως υψηλότερη λόγω των σφαλμάτων φάσης στους κυματοδηγούς.

4.4 ΣΥΖΕΥΞΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

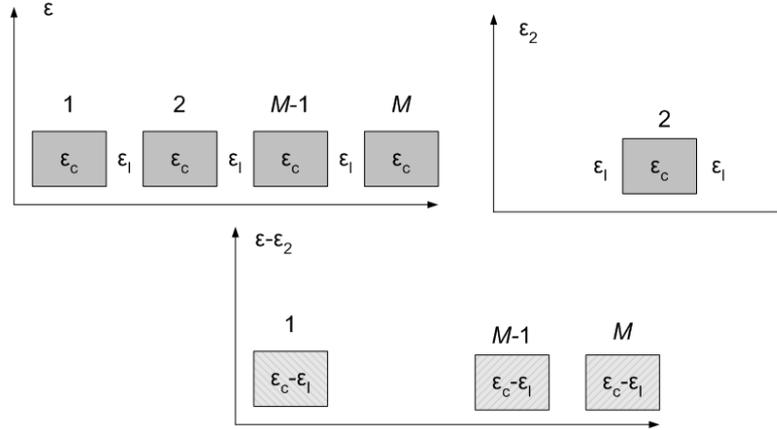
Στις προηγούμενες παραγράφους υποθέσαμε πως οι κυματοδηγοί φράγματος δεν επηρεάζουν ο ένας τον άλλο και πως ο βασικός τρόπος διαδίδεται χωρίς καμία επίδραση της φάσης και του πλάτους του, λόγω της σύζευξης των κυματοδηγών. Αυτή η παραδοχή απέχει αρκετά από την πραγματικότητα και εάν οι πυρήνες των κυματοδηγών έχουν τοποθετηθεί κοντά ο ένας με τον άλλο, τότε ενδεχομένως η σύζευξη των κυματοδηγών να επηρεάσει τις επιδόσεις του AWG.

Στα AWG η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών μεταβάλλεται, όπως μπορούμε να δούμε από το σχήμα 3-21. Καθώς οι κυματοδηγοί απομακρύνονται από τον πρώτο συζεύκτη αστέρα, η μεταξύ τους απόσταση αυξάνει. Στα AWG η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών μακριά από τους συζεύκτες αστέρα, στο σημείο όπου αυτοί παρουσιάζουν καμπυλότητα, είναι πολύ μεγάλη και το φαινόμενο της σύζευξης μπορεί να αγνοηθεί. Επομένως το φαινόμενο της σύζευξης πρέπει να ληφθεί υπόψη μονάχα στην έξοδο του πρώτου συζεύκτη αστέρα και στην είσοδο του δεύτερου συζεύκτη αστέρα.

Για να μελετήσουμε τις επιπτώσεις της σύζευξης μεταξύ των δύο ή περισσότερων κυματοδηγών, χρησιμοποιούμε τη θεωρία συζευγμένων τρόπων (coupled mode theory) [HH89], [SL83, §27]. Η θεωρία σύζευξης των κυματοδηγών απορρέει από το θεώρημα της αμοιβαιότητας και στην περίπτωση πολλών μονότροπων κυματοδηγών επιτρέπει τον υπολογισμό των πλατών $C_m(z)$ του βασικού τρόπου του κάθε κυματοδηγού σε κάθε σημείο z από τα πλάτη $C_m(0)$ των τρόπων στην αρχή των κυματοδηγών ($z=0$) βάση της διαφορικής εξίσωσης [HH89]:

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathbf{P}}{dz} \mathbf{C} + \mathbf{P} \frac{d\mathbf{C}}{dz} = -j\mathbf{H}\mathbf{C} \quad (4.65)$$

Στην εξίσωση (4.65) το διάνυσμα $\mathbf{C}=(C_1, \dots, C_M)$ απαρτίζεται από τα πλάτη των βασικών τρόπων των κυματοδηγών ενώ οι πίνακες \mathbf{P} και \mathbf{H} έχουν στοιχεία



Σχήμα 4-9: Αναπαράσταση σε δύο διαστάσεις της επιδεκτικότητας ε της συστοιχίας των κυματοδηγών, της επιδεκτικότητας ε_2 καθώς και της διαφοράς $\varepsilon - \varepsilon_2$

$$H_{ij} = P_{ij} \beta_j + \kappa_{ij} \quad (4.66)$$

$$P_{ij} = \frac{1}{4} \int (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_j^* + \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_i^*) \mathbf{z} dA \quad (4.67)$$

με

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{4} \omega \int (\varepsilon - \varepsilon_j) \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j dA \quad (4.68)$$

όπου τα \mathbf{H}_i και \mathbf{E}_i παριστάνουν το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο του βασικού τρόπου του κυματοδηγού i ενώ τα ε και ε_j παριστάνουν αντίστοιχα τη μεταβολή του δείκτη διάθλασης για ολόκληρη τη διάταξη της συστοιχίας των κυματοδηγών και του j κυματοδηγού όπως φαίνεται και στο σχήμα 4-9 (για $j=2$).

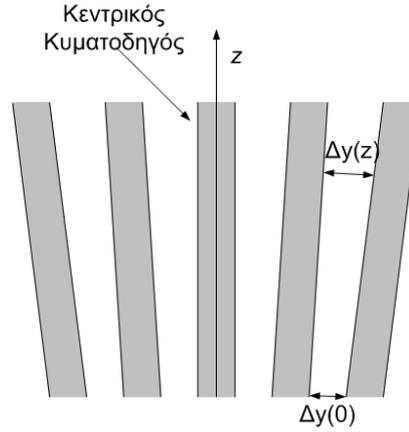
Η εξίσωση (4.65) ισχύει στη γενική περίπτωση όπου οι αποστάσεις και η διατομή των κυματοδηγών μεταβάλλονται. Στην περίπτωση του AWG, μεταβάλλεται μόνο η μεταξύ τους απόσταση και τούτο συμβαίνει με πολύ αργό ρυθμό. Επομένως η παράγωγος $d\mathbf{P}/dz$ στην (4.65) θα έχει πολύ μικρή τιμή και επομένως μπορεί να αμεληθεί σε μία πρώτη προσέγγιση. Επίσης, θα θεωρήσουμε πως όλοι οι κυματοδηγοί είναι παρόμοιοι και επομένως θα έχουμε $\beta_j = \beta$ και $\mathbf{H} = \beta \mathbf{P} + \mathbf{K}$ όπου $\mathbf{K} = [\kappa_{ij}]$ ενώ η εξίσωση (4.65) θα γραφεί ως

$$\mathbf{P} \frac{d\mathbf{C}}{dz} = -j(\beta \mathbf{P} + \mathbf{K})\mathbf{C} \quad (4.69)$$

Αν θέσουμε $\mathbf{c} = \mathbf{C} \exp(j\beta z)$ και πολλαπλασιάσουμε αμφότερα τα μέλη με \mathbf{P}^{-1} , η εξίσωση (4.69) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dz} = -j\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{c} \quad (4.70)$$

Οι συντελεστές \mathbf{c} παρέχουν την ίδια ακριβώς πληροφορία με τους συντελεστές \mathbf{C} και μπορούν εξίσου να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στη συστοιχία των κυματοδηγών.



Σχήμα 4-10: Σταδιακή απομάκρυνση των κυματοδηγών του φράγματος μεταξύ τους καθώς απομακρυνόμαστε από την έξοδο του πρώτου συζεύκτη αστέρα. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κυματοδηγών Δy μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση z από την αρχή του κεντρικού κυματοδηγού

Στην έξοδο του συζεύκτη αστέρα οι κυματοδηγοί του φράγματος απομακρύνονται όπως δείχνει το σχήμα 4-10. Υποθέτουμε πως η διεύθυνση διάδοσης z του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στον κεντρικό κυματοδηγό του φράγματος είναι παράλληλη με τον άξονα των z και η απόσταση μεταξύ των κέντρων των πυρήνων δύο διαδοχικών κυματοδηγών αυξάνεται γραμμικά με το z , δηλαδή

$$\Delta y_g(z) = \left(\frac{z}{R} + 1 \right) \Delta y_g(0) \quad (4.71)$$

όπου R είναι η ακτίνα του πρώτου συζεύκτη αστέρα.

Για να υπολογίσουμε τα πλάτη \mathbf{c} των βασικών τρόπων των κυματοδηγών πρέπει να λύσουμε αριθμητικά την εξίσωση (4.71). Αν υποθέσουμε πως κατά τη μετάβαση από το z στο $z+\Delta z$ όπου το Δz έχει μικρή τιμή, ο πίνακας $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}$ παραμένει σταθερός τότε

$$\mathbf{c}(z + \Delta z) = \mathbf{c}(z) \exp(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}\Delta z) \quad (4.72)$$

όπου το εκθετικό $\exp(\mathbf{A})$, ενός τετραγωνικού πίνακα \mathbf{A} ορίζεται ως

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \quad (4.73)$$

Χωρίζοντας το διάστημα $[0, z]$ σε μικρά διαστήματα $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{N-1}, z_N]$ όπου $z_0=0, z_N=z$ και $z_i - z_{i-1} = \Delta z$, θα έχουμε

$$\mathbf{c}(z) = \mathbf{c}(0) \exp\left(\Delta z \sum_{k=1}^N \mathbf{P}^{-1}(z_k) \mathbf{K}(z_k) \right) \cong \mathbf{c}(0) \exp\left(\int_0^z \mathbf{P}^{-1}(z) \mathbf{K}(z) dz \right) \quad (4.74)$$

Οι πίνακες \mathbf{P}^{-1} και \mathbf{K} προσδιορίζονται από τις (4.66)-(4.68). Στην περίπτωση των κυματοδηγών φράγματος ενός AWG οι διακυμάνσεις του δείκτη διάθλασης είναι μικρές και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσέγγιση ασθενούς κυματοδηγής όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 3.10.6. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, οι βασικοί τρόποι των κυματοδηγών δίνονται από τις

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{y}e_y(y - y_i)e_x(x) \quad (4.75)$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{x}n_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} e_y(y - y_i)e_x(x) \quad (4.76)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.67) υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{P} ως εξής:

$$P_{ij} = -\frac{1}{2} n_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e_y(y - y_i) e_y(y - y_j) \quad (4.77)$$

όπου οι συναρτήσεις $e_x(x)$ και $e_y(y)$ είναι κανονικοποιημένες έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_x^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e_y^2(y) dy = 1 \quad (4.78)$$

Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{K} δίνονται από την (4.68) που στην περίπτωση των κυματοδηγών φράγματος γράφεται:

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{4} \omega (n_1^2 - n_2^2) \int_{b_1}^{b_2} dx e_x^2(x) \sum_{k \neq j} \int_{l_k}^{m_k} dy e_y(y - y_i) e_y(y - y_j) \quad (4.79)$$

όπου ο πυρήνας του κυματοδηγού i θεωρείται ότι είναι τοποθετημένος στην περιοχή $b_1 \leq x \leq b_2$ και $m_i \leq y \leq l_i$. Για να απλοποιήσουμε την κατάσταση μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\int_{b_1}^{b_2} dx e_x^2(x) \cong \int_{-\infty}^{+\infty} dx e_x^2(x) = 1 \quad (4.80)$$

δηλαδή, πως το πεδίο ως προς τη x διεύθυνση είναι περιορισμένο κυρίως μέσα στον πυρήνα του κυματοδηγού. Βάσει αυτής της υπόθεσης ο συντελεστής (4.79) γράφεται ως εξής:

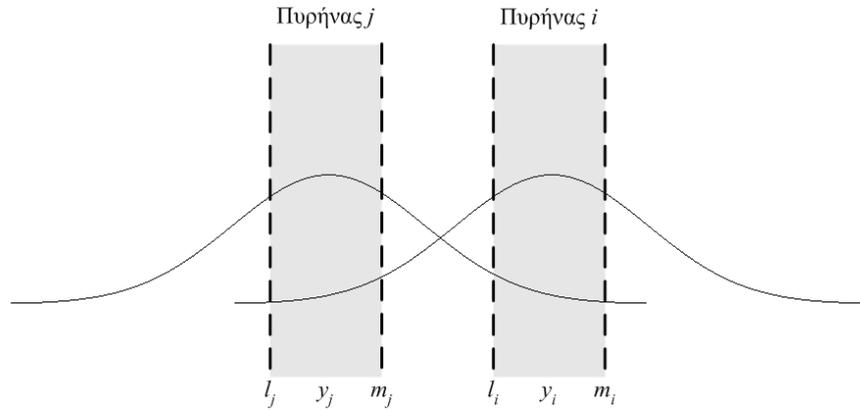
$$\kappa_{ij} = \frac{1}{4} \omega (n_1^2 - n_2^2) \sum_{k \neq j} \int_{l_k}^{m_k} dy e_y(y - y_i) e_y(y - y_j) \quad (4.81)$$

Ας σημειωθεί πως ο συντελεστής σύζευξης που υπολογίζεται βάση της (4.81) είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή σύζευξης (4.79) αφού το πεδίο ως προς τη διεύθυνση x δεν είναι περιορισμένο μέσα στον πυρήνα. Επομένως η χρήση της (4.81) θα οδηγήσει σε υπερεκτίμηση των φαινομένων σύζευξης μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος. Για ευκολία θα ορίσουμε δύο νέους συντελεστές E_{ij} και F_{ij} που δίνονται από τις σχέσεις:

$$E_{ij} = \frac{2P_{ij}}{n_1} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e_y(y - y_i) e_y(y - y_j) \quad (4.82)$$

$$F_{ij} = \frac{4\kappa_{ij}}{\omega (n_1^2 - n_2^2)} = \sum_{k \neq j} \int_{l_k}^{m_k} dy e_y(y - y_i) e_y(y - y_j) \quad (4.83)$$

Για να υπολογίσουμε την (4.81), πρέπει να γνωρίζουμε το προφίλ του τρόπου ενός απομονωμένου κυματοδηγού φράγματος ως προς τη διεύθυνση y . Βάσει της προσέγγισης του ενεργού δείκτη διάθλασης, στην περίπτωση όπου οι τιμές των δεικτών διάθλασης του πυρήνα και



Σχήμα 4-11: Βοηθητικό σχήμα για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των συντελεστών E_{ij} .

του μανδύα του κυματοδηγού παρουσιάζουν μικρή διαφορά, το $e_y(y)$ μπορεί να προσεγγιστεί από το προφίλ του τρόπου διάδοσης ενός συμμετρικού επίπεδου κυματοδηγού,

$$e_y(y) = N_n \begin{cases} e^{-q\left(\frac{y-d}{2}\right)} & y \geq d/2 \\ \cos(ky) / \cos(kd/2) & -d/2 \leq y \leq d/2 \\ e^{q\left(\frac{y+d}{2}\right)} & y \leq -d/2 \end{cases} \quad (4.84)$$

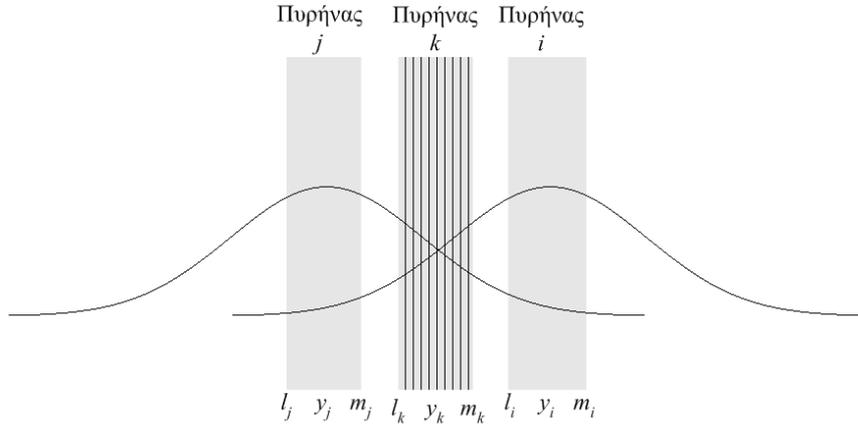
όπου ο συντελεστής μπροστά από το άγκιστρο έχει επιλεγεί ώστε το $e_y(y)$ να πληροί την εξίσωση (4.80). Παρατηρούμε ότι η κανονικοποίηση αυτή είναι διαφορετική από εκείνη που έχει επιλεγεί στην παράγραφο 3.10.1. Ωστόσο στον υπολογισμό του συντελεστή σύζευξης δεν έχει σημασία η κανονικοποίηση που επιλέγουμε, αφού αν αντικαταστήσουμε όπου το e_y με το Ae_y όπου A μία οποιαδήποτε σταθερά, ο πίνακας $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}$ θα έχει την ίδια τιμή όπως εύκολα αποδεικνύεται από τις (4.77) και (4.79). Χρησιμοποιώντας την (4.74), τα ολοκληρώματα των (4.72) και (4.73) μπορούν εύκολα να υπολογιστούν σε αναλυτική μορφή. Στο σχήμα 4-11 απεικονίζονται δύο κυματοδηγοί και η επικάλυψη των βασικών τρόπων διάδοσης εντός και εκτός των πυρήνων τους. Ο συντελεστής E_{ij} θα δίνεται από την

$$E_{ij} = \int_{-\infty}^{l_i} e^{q(y-l_i)} e^{q(y-l_j)} dy + \frac{1}{\cos(pd/2)} \int_{l_i}^{m_j} \cos(p(y-y_i)) e^{q(y-l_j)} dy + \int_{m_i}^{l_j} e^{q(y-l_j)} e^{-q(y-m_i)} dy + \frac{1}{\cos(pd/2)} \int_{l_j}^{m_j} \cos(py) e^{-q(y-m_i)} dy + \int_{m_j}^{+\infty} e^{q(y-l_i)} e^{q(y-l_j)} dy \quad (4.85)$$

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή (4.85) πρέπει να υπολογίσουμε τα εξής άοριστα ολοκληρώματα:

$$F_1(y, p, q, c, d) = \int e^{p(y-c)} e^{q(y-d)} dy = \frac{e^{(p+q)y - q(c+d)}}{2q} \quad (4.86)$$

$$F_2(y, p, q, c, d) = \int e^{q(y-c)} \cos(p(y-d)) dy = \frac{e^{q(y-c)}}{p^2 + q^2} (q \cos p(y-d) + p \sin p(y-d)) \quad (4.87)$$



Σχήμα 4-12: Βοηθητικό σχήμα για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των συντελεστών F_{ij} .

Οι (4.86)-(4.87) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των αντίστοιχων ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$I_1(a, b, q, c, d) = \int_a^b e^{q(y-c)} e^{q(y-d)} dy = F_1(b, q, c, d) - F_1(a, q, c, d) \quad (4.88)$$

$$I_2(a, b, p, q, c, d) = \int_a^b e^{q(y-c)} \cos(p(y-d)) dy = F_2(b, p, q, c, d) - F_2(a, p, q, c, d) \quad (4.89)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.78)-(4.79) ο συντελεστής E_{ij} γράφεται ως εξής

$$E_{ij} = I_1(-\infty, l_j, q, l_i, l_j) + \frac{1}{\cos(pd/2)} I_1(l_j, m_j, p, q, l_j, y_i) + I_1(m_i, l_j, -q, q, m_i, l_j) + \frac{1}{\cos(pd/2)} I_2(l_i, m_i, p, q, l_i, y_j) + I_1(m_i, +\infty, -q, -q, m_i, m_j) \quad (4.90)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές F_{ij} θα χρησιμοποιήσουμε την (4.83) και το σχήμα 4-12, σύμφωνα με τα οποία, οι συντελεστές F_{ij} υπολογίζονται από ένα άθροισμα ως προς το k των ολοκληρωμάτων I_{kmn} του γινομένου των τρόπων διάδοσης e_i και e_j εντός του πυρήνα του κυματοδηγού $k \neq j$,

$$I_{ijk} = \int_{m_k}^{l_k} e_i(y) e_j(y) dy \quad (4.91)$$

Εφόσον όλοι οι κυματοδηγοί του φράγματος είναι όμοιοι και το I_{ijk} εκφράζει την επικάλυψη των βασικών τρόπων του κυματοδηγού i και j μέσα στον πυρήνα του κυματοδηγού k έπεται πως η τιμή του I_{ijk} δεν μεταβάλλεται με εναλλαγή των i και j , δηλαδή $I_{ijk} = I_{jik}$. Εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία αυτή των I_{ijk} μπορούμε να θεωρήσουμε πως $i \leq j$. Αν $i > j$ τότε απλά εναλλάσσουμε το i με το j και υπολογίζουμε το I_{jik} που ισούται με I_{ijk} . Ανάλογα με την τιμή του k διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $i=k, j>k$ οπότε

$$I_{ijk} = \int_{m_k}^{l_k} \frac{\cos p(y - y_i)}{\cos(pd/2)} e^{q(y - m_j)} dy = I_2(m_k, l_k, p, q, y_i, m_j) \quad (4.92)$$

- $i < k, j > k$ οπότε

$$I_{ijk} = \int_{m_k}^{l_k} e^{-q(y - l_i)} e^{q(y - m_j)} dy = I_1(m_k, l_k, -q, q, l_i, m_j) \quad (4.93)$$

- $i < k, j < k$ οπότε

$$I_{ijk} = \int_{m_k}^{l_k} e^{-q(y - l_i)} e^{-q(y - l_j)} dy = I_1(m_k, l_k, -q, -q, l_i, l_j) \quad (4.94)$$

- $i > k, j > k$ οπότε

$$I_{ijk} = \int_{m_k}^{l_k} e^{q(y - m_i)} e^{q(y - m_j)} dy = I_1(m_k, l_k, -q, -q, m_i, m_j) \quad (4.95)$$

Βάση των σχέσεων αυτών ο συντελεστής F_{ij} υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$F_{ij} = \sum_{k=1(k \neq j)}^{M_N} I_{ijk} \quad (4.96)$$

Αφού έχουμε υπολογίσει τους συντελεστές F_{ij} και E_{ij} μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους P_{ij} και κ_{ij} και τον πίνακα $\mathbf{P}^{-1}(z)\mathbf{K}(z)$.

Για να υπολογίσουμε την επίδραση της σύζευξης κυματοδηγών φράγματος στις επιδόσεις του AWG, θα πρέπει να συνδέσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $D_{00}(f)$ με τους συντελεστές σύζευξης. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ένα σκεπτικό παρόμοιο με εκείνο της παραγράφου 3-11 στην οποία είχαμε υποθέσει πως οι βασικοί τρόποι των κυματοδηγών του φράγματος είναι ορθογώνιοι και επομένως δεν υπάρχει σύζευξη μεταξύ τους. Σκοπός μας στην παρούσα παράγραφο είναι να λάβουμε υπόψη τη σύζευξη των κυματοδηγών κατά τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς. Καταρχήν θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα αρχικά πλάτη των τρόπων των κυματοδηγών φράγματος. Για το σκοπό αυτό γράφουμε το προσπίπτον πεδίο στην είσοδο του συζεύκτη αστέρα ως υπέρθεση των τρόπων των κυματοδηγών ως εξής:

$$\psi_2(y) = \sum_m C_m u_g(y - y_m) \quad (4.97)$$

πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέρη με $u_g(y - y_n)$ και ολοκληρώνοντας από $[0, +\infty)$ θα λάβουμε το εξής σύστημα

$$\sum_m C_m E_{mn} / E_{mm} = C_{m0} \quad (4.98)$$

όπου C_{m0} είναι ο συντελεστής διέγερσης του τρόπου διάδοσης του κυματοδηγού m θεωρώντας πως οι τρόποι των κυματοδηγών είναι ορθογώνιοι και δίνεται από την

$$C_{m0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(y) u_g(y - y_m) dy \quad (4.99)$$

Επομένως οι συντελεστές $C_{m0} \cong U_g(\beta_s y_m/R)$ που σε μία πρώτη προσέγγιση μπορούν να θεωρηθούν Gaussian όπως είδαμε στην παράγραφο 3-11 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των συντελεστών διέγερσης των τρόπων των κυματοδηγών λύνοντας αριθμητικά το γραμμικό σύστημα (4.98). Η λύση του συστήματος θα δώσει τις αρχικές συνθήκες $e(0)$ που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4.70) μέσω της (4.73). Στην είσοδο του δεύτερου συζεύκτη το ηλεκτρικό πεδίο θα δίνεται από την

$$\psi_3(y) = \sum_m C'_m u_g(y - y_m) e^{-j\beta_w L_m} \quad (4.100)$$

όπου οι συντελεστές C'_m παριστάνουν τους συντελεστές διέγερσης των τρόπων των κυματοδηγών στην έξοδο του φράγματος οι οποίοι λόγω της σύζευξης των κυματοδηγών διαφέρουν από τους C_m και υπολογίζονται από την (4.74). Το προσπίπτον πεδίο διαδίδεται μέσα στο συζεύκτη αστέρα και στην έξοδό του θα δίνεται από τον μετασχηματισμό Fourier της (4.100). Η συνάρτηση μεταφοράς για τον κεντρικό κυματοδηγό προκύπτει από το συντελεστή διέγερσης του βασικού τρόπου που θα δίνεται από την

$$D_{00} = \sum_m C'_m U_g\left(\frac{\beta_s y_m}{R}\right) \exp\left(j \frac{2\pi m}{FSR} f\right) \cong \sum_m C'_m C_{m0} \exp\left(j \frac{2\pi m}{FSR} f\right) \quad (4.101)$$

Για να εξάγουμε την (4.101) υποθέσαμε πως οι κυματοδηγοί εξόδου του AWG παρουσιάζουν αμελητέα σύζευξη, πράγμα που συνήθως ισχύει στην πράξη. Επομένως σύμφωνα με την (4.101) η λύση της εξίσωσης (4.70) επιτρέπει τον προσδιορισμό της επίδρασης της σύζευξης των κυματοδηγών φράγματος στην κεντρική συνάρτηση μεταφοράς του AWG.

Για να εκτιμήσουμε την επίδραση της σύζευξης των κυματοδηγών του φράγματος στις επιδόσεις του αποπολυπλέκτη, θεωρούμε ένα AWG, με $N=60$ τετράγωνους κυματοδηγούς φράγματος που έχουν διαστάσεις $4 \times 4 \mu\text{m}$ και δείκτες διάθλασης πυρήνα και μανδύα ίσους με $n_1=1.5$ και $n_2=1.49$ αντίστοιχα. Θεωρούμε επίσης πως η ενδιάμεση απόσταση μεταξύ των κέντρων των πυρήνων ισούται με $\Delta y(0)$. Η ακτίνα του συζεύκτη αστέρα θεωρείται ίση με $R=6000 \mu\text{m}$. Οι συντελεστές C_{m0} προσεγγίζονται με μία Gaussian

$$C_{m0} = C_c \exp\left(-\frac{8}{M^2} m^2\right) \quad (3.372)$$

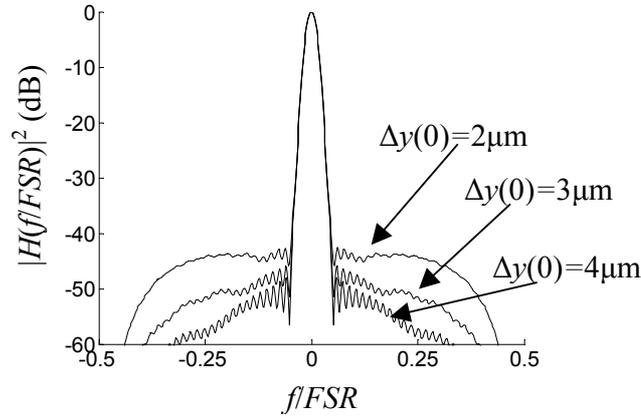
όπου

$$C_c = \sqrt{\sum_m C_{m0}^2} \quad (3.373)$$

Οι απώλειες που εισάγονται στο AWG έχουν παρασταθεί γραφικά στο σχήμα 3-34. Παρατηρούμε πως όταν οι κυματοδηγοί πλησιάζουν ο ένας τον άλλο το επίπεδο των δευτερευόντων λοβών της D_{00} αυξάνει. Ωστόσο ακόμα και όταν οι πυρήνες απέχουν απόσταση $\Delta y(0)=2 \mu\text{m}$ παρατηρούμε πως οι δευτερευόντες λοβοί δεν ξεπερνούν τα -40dB .

Ας σημειωθεί τέλος πως η θεωρία σύζευξης τρόπων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε τις απώλειες που εισάγονται στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος και της εξόδου του πρώτου συζεύκτη αστέρα. Αν $\psi_2(y)$ είναι το πεδίο στην έξοδο του συζεύκτη και $\psi_3(y)$ το πεδίο στους κυματοδηγούς του φράγματος τότε θα έχουμε

$$\psi_2(y) = \sum_m C_m e_y(y - y_m) \quad (4.104)$$



Σχήμα 4-13: Επίδραση της σύζευξης των κυματοδηγών φράγματος στην συνάρτηση μεταφοράς ενός AWG με $N=64$ κυματοδηγούς φράγματος

όπου οι συντελεστές διέγερσης C_m των κυματοδηγών φράγματος δίνονται από την (4.91)-(4.99). Αν υποθέσουμε πως οι τρόποι $e_y(y)$ έχουν κανονικοποιηθεί έτσι ώστε το εμβαδόν του $e_y^2(y)$ να είναι ίσο με την μονάδα, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_3(y)|^2 dy = \sum_{mn} C_m C_n E_{mn} = \sum_m C_m C_{m0} \quad (4.105)$$

Αν υποθέσουμε πως $C_m' \cong C_m$, δηλαδή ότι η σύζευξη των κυματοδηγών δεν αλλοιώνει σημαντικά τους συντελεστές διέγερσης των κυματοδηγών, τότε έπεται πως

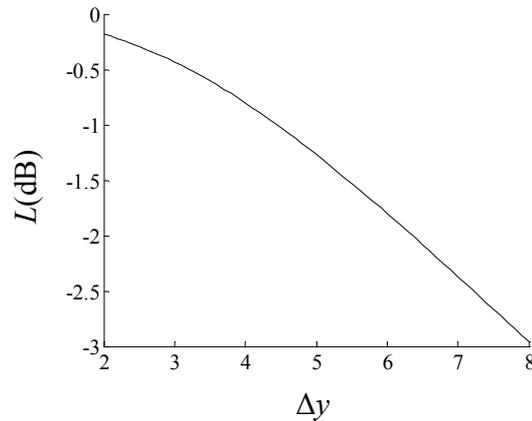
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_3(y)|^2 dy \cong D_{00}(0) \quad (4.106)$$

Στην περίπτωση όπου οι πυρήνες των κυματοδηγών έχουν τοποθετηθεί έτσι ώστε να εφάπτονται ο ένας στον άλλο ($\Delta y(0)=0$) τότε δεν υπάρχει ασυνέχεια στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ συζεύκτη αστέρα και φράγματος οπότε $\psi_2=\psi_3$ και επομένως για τη συνάρτηση μεταφοράς με μηδενικές απώλειες $D_{ideal}(f)$ θα ισχύει

$$D_{ideal}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_2(y)|^2 dy \quad (4.107)$$

και επομένως οι απώλειες L της μη ιδανικής συνάρτησης μεταφοράς σε σχέση με την ιδανική θα δίνονται από την σχέση

$$L = \left| \frac{D_{00}(0)}{D_{ideal}(0)} \right|^2 = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_3(y)|^2 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_2(y)|^2 dy} \right)^2 \quad (4.108)$$



Σχήμα 4-14: Εξάρτηση των απωλειών με την απόσταση Δy των κέντρων των πυρήνων των κυματοδηγών φράγματος στην περίπτωση που το φράγμα έχει $N=60$ κυματοδηγούς

Σύμφωνα με την εξίσωση (4.108) οι απώλειες του AWG εξαιτίας του γεγονότος πως οι κυματοδηγοί φράγματος δεν μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε να εφάπτεται ο ένας με τον άλλο προσδιορίζονται από τα πεδία ψ_2 και ψ_3 . Στο σχήμα 4-14 έχουμε παραστήσει γραφικά τις απώλειες του AWG σε συνάρτηση με την απόσταση των κυματοδηγών του στην περίπτωση όπου το προσπίπτον πεδίο στον συζεύκτη αστέρα θεωρείται Gaussian με εξάρτηση

$$\psi_2 = \exp\left(\frac{-8}{M^2 \Delta y_g^2} y^2\right) \quad (4.109)$$

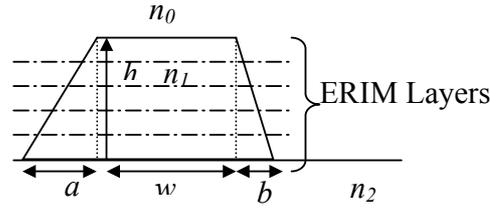
Οι δείκτες διάθλασης του πυρήνα n_1 και του μανδύα n_2 έχουν επιλεγεί και πάλι $n_1=1.5$ και $n_2=1.49$ ενώ το μέγεθος του πυρήνα θεωρείται ίσο με $d=4\mu\text{m}$. Σχήματα, παρόμοια με τα 4-14 και 2-34 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της τιμής της απόστασης των κυματοδηγών φράγματος ανάλογα με το ύψος των δευτερευόντων λοβών και τις απώλειες που μπορούν να γίνουν αποδεκτές.

5. Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΦΑΣΗΣ ΣΤΙΣ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΟΥ AWG

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάσαμε μία πλήρη ηλεκτρομαγνητική ανάλυση για την περιγραφή των φασματικών ιδιοτήτων ενός φράγματος συστοιχίας κυματοδηγών. Είδαμε πως με κατάλληλη επιλογή των κατασκευαστικών χαρακτηριστικών του, η απομόνωση μεταξύ δύο γειτονικών καναλιών μπορεί θεωρητικά να ξεπεράσει τα -40dB . Ωστόσο τέτοιες υψηλές τιμές απομόνωσης δεν επιτυγχάνονται εύκολα στην πράξη επειδή η συνάρτηση μεταφοράς ενός πραγματικού αποπολυπλέκτη βασισμένου σε τεχνολογία AWG παρουσιάζει υψηλότερους δευτερεύοντες λοβούς (από -35dB έως και -10dB) από αυτούς που εμφανίζονται στο σχήμα 3-3 (κεφάλαιο 3). Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, η σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών του AWG τείνει να ανυψώσει τους δευτερεύοντες λοβούς της συνάρτησης μεταφοράς αλλά, ακόμα και υπό συνθήκες αρκετά ισχυρής αρχικής σύζευξης, το επίπεδο των δευτερευόντων λοβών παραμένει κάτω από τα -40dB και επομένως δεν μπορεί να θεωρηθεί ως η πρωταρχική αιτία για την επιδείνωση της ποιότητας απομόνωσης μεταξύ δύο γειτονικών καναλιών.

Η αιτία της ανύψωσης των δευτερευόντων λοβών αποδείχθηκε πως είναι τα σφάλματα φάσης [Dra97], [TYI95], [CZZ02],[MOM02],[MPC02] που προκαλούν κατασκευαστικές μικρο-ατέλειες των κυματοδηγών του φράγματος [GSS97]. Για παράδειγμα, οι διαστάσεις κάθε κυματοδηγού μπορεί να διαφέρουν ελαφρά από τις προδιαγεγραμμένες τους τιμές. Επομένως η σταθερά διάδοσης β που καθορίζεται από τη γεωμετρία του κυματοδηγού παρουσία των κατασκευαστικών ατελειών, θα διαφέρει από την τιμή β_0 του ιδανικού κυματοδηγού. Επίσης εφόσον οι κατασκευαστικές ατέλειες θα διαφέρουν από κυματοδηγό σε κυματοδηγό, αναμένουμε οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγών να διαφέρουν μεταξύ τους. Επειδή η διαφορά φάσης $\Delta\varphi_m$ του σήματος μέσα στον κυματοδηγό m δίνεται από το γινόμενο $\beta_m L_m$ όπου β_m η σταθερά διάδοσης και L_m το μήκος του κυματοδηγού m , έπεται πως η συμβολή των σημάτων των κυματοδηγών θα διαφέρει ελαφρά από αυτήν που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 4. Αν τα σφάλματα $\Delta\varphi_m$ έχουν μικρές τιμές, τότε περιμένουμε πως το κύριο ποσό της ενέργειας του φωτός θα είναι συγκεντρωμένο γύρω από ένα μήκος κύματος λ_0 . Ωστόσο, η συμβολή για τα μήκη κύματος που βρίσκονται μακριά από το λ_0 δεν θα είναι απολύτως καταστροφική, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ένα μικρό ποσοστό φωτεινής ισχύος. Αναμένουμε με άλλα λόγια πως η συνάρτηση μεταφοράς θα παρουσιάζει δευτερεύοντες λοβούς υψηλότερους από εκείνους του ιδανικού φράγματος.



Σχήμα 5-1: Η γεωμετρία ενός κυματοδηγού που αποκλίνει από την ιδανική (ορθογώνια) λόγω της ατελούς διαδικασίας γάραξης.

Στα δίκτυα WDM, οι μέγιστες τιμές απομόνωσης εξαρτώνται από τον αριθμό των καναλιών που χρησιμοποιούνται όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο. Τιμές της τάξης των -25dB έως και -35dB αποτελούν τυπικές τιμές απαιτούμενης απομόνωσης σε ένα δίκτυο WDM για να έχουμε μειωμένες τιμές ρυθμού σφάλματος bit (Bit Error Rate – BER) στο δέκτη. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως τα σφάλματα φάσης συνδέονται με το ύψος των δευτερευόντων λοβών του AWG και πως μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος των αναμενόμενων δευτερευόντων λοβών ενός AWG από τις παραμέτρους σχεδιασμού του και από τις ανοχές (tolerances) της διαδικασίας κατασκευής του. Ας σημειωθεί πως οι ανοχές της διαδικασίας κατασκευής εκτιμώνται έμμεσα ή άμεσα πειραματικά. Έτσι τα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν στο παρόν κεφάλαιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν από έναν σχεδιαστή για να εκτιμήσει το αναμενόμενο ύψος των δευτερευόντων λοβών ενός AWG.

5.2 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΑΤΕΛΕΙΩΝ

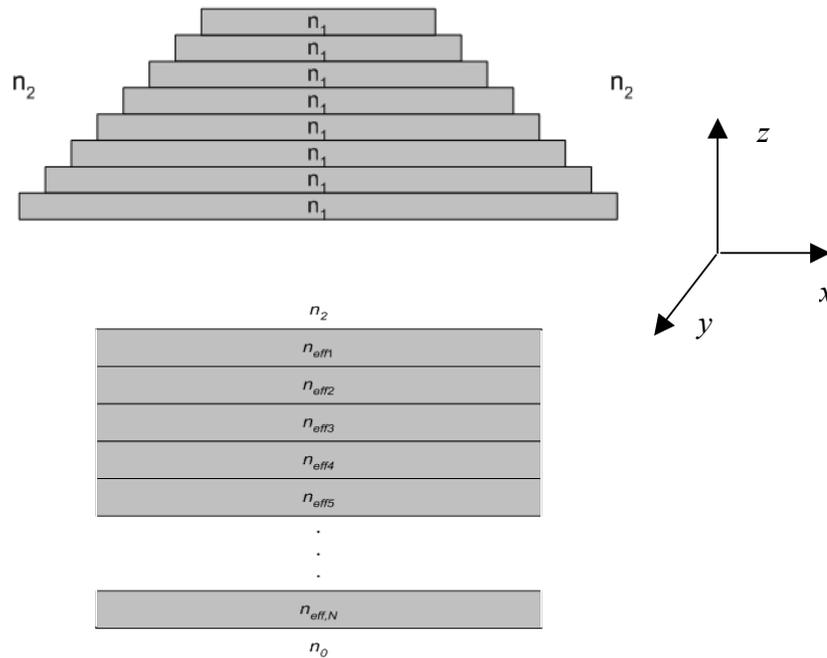
Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, οι κατασκευαστικές ατέλειες ενός κυματοδηγού προκαλούν απόκλιση του ενεργού δείκτη διάθλασης του n_{eff} και επομένως και της σταθεράς διάδοσης του β από τις θεωρητικές τους τιμές $n_{eff,o}$ και β_0 , αντίστοιχα. Εξαιτίας της ατελούς διαδικασίας χάραξης (etching), οι κυματοδηγοί ενδέχεται να έχουν σχήμα τραπεζίου, όπως εικονίζεται στο σχήμα 5-1 και όχι ορθογώνιου [MRB96]. Επίσης ενδέχεται να υπάρχει μία διαφορά στο πλάτος τους w και στο ύψος τους h καθώς και μία απόκλιση από την προδιαγεγραμμένη τιμή του δείκτη διάθλασης τόσο μέσα στον πυρήνα (n_1) όσο και στις περιοχές που περιβάλλουν τον πυρήνα (n_0, n_2).

Ο ενεργός δείκτης διάθλασης n_{eff} θα εξαρτάται από τα μεγέθη $p=(w,h,n_1,n_2,n_0,a,b)$ των οποίων η διακύμανση $\langle \Delta p^2 \rangle$ από την προδιαγεγραμμένη τους τιμή p_0 ($\Delta p=p-p_0$) αποτελεί τις ανοχές της διαδικασίας χάραξης που χρησιμοποιείται. Η μεταβολή $\Delta n_{eff}=n_{eff}-n_{eff,o}$ του δείκτη διάθλασης υπολογίζεται αναπτύσσοντας κατά Taylor τη συνάρτηση $n_{eff}=n_{eff}(w,h,n_1,n_2,n_0,a,b)$. Υποθέτοντας πως οι μεταβολές των μεγεθών p δεν είναι πολύ μεγάλες, διατηρούμε μόνο την πρώτη τάξη στο ανάπτυγμα και λαμβάνουμε

$$\Delta n_{eff} = \frac{\partial n_{eff}}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial n_{eff}}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial n_{eff}}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial n_{eff}}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial n_{eff}}{\partial n_1} \Delta n_1 + \frac{\partial n_{eff}}{\partial n_2} \Delta n_2 + \frac{\partial n_{eff}}{\partial n_0} \Delta n_0 \quad (5.1)$$

Βάσει της (5.1) μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση σ_{neff}^2 και τη μέση τιμή $\langle n_{eff} \rangle$ της μεταβολής του δείκτη διάθλασης,

$$\left(\sigma_{neff}^{TE,TM} \right)^2 = \sum_p \left(\partial n_{eff}^{TE,TM} / \partial p \right)^2 \sigma_{\Delta p}^2 \quad (5.2)$$



Σχήμα 5-2: (α) Χωρισμός της διατομής του κυματοδηγού σε οριζόντια στρώματα σταθερού πάχους, (β) Μέσο πολλαπλών στρωμάτων που λαμβάνεται από το (α) με χρήση της προσέγγισης ενεργού δείκτη διάθλασης και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ενεργού δείκτη διάθλασης του κυματοδηγού του σχήματος 4-1.

$$\langle n_{eff}^{TE, TM} \rangle = \sum_p (\partial n_{eff}^{TE, TM} / \partial p) \langle \Delta p \rangle \quad (5.3)$$

ο δείκτης TE και TM χρησιμοποιείται για να ξεχωρίσει τις τιμές της διακύμανσης και της μέσης τιμής του τρόπου TE και TM. Η τυχόν διαφορά των τιμών για τους δύο τρόπους οφείλεται στη διπλοδιαθλαστικότητα του κυματοδηγού.

Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι οι μεταβολές των επιμέρους χαρακτηριστικών του κυματοδηγού ακολουθούν μια Gaussian τυχαία κατανομή οπότε το Δn_{eff} το οποίο είναι άθροισμα Gaussian κατανομών θα ακολουθεί μία Gaussian τυχαία κατανομή.

Οι εξισώσεις (5.1)-(5.3) συνδέουν τη μεταβολή του δείκτη διάθλασης με τη μεταβολή των χαρακτηριστικών του κυματοδηγού. Ωστόσο για να έχουν κάποια πρακτική αξία θα πρέπει να βρεθεί κάποιος τρόπος υπολογισμού των παραγώγων του ενεργού δείκτη διάθλασης $\partial n_{eff} / \partial p$. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο υπολογισμού των παραγώγων του δείκτη διάθλασης βασισμένου στη μέθοδο ενεργού δείκτη διάθλασης.

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΤΟΥ ΔΕΙΚΤΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5-1 η διατομή του κυματοδηγού μπορεί να χωριστεί σε μία σειρά οριζόντιων στρωμάτων διηλεκτρικού. Αν ο αριθμός των στρωμάτων αυτών είναι αρκετά μεγάλος τότε το μήκος του κάθε στρώματος μπορεί να θεωρηθεί σταθερό όπως φαίνεται στο σχήμα 5-2(α). Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον ενεργό δείκτη διάθλασης $n_{eff,m}$ για κάθε ένα στρώμα m του κυματοδηγού. Βάσει της προσέγγισης του ενεργού δείκτη διάθλασης, ο δείκτης διάθλασης του κυματοδηγού του σχήματος 5-1 μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το σχήμα

5-2(β) όπου ο δείκτης διάθλασης κάθε ενδιάμεσου στρώματος m ισούται με τον ενεργό δείκτη διάθλασης του στρώματος m του σχήματος 5-2(α).

Για το βασικό τρόπο TE, ο υπολογισμός του ενεργού δείκτη διάθλασης των στρωμάτων του σχήματος 5-2(α) επιτυγχάνεται με την αριθμητική λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\tan\left(\frac{\kappa d}{2}\right) = \frac{\gamma}{\kappa} \quad (5.4)$$

ενώ για τον υπολογισμό του ενεργού δείκτη διάθλασης των TM τρόπων η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται

$$\tan\left(\frac{\kappa d}{2}\right) = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\gamma}{\kappa} \quad (5.5)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις $\kappa = k(n_1^2 - n_{eff}^2)^{1/2}$, $\gamma = k(n_{eff}^2 - n_2^2)^{1/2}$ ενώ $k = 2\pi/\lambda$ η σταθερά διάδοσης στο κενό. Αντικαθιστώντας τα κ και γ στις (5.4) και (5.5) ο μόνος άγνωστος είναι το n_{eff} το οποίο πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των n_1 και n_2 . Βάση των στοιχείων αυτών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία από τις πολλές διαθέσιμες μεθόδους αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων ώστε να υπολογίσουμε την τιμή του με μεγάλη ακρίβεια.

Τα πράγματα ωστόσο δεν είναι τόσο απλά για το πρόβλημα του σχήματος 5-2(β) όπου έχουμε ένα μέσο με παραπάνω από τρία στρώματα. Στην περίπτωση του σχήματος 5-2(β) η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να έχει αρκετά πολύπλοκη μορφή, ιδιαίτερα αν ο αριθμός των στρωμάτων είναι μεγάλος. Για να αποφύγουμε τον άμεσο υπολογισμό της χαρακτηριστικής εξίσωσης του κυματοδηγού, χρησιμοποιούμε μία αναπαράσταση των επιμέρους στρωμάτων με πίνακες 2x2, το γινόμενο των οποίων χρησιμοποιείται για την εύρεση του ενεργού δείκτη διάθλασης [Sph86], [Mar94, §3.8]. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση των TE τρόπων το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του m στρώματος γράφεται ως εξής

$$E_y = A_m \cos(\kappa_m z) + B_m \sin(\kappa_m z) \quad (5.6)$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες του είναι μηδενικές ($E_z = E_x = 0$). Η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που είναι εγκάρσια προς τη διαστρωμάτωση ισούται με

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (5.7)$$

Αν υποθέσουμε πως το m -οστό στρώμα βρίσκεται στην περιοχή $z_m \leq z \leq z_{m+1}$ τότε στο σημείο $z = z_{m+1} = d$, εξαιτίας των οριακών συνθηκών το E_y και το $\partial E_y / \partial z$ θα πρέπει να είναι συνεχή, οπότε

$$\begin{bmatrix} \cos(\kappa_m d) & \sin(\kappa_m d) \\ -\kappa_m \sin(\kappa_m d) & \kappa_m \cos(\kappa_m d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_n d) & \sin(\kappa_n d) \\ -\kappa_n \sin(\kappa_n d) & \kappa_n \cos(\kappa_n d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

όπου $n = m+1$. Στα ακριανά στρώματα, το ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει να αποσβένει εκθετικά, δηλαδή:

$$E_y(z) = A_{N+1} \exp(-\gamma_{N+1}(z - z_{N+1})) \quad \text{για } z > z_{N+1} \quad (5.9)$$

$$E_y(z) = A_0 \exp(\gamma_0(z - z_1)) \quad \text{για } z < z_1 \quad (5.10)$$

όπου στα z_{N+1} και z_1 είναι οι θέσεις όπου βρίσκονται οι διαχωριστικές επιφάνειες των ακριανών στρωμάτων με τα γειτονικά τους ενδιάμεσα στρώματα. Στο σημείο $z = z_{N+1}$ η συνέχεια του εφαπτομενικού ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου συνεπάγεται

$$\begin{bmatrix} \cos(\kappa_N z_{N+1}) & \sin(\kappa_N z_{N+1}) \\ -\kappa_N \sin(\kappa_N z_{N+1}) & \kappa_N \cos(\kappa_N z_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ -\gamma_{N+1} A_{N+1} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\kappa_1 z_1) & \sin(\kappa_1 z_1) \\ -\kappa_N \sin(\kappa_1 z_1) & \kappa_N \cos(\kappa_1 z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \gamma_0 A_0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Επομένως αν θέσουμε

$$X_m(z) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_m z) & \sin(\kappa_m z) \\ -\kappa_m \sin(\kappa_m z) & \kappa_m \cos(\kappa_m z) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

οι οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες ισοδυναμούν με την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} = X_N(z_{N+1}) \cdot X_N^{-1}(z_N) \cdot \dots \cdot X_2(z_3) \cdot X_2^{-1}(z_2) \cdot X_1(z_1) \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ \gamma_0 A_0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

όπου

$$A_{N+1} \gamma_{N+1} + B_{N+1} = 0 \quad (5.15)$$

Οι εξισώσεις (5.14)-(5.15) αποτελούν μία έμμεση μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης για τους τρόπους TE και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του ενεργού δείκτη διάθλασης του κυματοδηγού πολλαπλών στρωμάτων. Πράγματι αφού $\kappa_m = (n_m^2 - n_{eff}^2)^{1/2}$ και $\gamma_m = (n_{eff}^2 - n_m^2)^{1/2}$ ο μόνος άγνωστος στην (5.14) είναι το n_{eff} για το οποίο ισχύει η (5.15). Το n_{eff} θα βρίσκεται στο διάστημα ανάμεσα στον ελάχιστο δείκτη διάθλασης των ενδιάμεσων στρωμάτων ($m=1,2,\dots,N$) και το μέγιστο δείκτη διάθλασης των δύο ακριανών. Η αναζήτηση της ακριβούς τιμής του αριθμητικά μπορεί να γίνει με τον υπολογισμό των συντελεστών A_{N+1} και B_{N+1} σε ορισμένα σημεία του διαστήματος που υπογορεύονται από την εκάστοτε μέθοδο επίλυσης (π.χ. διαίρεσης διαστήματος, μέθοδος Νεύτωνα κτλ). Η ακριβής τιμή του n_{eff} θα πληροί την (5.15).

Με παρόμοιο τρόπο εξάγουμε και μία έμμεση μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης για τους τρόπους TM. Στην περίπτωση αυτή το μαγνητικό πεδίο θα έχει τη μορφή

$$H_y = A_m \cos(\kappa_m z) + B_m \sin(\kappa_m z) \quad (5.16)$$

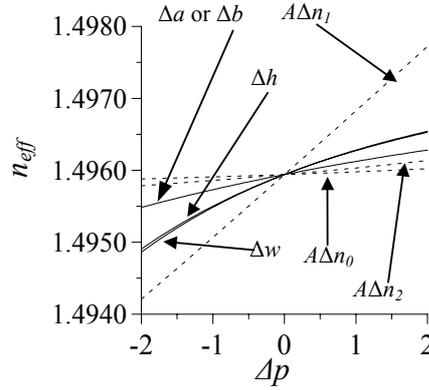
ενώ το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την εξίσωση

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_0 n^2} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (5.17)$$

Σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες, στην περίπτωση των TM κυμάτων στις οριακές επιφάνειες θα πρέπει τόσο το H_y , όσο και το $(1/n)^2 \partial H_y / \partial z$ να είναι συνεχή. Αν ορίσουμε τον πίνακα $Y_m(z)$ ως εξής

$$Y_m(z) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_m z) & \sin(\kappa_m z) \\ -\kappa_m \sin(\kappa_m z) / n_m^2 & \kappa_m \cos(\kappa_m z) / n_m^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

τότε μπορούμε να δείξουμε πως η χαρακτηριστική εξίσωση στην περίπτωση των TM τρόπων γράφεται ως εξής



Σχήμα 5-3: Η μεταβολή του δείκτη διάθλασης n_{eff} ενός κυματοδηγού σε συνάρτηση με την μεταβολή Δp των χαρακτηριστικών $p=(w,h,a,b,A\Delta n_1,A\Delta n_0,A\Delta n_2)$ όπου $A=10^3$.

$$\begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} = Y_N(z_{N+1}) \cdot Y_N^{-1}(z_N) \cdot \dots \cdot Y_2(z_3) \cdot Y_2^{-1}(z_2) \cdot Y_1(z_1) \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ \gamma_0 A_0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

όπου

$$A_{N+1}\gamma_{N+1} + B_{N+1} = 0 \quad (5.20)$$

Η εύρεση της τιμής του ενεργού δείκτη διάθλασης λαμβάνει χώρα όπως και στην περίπτωση των τρόπων TE.

Στο σχήμα 5-3 έχει απεικονιστεί η μεταβολή του δείκτη διάθλασης που προκαλείται όταν μεταβληθεί ένα από τα επτά μεγέθη (a,b,w,h,n_1,n_0,n_2) για έναν κυματοδηγό του οποίου η διατομή αρχικά έχει διαστάσεις $7\mu\text{m} \times 7\mu\text{m}$, δείκτη διάθλασης πυρήνα $n_1=1.5$ και δείκτη διάθλασης περιβάλλοντος διηλεκτρικού $n_2=n_0=1.488$ (η σχετική διαφορά μεταξύ των δεικτών διάθλασης n_1 και n_2 είναι $\Delta=(n_1-n_2)/n_1=0.75\%$). Ο κυματοδηγός έχει χωριστεί σε 20 οριζόντια στρώματα. Παρατηρούμε πως για μικρές μεταβολές των μεγεθών αυτών ($\sim 0.1\mu\text{m}$ για τα a,b,w,h και $\sim 10^{-4}$ για τα n_1,n_0,n_2), η εξάρτηση της μεταβολής του δείκτη διάθλασης είναι όντως σχεδόν γραμμική οπότε ισχύει προσεγγιστικά η (5.1).

Τέλος οι παράγωγοι του ενεργού δείκτη διάθλασης μπορούν εύκολα να υπολογιστούν προσεγγιστικά με τη βοήθεια της παραπάνω διαδικασίας. Για παράδειγμα η παράγωγος $\partial n_{eff}/\partial w$ υπολογίζεται βάση της σχέσης [CPS93]:

$$\frac{\partial n_{eff}}{\partial w} \cong \frac{n_{eff}(w + \Delta w, a, b, h, n_1, n_0, n_2) - n_{eff}(w - \Delta w, a, b, h, n_1, n_0, n_2)}{2\Delta w} \quad (5.21)$$

Στον πίνακα 5-1 δίδουμε τις τιμές των παραγώγων του ενεργού δείκτη διάθλασης στην περίπτωση του βασικού τρόπου TE. Παρατηρούμε πως ο δείκτης διάθλασης που επηρεάζει περισσότερο είναι ο δείκτης διάθλασης του πυρήνα.

Πίνακας 5-1: Οι παράγωγοι του ενεργού δείκτη διάθλασης του βασικού τρόπου TE για έναν τετράγωνο κυματοδηγό 7μm x 7μm με n₁=1.5 και Δ=0.75%.

$\partial n_{eff}/\partial n_2$	0.08691
$\partial n_{eff}/\partial n_1$	0.88122
$\partial n_{eff}/\partial n_0$	0.03504
$\partial n_{eff}/\partial w$	0.000378
$\partial n_{eff}/\partial a$	0.000195
$\partial n_{eff}/\partial b$	0.000195
$\partial n_{eff}/\partial h$	0.000390

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε υποθέτει πως οι κυματοδηγοί είναι ευθύγραμμοι, κάτι που δεν ισχύει στα AWG, στα οποία οι κυματοδηγοί παρουσιάζουν μία καμπυλότητα στην περιοχή ανάμεσα στους δύο συζεύκτες αστέρα. Ωστόσο, η ακτίνα καμπυλότητας των κυματοδηγών είναι πολύ μεγάλη και τα φαινόμενα της καμπύλωσης των κυματοδηγών μπορούν σε μία πρώτη προσέγγιση να αγνοηθούν. Αν οι ακτίνες καμπυλότητας δεν είναι μεγάλες, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν πιο ακριβείς δισδιάστατες μέθοδοι εύρεσης του ενεργού δείκτη διάθλασης καθώς και της τεχνικής σύμμορφης απεικόνισης (conformal mapping) που μετατρέπει το πρόβλημα του καμπύλου κυματοδηγού σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ευθύγραμμου κυματοδηγού με διαφορετική διατομή από αυτήν του καμπύλου [SGP00].

5.4 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΦΑΣΗΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο υποθέσαμε πως οι μεταβολές Δp των χαρακτηριστικών των κυματοδηγών είναι τυχαίες Gaussian διαδικασίες. Οι δείκτες διάθλασης, καθώς και το ύψος και το πλάτος του πυρήνα μπορούμε να υποθέσουμε πως μεταβάλλονται από κυματοδηγό σε κυματοδηγό έτσι ώστε η μέση τους τιμή να είναι ίση με μηδέν ($\langle \Delta w \rangle = \langle \Delta n_i \rangle = \langle \Delta h \rangle = 0$). Στην περίπτωση αυτή η μέση τιμή του $\langle \Delta n_{eff} \rangle$ θα καθορίζεται από την $\langle \Delta a \rangle$ και την $\langle \Delta b \rangle$. Επειδή οι παράγωγοι $\partial n_{eff}/\partial a$ και $\partial n_{eff}/\partial b$ είναι κατά δύο φορές μικρότερες από τις $\partial n_{eff}/\partial w$ και $\partial n_{eff}/\partial h$ καταλαβαίνουμε πως η μέση τιμή του $\langle \Delta n_{eff} \rangle$ θα είναι αρκετά μικρή ώστε να υποθέσουμε πως $\langle \Delta n_{eff} \rangle = 0$.

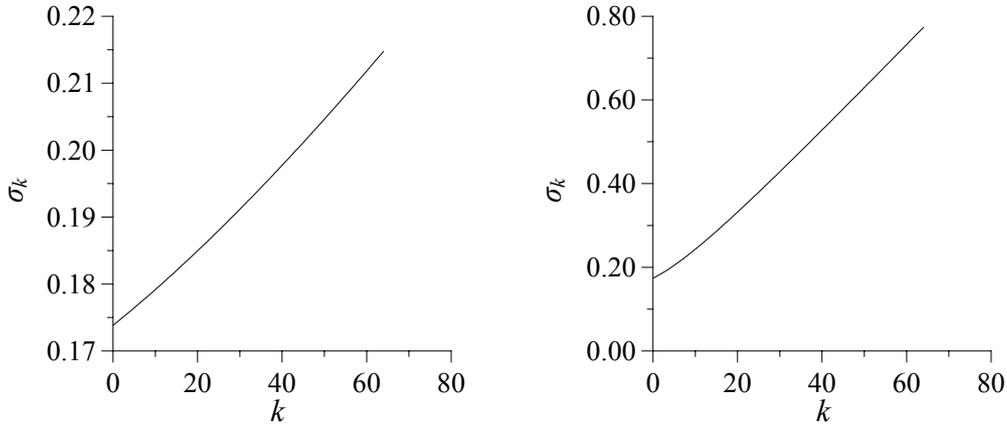
Η φάση του σήματος στον m κυματοδηγό δίνεται από την

$$\varphi_m = \frac{2\pi}{\lambda} n_{eff} L_m = \frac{2\pi}{\lambda} n_{eff,o} (L_{m,o} + \Delta L_m) + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_{eff} (L_{m,o} + \Delta L_m) \quad (5.22)$$

όπου $n_{eff,o}$ είναι η τιμή του δείκτη διάθλασης απουσία κατασκευαστικών ατελειών, $L_{m,o}$ το προδιαγεγραμμένο μήκος του κάθε κυματοδηγού και ΔL_m το σφάλμα στο μήκος του κυματοδηγού λόγω του σφάλματος ψηφιοποίησης της μάσκας που χρησιμοποιείται κατά τη χάραξη (photomask digitizing error) [LWC01]. Αν αγνοήσουμε τον όρο δεύτερης τάξης που περιέχει το $\Delta n_{eff} \Delta L_m$, το σφάλμα φάσης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\delta\varphi_m = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{eff,o} \Delta L_m + \Delta n_{eff} L_{m,o}) \quad (5.23)$$

Επομένως αν υποθέσουμε πως $\langle \Delta n_{eff} \rangle = \langle \Delta L_m \rangle = 0$, τότε θα έχουμε



Σχήμα 5-4: Η τυπική απόκλιση σ_k των σφαλμάτων φάσης σε συνάρτηση με το k για την περίπτωση ενός 16x16 AWG με 65 κυματοδηγούς φράγματα στην περίπτωση όπου η απόσταση μεταξύ των καναλιών ισούται με α) $\Delta f_{ch}=100\text{GHz}$, β) $\Delta f_{ch}=10\text{GHz}$.

$$\sigma_m^2 = \langle \delta\varphi_m^2 \rangle = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left(n_{eff,o}^2 \langle \Delta L_m^2 \rangle + \langle \Delta n_{eff}^2 \rangle L_{m,o}^2 \right) \quad (5.24)$$

Στο σχήμα 5-4 έχουμε παραστήσει γραφικά τις μεταβολές των διακυμάνσεων σ_k των σφαλμάτων φάσης σε συνάρτηση με τον αύξοντα αριθμό του κυματοδηγού φράγματος k στην περίπτωση ενός 16x16 AWG με $M=64$ κυματοδηγούς φράγματος α) με απόσταση καναλιών $\Delta f_{ch}=100\text{GHz}$ και β) με απόσταση καναλιών $\Delta f_{ch}=10\text{GHz}$. Και στις δύο περιπτώσεις η ελεύθερη φασματική περιοχή FSR του AWG ισούται με $N_{ch}\Delta f_{ch}$ όπου $N_{ch}=16$, ο αριθμός των καναλιών του AWG. Τα μήκη των κυματοδηγών του AWG δίνονται από την

$$L_m = L_0 + m\Delta L = L_0 + m \frac{c}{n_{eff,o} FSR} \quad (5.25)$$

Στο παράδειγμα του σχήματος 5-4 έχουμε θέσει $L_0=10000\mu\text{m}$ και $n_{eff,o}=1.5$. Παρατηρούμε πως και στις δύο περιπτώσεις η εξάρτηση του σ_k είναι σχεδόν γραμμική από το k , δηλαδή της μορφής

$$\sigma_k \cong \sigma_0 + \frac{k\Delta\sigma}{M-1} \quad (5.26)$$

όπου M είναι το πλήθος των κυματοδηγών φράγματος και $\Delta\sigma = \sigma_{M-1} - \sigma_0$. Οι παράμετροι $\Delta\sigma$ και σ_0 μπορούν να προσδιορισθούν με παραβολή των σ_k με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς k . Παρατηρούμε πως στην περίπτωση που μπορεί να αγνοηθεί το $\langle \Delta L_m^2 \rangle$ τότε τα σ_k γράφονται ως εξής:

$$\sigma_k = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{neff} (L_0 + k\Delta L) = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{neff} L_0 + k \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{neff} \Delta L \quad (5.27)$$

Επομένως στην περίπτωση όπου αγνοούμε τα σφάλματα φάσης λόγω της ψηφιοποίησης της μάσκας τότε όντως τα σ_k έχουν γραμμική εξάρτηση ως προς το k και

$$\sigma_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{neff} L_0 \quad (5.28)$$

$$\Delta\sigma = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_{neff} \Delta L (M-1) \quad (5.29)$$

Από το σχήμα 5-4 γίνεται αντιληπτό πως τα σφάλματα φάσης έχουν μεγαλύτερη κατά μέσο όρο διακύμανση στην περίπτωση της μικρότερης απόστασης μεταξύ των διαδοχικών καναλιών. Τούτο οφείλεται στο ότι όσο μικραίνει το Δf_{ch} και το $FSR=N_{ch}\Delta f_{ch}$ τόσο αυξάνεται το $\Delta L=c/(n_{eff,o}FSR)$. Επομένως αναμένουμε πως τα σφάλματα φάσης θα έχουν σημαντικότερη επίδραση σε ένα AWG με μικρή απόσταση καναλιών Δf_{ch} .

5.5 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

Στην παράγραφο 4.4 υποθέσαμε σιωπηλά πως το φαινόμενο της σύζευξης μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος δεν παίζει κανένα ρόλο στα σφάλματα φάσης. Ωστόσο η σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος τείνει να συσχετίσει τα σφάλματα μεταξύ των κυματοδηγών. Αν η συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων φάσης είναι ισχυρή, τότε η μελέτη της επίδρασης των σφαλμάτων φάσης θα πρέπει να λάβει υπόψη της την συσχέτιση αυτή, κάτι που σημαίνει πως σε μεγάλο βαθμό η γεωμετρία και η διάταξη των κυματοδηγών θα παίζουν σημαντικό ρόλο. Θα δούμε ωστόσο πως σε πρακτικές περιπτώσεις η συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων φάσης λόγω σύζευξης παίζει μικρό ρόλο.

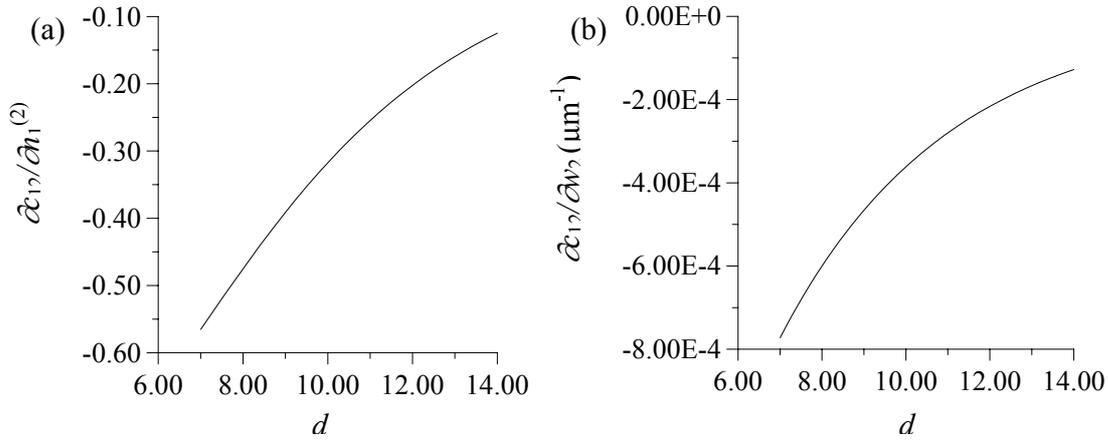
Για τη μελέτη της σύζευξης μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των συζευγμένων τρόπων που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3 [HH89]. Ας θεωρήσουμε τρεις κυματοδηγούς, η μεταβολή του πλάτους $A_1(z)$ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου του μεσαίου, συσχετίζεται με τα πλάτη $A_0(z)$ και $A_2(z)$ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου των γειτονικών του βάσει της σχέσης,

$$\frac{d}{dz} A_1(z) = -j\beta A_1(z) - jc_{10}A_0(z) - jc_{12}A_2(z) \quad (5.30)$$

όπου c_{10} και c_{12} είναι οι συντελεστές σύζευξης μεταξύ του κεντρικού κυματοδηγού και των δύο γειτονικών του ενώ $\beta=2\pi n_{eff}/\lambda$ είναι η σταθερά διάδοσης του κεντρικού κυματοδηγού (απουσία σύζευξης). Αν διαιρέσουμε με $A_1(z)$ και ολοκληρώσουμε ως προς z , τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη ολοκληρωτική μορφή:

$$A_1(z) = A_1(0) \exp\left(-j\beta z - j\int_0^z c_{10}(z') \frac{A_0(z')}{A_1(z')} dz' - j\int_0^z c_{12}(z') \frac{A_2(z')}{A_1(z')} dz'\right) \quad (5.31)$$

Από την (5.31) είναι πλέον φανερός ο τρόπος με τον οποίο η σύζευξη εξαιτίας της ύπαρξης των γειτονικών κυματοδηγών επηρεάζει τη φάση του κεντρικού. Μία απόκλιση των χαρακτηριστικών των γειτονικών κυματοδηγών από τις προκαθορισμένες τιμές τους θα γίνει αισθητή στη φάση στον κεντρικό κυματοδηγό μέσω της μεταβολής των συντελεστών σύζευξης c_{10} και c_{12} . Για μικρές τέτοιες αποκλίσεις οι παράγωγοι των c_{10} και c_{12} μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε την εξάρτησή τους από τη μεταβολή των χαρακτηριστικών των κυματοδηγών. Αν για παράδειγμα, Δw_2 είναι μία μικρή μεταβολή του πλάτους της διατομής του κυματοδηγού, τότε η μεταβολή του συντελεστή σύζευξης c_{12} θα ισούται με $(\partial c_{12}/\partial w_2)\Delta w_2$. Η μεταβολή της φάσης $\Delta\phi_{12}$ του κεντρικού κυματοδηγού που συντελείται λόγω της μεταβολής του συντελεστή σύζευξης δίνεται από την σχέση



Σχήμα 5-5: Σχέση μεταξύ των παραγώγων $\partial\phi_{12}/\partial n_1^{(2)}$ και $\partial\phi_{12}/\partial w_2$ σε συνάρτηση της απόστασης d μεταξύ των πυρήνων των κυματοδηγών 1 και 2.

$$\Delta\phi_{12} = \Delta w_2 \int_0^z \frac{\partial c_{12}}{\partial w_2} \frac{A_2(z)}{A_1(z)} dz \quad (5.32)$$

Επομένως οι παράγωγοι του συντελεστή σύζευξης c_{12} καθορίζουν τη μεταβολή της φάσης του κυματοδηγού 1 από τις κατασκευαστικές ατέλειες του κυματοδηγού 2. Στην περίπτωση του AWG, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 3 η σύζευξη δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε πως $A_1(z) \cong A_2(z)$ και επομένως

$$\Delta\phi_{12} \cong \Delta w_2 \int_0^z \frac{\partial c_{12}}{\partial w_2} dz \quad (5.33)$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για τις υπόλοιπες παραγώγους του συντελεστή σύζευξης c_{12} .

Στο σχήμα 5.5 έχουμε παραστήσει γραφικά τις παραγώγους $\partial\phi_{12}/\partial n_1^{(2)}$ (όπου $n_1^{(2)}$ είναι ο δείκτης διάθλασης του πυρήνα του κυματοδηγού 2) και $\partial\phi_{12}/\partial w_2$ σε συνάρτηση με την απόσταση d των κέντρων των πυρήνων των κυματοδηγών 1 και 2. Η γραφική παράσταση έχει γίνει για $w_1=w_2=4\mu\text{m}$ (όπου w_1 είναι το πλάτος του πυρήνα του κυματοδηγού 1), ύψη πυρήνα $h_1=h_2=4\mu\text{m}$, δείκτες διάθλασης πυρήνα $n_1^{(1)}=n_1^{(2)}=1.5$, ενώ η διαφορά μεταξύ του δείκτη διάθλασης του πυρήνα και του περιβάλλοντος διηλεκτρικού θεωρείται ίση με $\Delta=0.33\%$ (οπότε $n_2=1.495$). Η αρχική απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυματοδηγών είναι ίση με $7\mu\text{m}$, κάτι που σημαίνει πως μεταξύ των πυρήνων τους μεσολαβεί κενό $3\mu\text{m}$. Οι παράγωγοι των συντελεστών σύζευξης έχουν υπολογιστεί βάσει της μεθόδου του ενεργού δείκτη διάθλασης. Με την ίδια μέθοδο οι παράγωγοι της σταθεράς διάδοσης $\partial\beta/\partial n_1^{(1)}=1.29$ και $\partial\beta/\partial w_1=8 \times 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$. Συγκρίνοντας τις τιμές αυτές με τις τιμές των παραγώγων του συντελεστή σύζευξης, παρατηρούμε πως ενώ έχουν αρχικά την ίδια τάξη μεγέθους, οι τιμές των $\partial\phi_{12}/\partial n_1^{(2)}$ και $\partial\phi_{12}/\partial w_2$ γρήγορα μειώνονται όσο οι κυματοδηγοί απομακρύνονται. Λαμβάνοντας υπόψη πως σε ένα AWG οι κυματοδηγοί φράγματος, στο μεγαλύτερο τμήμα τους απέχουν αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από ότι στους συζευκτές αστέρα (και επομένως μπορούν να θεωρηθούν πρακτικά χωρίς σύζευξη μακριά από τους συζευκτές αστέρα), έπεται πως το σφάλμα φάσης που οφείλεται στις ατέλειες των γειτονικών κυματοδηγών θα είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους μικρότερο από ότι το σφάλμα φάσης λόγω της μεταβολής του β από τις ατέλειες του κεντρικού κυματοδηγού. Πρέπει επιπλέον να σημειωθεί πως το παραπάνω παράδειγμα, αποτελεί μία μάλλον ακραία περίπτωση σύζευξης. Συνήθως οι κυματοδηγοί έχουν Δ μεγαλύτερο από 0.33% , επειδή τούτο επιτρέπει την κατασκευή

κυματοδηγών με μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας και επομένως η τελική διάταξη έχει μικρότερες διαστάσεις. Με άλλα λόγια στα συνήθη AWG, η συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων φάσης λόγω σύζευξης των κυματοδηγών θα είναι ακόμα μικρότερη.

Πρόσφατα, μία πειραματική μελέτη [MOM02] φανέρωσε πως τα σφάλματα φάσης του AWG, είναι δυνατό να έχουν μία μικρή συσχέτιση η οποία επιβαρύνει τις επιδόσεις του AWG. Η συσχέτιση αυτή οφείλεται στη διαδικασία κατασκευής και είναι εν γένει δύσκολο να μετρηθεί πειραματικά. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια, τα σφάλματα φάσης θα θεωρηθούν ανεξάρτητα και επομένως τα αποτελέσματα που θα λάβουμε θα αποτελούν το άνω όριο των επιδόσεων που μπορούμε να επιτύχουμε στην πράξη.

5.6 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Η συνάρτηση μεταφοράς του κεντρικού καναλιού στην ιδανική περίπτωση (απουσία σφαλμάτων φάσης) είναι όπως είδαμε στο κεφάλαιο 4,

$$H_{ideal}(v) = \sum_{k=0}^{M-1} C_k \exp(j2\pi kv) \quad (5.34)$$

όπου C_k είναι το ποσοστό της οπτικής ισχύος που εισάγεται στον κυματοδηγό k και $v=(f-f_0)/FSR$ είναι η κανονικοποιημένη συχνότητα γύρω από την κεντρική οπτική συχνότητα του AWG. Παρουσία σφαλμάτων φάσης δ_k σε κάθε ένα από τους κυματοδηγούς του AWG, η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως εξής

$$H(v) = \sum_{k=0}^{M-1} C_k \exp(j2\pi kv) \exp(j\delta_k) \quad (5.35)$$

Στα συμβατικά AWG, οι συντελεστές C_k έχουν μία Gaussian εξάρτηση και όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, οι κυματοδηγοί του φράγματος είναι τοποθετημένοι με τέτοιο τρόπο ώστε ο λόγος $R_i = \min(C_k)/\max(C_k)$ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερος ώστε οι δευτερεύοντες λοβοί της συνάρτησης μεταφοράς (5.34) να έχουν χαμηλό ύψος. Στα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν, η τιμή που χρησιμοποιήθηκε είναι $R_i=2\%$. Ας σημειωθεί ωστόσο, ότι ως ένα βαθμό η συμπεριφορά της συνάρτησης μεταφοράς (5.35) είναι πρακτικά ανεξάρτητη από την τιμή του R_i . Πράγματι μεταβάλλοντας τις τιμές του R_i από 1% έως 5%, στην περίπτωση ενός AWG με $M=50$, θεωρήσαμε αρκετούς συνδυασμούς τιμών των μεγεθών $\Delta\sigma$ και σ_0 , η μέγιστη τιμή που παρατηρήσαμε στη μεταβολή του ύψους του υψηλότερου δευτερεύοντος λοβού ήταν μικρότερη από 0.5dB σε κάθε περίπτωση. Τούτο συμφωνεί και με τις παρατηρήσεις της αναφοράς [LWC01]. Επομένως, βάση των προηγούμενων η στατιστική συμπεριφορά της (5.35) θα εξαρτάται από τα εξής τρία μεγέθη: το M , το $\Delta\sigma$ και το σ_0 .

Στην ανάλυση που ακολουθεί, έχουμε υποθέσει πως όλα τα AWG είναι συμβατικά, δηλαδή πως έχουν συνάρτηση μεταφοράς Gaussian. Στην περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς έχει ομαλοποιηθεί, τότε οι συντελεστές C_k δεν έχουν Gaussian μορφή και επομένως απαιτείται διαφορετική ανάλυση.

5.6.1 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΙΣΧΥΟΣ

Η μέση τιμή της συνάρτησης ισχύος $T(v)=|H(v)|^2$ του AWG θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\langle T(v) \rangle = \sum_{k,l=0}^{M-1} C_k C_l \exp(j2\pi(k-l)v) \langle \exp(j(\delta_k - \delta_l)) \rangle \quad (5.36)$$

Επειδή τα σφάλματα φάσης θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έπεται πως $\langle \exp(j(\delta_m - \delta_n)) \rangle = \langle \exp(j(\delta_m)) \rangle \langle \exp(j(\delta_n)) \rangle$, για $n \neq m$ και $\langle \exp(j(\delta_m - \delta_n)) \rangle = 1$ για $n = m$. Επίσης αν τα σφάλματα φάσης θεωρηθούν Gaussian τυχαίες μεταβλητές με διακύμανση $\langle \delta_k^2 \rangle = \sigma_k^2$ τότε, $\langle \exp(j\delta_k) \rangle = \exp(-\sigma_k^2/2)$ και η (5.36) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \langle T(v) \rangle &= \sum_{k \neq l} C_k C_l \exp(j2\pi(k-l)v) \exp(-\frac{1}{2}(\sigma_k^2 + \sigma_l^2)) + \sum_{k=0}^{M-1} C_k^2 \\ &= \left| \sum_{k=0}^{M-1} C_k \exp(-\sigma_k^2/2) \exp(j2\pi kv) \right|^2 + \sum_{k=0}^{M-1} C_k^2 (1 - \exp(-\sigma_k^2)) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Το τρίτος μέλος της (5.37) προκύπτει αν προσθέσουμε στον πρώτο όρο το $\sum C_k \exp(-\sigma_k^2)$ και το αφαιρέσουμε από το δεύτερο. Όπως φαίνεται από το τρίτο μέρος της (5.37), η μέση τιμή του $T(v)$ μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα: Ένα το οποίο παρουσιάζει μία εξάρτηση από τη συχνότητα και ένα που είναι σταθερό. Αν υποθέσουμε πως τα σφάλματα φάσης έχουν όλα την ίδια διακύμανση, $\sigma_k = \sigma$, τότε

$$\langle T(v) \rangle = \exp(-\sigma^2) T_{ideal}(v) + (1 - \exp(-\sigma^2)) \sum_{k=0}^{M-1} C_k^2 \quad (5.38)$$

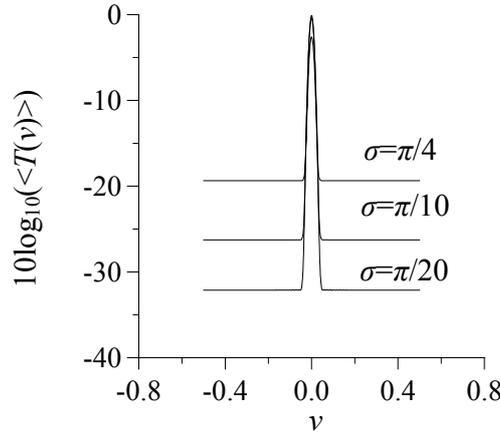
όπου $T_{ideal}(v) = |H_{ideal}(v)|^2$ η συνάρτηση μεταφοράς ισχύος ενός AWG χωρίς σφάλματα φάσης. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3 οι δευτερεύοντες λοβοί του $T_{ideal}(v)$ έχουν ύψος μικρότερο από -50dB και επομένως στην περιοχή των δευτερευόντων λοβών ο πρώτος όρος του αθροίσματος της (5.38) είναι αμελητέος και

$$\langle T(v) \rangle \cong (1 - \exp(-\sigma^2)) \sum_{k=0}^{M-1} C_k^2 \quad (5.39)$$

Η (5.39) υποδηλώνει πως οι δευτερεύοντες λοβοί της συνάρτησης μεταφοράς έχουν μέση τιμή ανεξάρτητη από τη συχνότητα. Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση όπου τα σ_k δεν έχουν όλα την ίδια τιμή, η (5.39) αντικαθίσταται με την εξής εξίσωση:

$$\langle T(v) \rangle \cong \sum_{k=0}^{M-1} C_k^2 (1 - \exp(-\sigma_k^2)) \quad (5.40)$$

Βάσει των (5.40) και (5.39) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των δευτερευόντων λοβών της συνάρτησης μεταφοράς του AWG και επομένως να έχουμε μία εικόνα της ποιότητας απομόνωσης του ανεπιθύμητου θορύβου λόγω διαφωνίας καναλιών. Αξίζει να σημειωθεί πως σύμφωνα με τις (5.39)-(5.40) η μέση τιμή των δευτερευόντων λοβών είναι η ίδια και επομένως η διαφωνία δεν δημιουργείται μονάχα από τα γειτονικά κανάλια, των οποίων η κεντρική συχνότητα βρίσκεται κοντά στον κεντρικό λοβό αλλά και από τα πιο απομακρυσμένα. Τούτο φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 5-6 όπου έχουμε παραστήσει γραφικά τη μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος (5.39) για ένα AWG με 65 κυματοδηγούς φράγματος και διάφορες τιμές του σ . Παρατηρούμε πως ακόμα και για μία τιμή του σ της τάξης του $\pi/20$, οι δευτερεύοντες λοβοί της συνάρτησης μεταφοράς έχουν μέση τιμή γύρω στα -30dB από -50dB, που έχουν στην ιδανική περίπτωση, απουσία των σφαλμάτων φάσης. Το σχήμα 5-6 αποτελεί μία πρώτη ένδειξη της κρισιμότητας των σφαλμάτων φάσης στις επιδόσεις του AWG. Ωστόσο, δεν παρέχει καμία πληροφορία για το μέγιστο ύψος των δευτερευόντων λοβών, μία σημαντική παράμετρο που



Σχήμα 5-6: Μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος για ένα AWG με $M=65$, για διάφορες τιμές της διακύμανσης σ των σφαλμάτων φάσης δ_k .

συνήθως χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει την απομόνωση του AWG και η οποία θα εξετασθεί στη συνέχεια.

Στην κεντρική συχνότητα $v=0$ του AWG η μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος είναι:

$$\langle T(0) \rangle \cong \exp(-\sigma^2) \quad (5.41)$$

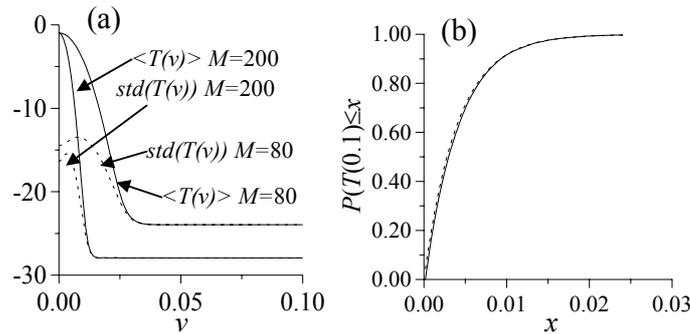
Για να συνάγουμε την (5.41), χρησιμοποιούμε την (5.38) και το γεγονός ότι $T_{ideal}(0)=1$, αγνοώντας το δεύτερο όρο του αθροίσματος ο οποίος, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5-6 για μικρές τιμές του σ , έχει τιμή πολύ μικρότερη από τη μονάδα. Η (5.41) υποδηλώνει ότι εξαιτίας των σφαλμάτων φάσης, εισάγονται στην διάταξη απώλειες ισχύος αφού το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς μετακινείται από το 1 (μέγιστο του $T_{ideal}(v)$) στο $\exp(-\sigma^2)<1$. Οι απώλειες (σε dB) που εισάγονται δίνονται από την σχέση

$$L(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{\langle T(0) \rangle}{T_{ideal}(0)} \right) = 10\sigma^2 \log_{10} e = 4.324\sigma^2 \quad (5.42)$$

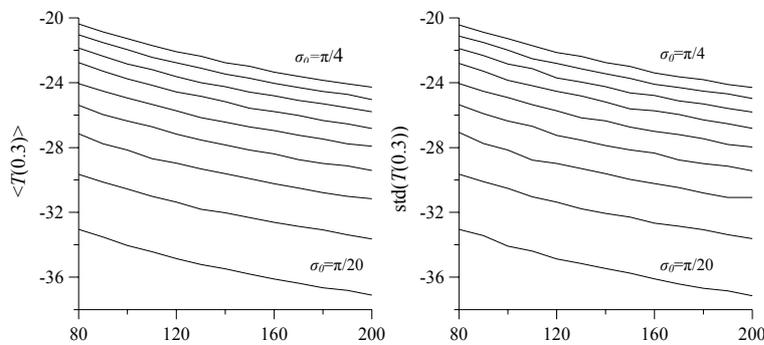
Χρησιμοποιώντας την (5.42) βρίσκουμε πως οι απώλειες λόγω των σφαλμάτων φάσης είναι -0.42dB για $\sigma=\pi/10$ και -2.67dB για $\sigma=\pi/4$. Με μία πρώτη ματιά οι τιμές αυτές δεν αποτελούν μεγάλες τιμές απωλειών, αλλά αν κανείς λάβει υπόψη πως με κατάλληλο σχεδιασμό οι απώλειες ενός ιδανικού AWG (χωρίς σφάλματα φάσης) μπορούν να γίνουν μικρότερες από -0.5dB [CD97], καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι απώλειες λόγω σφαλμάτων φάσης μπορούν να αποτελέσουν σημαντικό μέρος των συνολικών απωλειών.

5.6.2 ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΙΣΧΥΟΣ

Μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει τη μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος ενός AWG. Σημαντική πληροφορία για τη στατιστική συμπεριφορά των δευτερευόντων λοβών μπορεί να αντληθεί από τη διακύμανση της. Για παράδειγμα αν γνωρίζουμε πως η μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς είναι 10^{-3} (-30dB), η πληροφορία αυτή είναι σχεδόν άχρηστη αν οι δευτερεύοντες λοβοί έχουν διακύμανση 10^{-2} καθώς τούτο σημαίνει πως υπάρχει μεγάλη πιθανότητα οι δευτερεύοντες λοβοί να βρίσκονται κοντά στο 10^{-2} (-20dB). Με άλλα λόγια είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε και τη διακύμανση των δευτερευόντων λοβών για να αποκτήσουμε μία



Σχήμα 5-7: (α) η διακύμανση (διακεκομμένες γραμμές) και η μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος (συνεχείς γραμμές) για την περίπτωση όπου $\Delta\sigma = \sigma_0 = \pi/10$ και $M=80, 200$ και (β) η αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας του $T(v)$ για $v=0.1$, για την περίπτωση ενός AWG με $M=80$, $\sigma_0 = \pi/10$ και $\Delta\sigma=0$.



Σχήμα 4.8: Γραφικές παραστάσεις της μέσης τιμής και της διακύμανσης της συνάρτησης μεταφοράς

πιο πλήρη εικόνα της στατιστικής συμπεριφοράς τους. Το ίδιο συμβαίνει και για τις απώλειες του AWG. Αν η διακύμανση του $T(0)$ είναι πολύ μεγάλη τότε η μέση τιμή των απωλειών που υπολογίζουμε με την (5.42) δεν θα έχει μεγάλη πρακτική αξία.

Δυστυχώς ο υπολογισμός της διακύμανσης $\sigma_{T(v)} = \langle T(v)^2 \rangle - \langle T(v) \rangle^2$ του $T(v)$ είναι αρκετά δυσκολότερος από τους υπολογισμούς της παραγράφου 5.5.1 και η τελική έκφραση είναι αρκετά πιο πολύπλοκη. Μία αναλυτική παρουσίαση των υπολογισμών καθώς και η τελική σχέση, δίνεται στο σχετικό παράρτημα.

Στο σχήμα 5-7(α) απεικονίζεται γραφικά η διακύμανση και η μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος ενός AWG για $\Delta\sigma = \sigma_0 = \pi/10$, με $M=200$ και $M=80$. Παρατηρούμε πως έξω από τον κύριο λοβό, η διακύμανση και η μέση τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται, κάτι που αποτελεί χαρακτηριστικό μίας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής. Στο σχήμα 5-7(β) έχουμε υπολογίσει αριθμητικά την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας του $T(0.1)$ για $\Delta\sigma=0$, $\sigma_0 = \pi/10$ και $M=80$, υπολογίζοντας 1000 φορές το $T(0.1)$ και χρησιμοποιώντας κάθε φορά τυχαία δ_m που παράγονται από μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών με Gaussian κατανομή. Στο ίδιο σχήμα έχουμε απεικονίσει με διακεκομμένες γραμμές την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής με την ίδια διακύμανση με εκείνη του $T(0.1)$. Από την εξαιρετική συμφωνία των δύο καμπυλών συνάγουμε πως το $T(0.1)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μεγάλη ακρίβεια.

Στο σχήμα 5-8 έχουμε απεικονίσει τη μέση τιμή και τη διακύμανση του $T(0.3)$ για μία πληθώρα από τιμές σ_0 και M για $\Delta\sigma=0$. Η διακύμανση και η μέση τιμή του $T(0.3)$ έχει υπολογιστεί αριθμητικά βάσει 1000 δειγμάτων συναρτήσεων μεταφοράς όπως περιγράψαμε και στην προηγούμενη παράγραφο. Επομένως αναμένουμε πως οι δευτερεύοντες λοβοί του AWG

ακολουθούν μία εκθετική κατανομή. Τούτο μπορεί να αποδειχθεί και θεωρητικά στην περίπτωση όπου τα δ_m είναι μικρά, οπότε $\exp(j\delta_m) \cong 1 + j\delta_m$ και η συνάρτηση μεταφοράς δίδεται από την

$$H(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m \exp(j2\pi m\nu) + j \sum_{m=0}^{M-1} C_m \delta_m \exp(j2\pi m\nu) \quad (5.43)$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι η συνάρτηση μεταφοράς του AWG απουσία των σφαλμάτων φάσης η οποία έχει πολύ χαμηλούς δευτερεύοντες λοβούς. Στην περιοχή των δευτερευόντων λοβών επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς θα δίνεται προσεγγιστικά από την

$$T(\nu) = |H(\nu)|^2 \cong \left| \sum_{m=0}^{M-1} C_m \delta_m \exp(j2\pi m\nu) \right|^2 \quad (5.44)$$

Για να αποδείξουμε πως το $T(\nu)$ ακολουθεί μία εκθετική κατανομή, θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές $R(\nu)$ και $Y(\nu)$ που αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης μεταφοράς στην περιοχή των δευτερευόντων λοβών,

$$R(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m \delta_m \sin(2\pi m\nu) \quad (5.45)$$

$$Y(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m \delta_m \cos(2\pi m\nu) \quad (5.46)$$

Εφόσον τα δ_m έχουν θεωρηθεί τυχαίες Gaussian μεταβλητές, έπεται πως και τα $R(\nu)$ και $Y(\nu)$, ως γραμμικός συνδυασμός των δ_m , θα είναι επίσης τυχαίες Gaussian μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και διακυμάνσεις

$$\langle R^2(\nu) \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 \sin^2(2\pi m\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 \cos(4\pi m\nu) \quad (5.47)$$

$$\langle Y^2(\nu) \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 \cos^2(2\pi m\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 \cos(4\pi m\nu) \quad (5.48)$$

Η συσχέτιση των $R(\nu)$ και $Y(\nu)$ δίνεται από τη σχέση

$$\langle R(\nu)Y(\nu) \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 \cos(2\pi m\nu) \sin(2\pi m\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 \sin(4\pi m\nu) \quad (5.49)$$

Διερευνώντας τις εξισώσεις (5.47) και (5.48) ανακαλύπτουμε πως οι διακυμάνσεις των δύο τυχαίων μεταβλητών $R(\nu)$ και $Y(\nu)$ δίνονται από το άθροισμα ενός σταθερού όρου (το πρώτο άθροισμα) και ενός δεύτερου όρου που μοιάζει με μία συνάρτηση μεταφοράς AWG που έχει όμως κατανομή ισχύος $C_m^2 \sigma_m^2$. Αυτή η κατανομή ισχύος είναι αρκετά ομαλή (δεν παρουσιάζει ασυνέχειες) και ο λόγος $\min\{C_m^2 \sigma_m^2\}/\max\{C_m^2 \sigma_m^2\}$ θα είναι ακόμα μικρότερος από το λόγο της κατανομής C_m . Για παράδειγμα αν $\sigma_m = \sigma$ για κάθε m θα έχουμε $\min\{C_m^2 \sigma_m^2\}/\max\{C_m^2 \sigma_m^2\} = R_i^2$ και επομένως η απότομη μετάβαση στο 0 στα άκρα της κατανομής θα είναι πολύ μικρότερη από αυτήν των συντελεστών C_m . Τούτο σημαίνει πως οι δευτερεύοντες λοβοί του δεύτερου αθροίσματος των (5.47)-(5.48) θα είναι πολύ χαμηλοί και εάν το ν δεν είναι πολύ κοντά στο 0 ή στο $\frac{1}{2}$, θα έχουμε

$$\langle R^2(\nu) \rangle = \langle Y^2(\nu) \rangle \cong \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^2 \sigma_m^2 = \frac{\langle T(\nu) \rangle}{2} \quad (5.50)$$

Βάσει της ίδιας λογικής, μπορούμε να συνάγουμε ότι

$$\langle R(v)Y(v) \rangle \ll \langle R^2(v) \rangle = \langle Y^2(v) \rangle \quad (5.51)$$

αρκεί το v να μην είναι πολύ κοντά στο 0 ή στο $\frac{1}{2}$. Από τις προηγούμενες εξισώσεις συνάγουμε πως οι δύο τυχαίες μεταβλητές $R(v)$ και $Y(v)$ έχουν την ίδια διακύμανση και είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Στην περίπτωση όπου το v είναι κοντά στο 0 ή στο $\frac{1}{2}$, βρισκόμαστε μέσα στον κύριο λοβό των δευτέρων αθροισμάτων των $\langle R^2(v) \rangle$ και $\langle Y^2(v) \rangle$ όπου δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τη συνεισφορά τους. Εφόσον τα R και Y αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του H , αντίστοιχα έπεται πως

$$T(v) = |H(v)|^2 = R^2(v) + Y^2(v) \quad (5.52)$$

Αν ορίσουμε και την τυχαία μεταβλητή $W(v)$ ως

$$W(v) = \tan^{-1} \frac{Y(v)}{R(v)} \quad (5.53)$$

όπου $W(v) \in [0, 2\pi]$, τότε οι μεταβλητές R και Y σχετίζονται με τις T και W ως εξής:

$$R(v) = T(v) \cos W(v) \quad (5.54)$$

$$Y(v) = T(v) \sin W(v) \quad (5.55)$$

Για να βρούμε την πυκνότητα πιθανότητας του $T(v)$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα του μετασχηματισμού των τυχαίων μεταβλητών [Sam73]. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας f_{RY} των R και Y σχετίζεται με την συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητας f_{TW} των T και W βάσει της σχέσης

$$f_{TW}(t, w) = f_{RY}(r, y) |J| \quad (5.56)$$

όπου $|J|$ η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα Jacobi του μετασχηματισμού (5.54)-(5.55). Πραγματοποιώντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial W}(t, w) & \frac{\partial Y}{\partial W}(t, w) \\ \frac{\partial R}{\partial T}(t, w) & \frac{\partial Y}{\partial T}(t, w) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \quad (5.57)$$

Εφόσον οι R και Y είναι Gaussian ανεξάρτητες μεταβλητές με διακύμανση που δίνεται στην (5.50), η συνδυασμένη πυκνότητα πιθανότητάς τους δίνεται από την

$$f_{RY}(r, y) = \frac{1}{\pi \langle T(v) \rangle} \exp\left(-\frac{r^2 + y^2}{\langle T(v) \rangle}\right) \quad (5.58)$$

δηλαδή από το γινόμενο των επιμέρους πυκνοτήτων πιθανότητας των R και Y . Χρησιμοποιώντας την (5.57) και (5.58) συνάγουμε ότι

$$f_{TW}(t, w) = \frac{1}{2\pi \langle T(v) \rangle} \exp\left(-\frac{t}{\langle T(v) \rangle}\right) \quad (5.59)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς w στο διάστημα $[0, 2\pi]$ βρίσκουμε την πυκνότητα πιθανότητας του T ως εξής:

$$f_T(t) = \int_0^{2\pi} f_{TW}(t, w) dw = \frac{1}{\langle T(v) \rangle} \exp\left(-\frac{t}{\langle T(v) \rangle}\right) \quad (5.60)$$

Σύμφωνα με την (5.60) το T είναι μία εκθετική τυχαία κατανομή, οπότε αποδείξαμε τον ισχυρισμό ότι οι δευτερεύοντες λοβοί της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος ακολουθούν μία εκθετική κατανομή.

5.7 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΟΣ ΛΟΒΟΥ

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως το μέγεθος το οποίο συνήθως χρησιμοποιείται για το χαρακτηρισμό των επιδόσεων του AWG από άποψη διαφωνίας είναι το μέγιστο ύψος T_{max} των δευτερευόντων λοβών. Δυστυχώς το T_{max} δεν επιδέχεται εύκολα θεωρητικής ανάλυσης όπως το τυπικό ύψος ενός δευτερευόντος λοβού, οπότε πρέπει να καταφύγουμε αναγκαστικά σε υπολογισμό ενός μεγάλου μεγέθους από συναρτήσεις μεταφοράς με τη βοήθεια υπολογιστή και κάθε φορά να υπολογίζουμε το μέγιστο των δευτερευόντων λοβών, για διάφορες τιμές των $\Delta\sigma, \sigma_0$ και M . Με τον τρόπο αυτό είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη μέση τιμή μ , την τυπική απόκλιση s και την αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(T_{max} \leq x)$ του T_{max} . Εξετάζοντας τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, διαπιστώνουμε πως οι συναρτήσεις $\mu(\sigma_0, \Delta\sigma, M)$ και $s(\sigma_0, \Delta\sigma, M)$ έχουν τη μορφή:

$$\mu(M, \sigma_0, \Delta\sigma) \cong \mu_0(M) + \mu_1(\sigma_0, \Delta\sigma) \quad (\text{σε dB}) \quad (5.61)$$

$$s(M, \sigma_0, \Delta\sigma) \cong s_0(M) + s_1(\sigma_0, \Delta\sigma) \quad (\text{σε dB}) \quad (5.62)$$

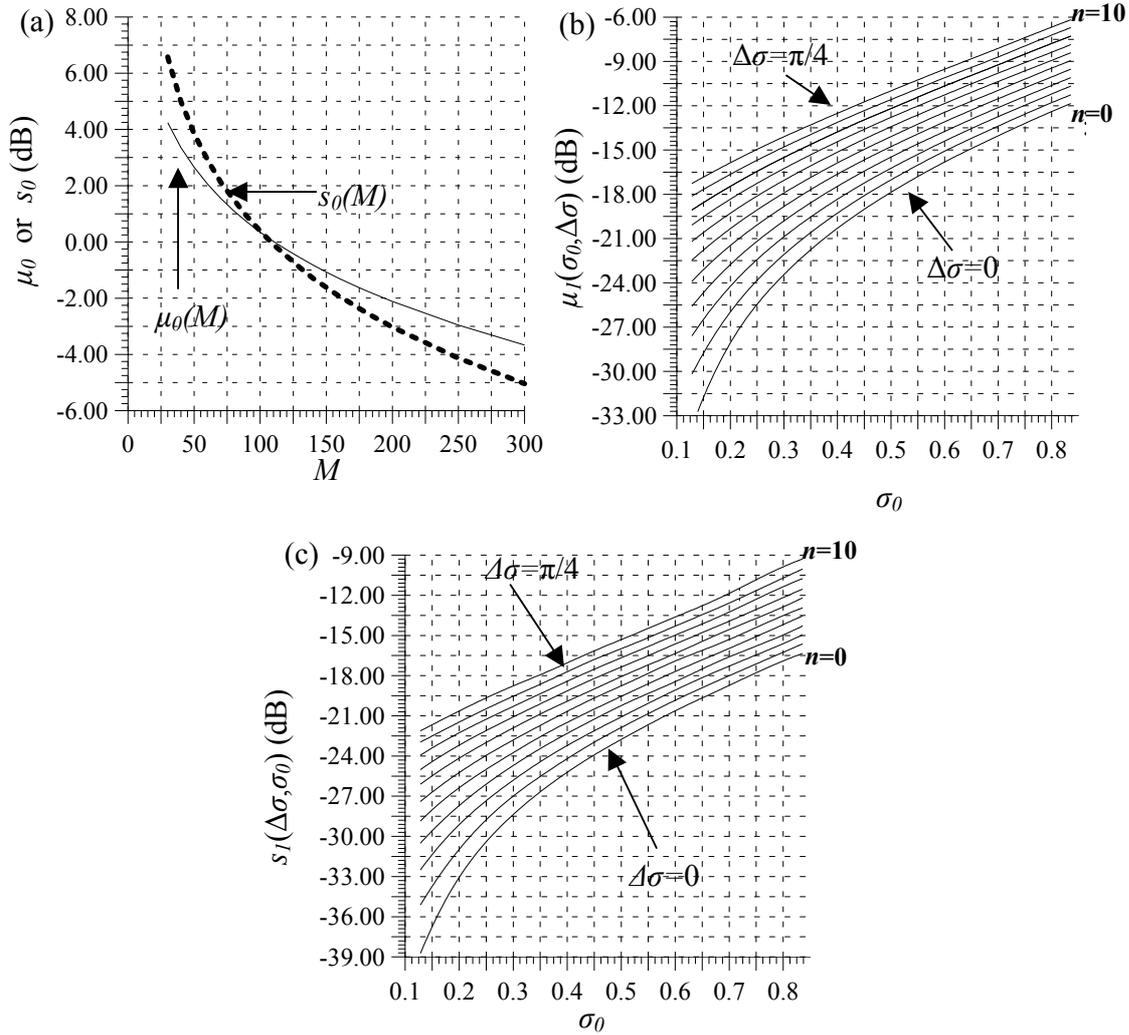
Σύμφωνα λοιπόν με τις παραπάνω εξισώσεις, η μέση τιμή και η διακύμανση του T_{max} μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δύο συναρτήσεων, μίας που εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των κυματοδηγών M και μίας που εξαρτάται από τα σ_0 και $\Delta\sigma$. Σημειώνεται πως οι (5.61)-(5.62) προήρθαν από την εξέταση των δειγμάτων της $T(v)$ για διάφορες τιμές των M, σ_0 και $\Delta\sigma$. Οι συναρτήσεις μ_0 και μ_1 μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\mu_0(M) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} \mu(\sigma_0^{(k)}, \Delta\sigma^{(l)}, M) \quad (5.63)$$

$$\mu_1(\sigma, \Delta\sigma) = \frac{1}{N_3} \sum_{k=0}^{N_3} \mu(\sigma_0, \Delta\sigma, M^{(k)}) \quad (5.64)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.63) η συνάρτηση μ_0 υπολογίζεται ως η μέση τιμή της συνάρτησης $\mu(\sigma_0, \Delta\sigma, M)$ που υπολογίστηκε από τα δείγματα της $T(v)$ ως προς τα μεγέθη $\Delta\sigma$ και σ_0 . Επίσης $\sigma_0^{(k)}$ και $\Delta\sigma^{(l)}$ για $0 \leq k \leq N_1$ και $0 \leq l \leq N_2$ είναι οι τιμές του σ_0 και του $\Delta\sigma$ οι οποίες θεωρήθηκαν στις εξομοιώσεις. Για παράδειγμα, οι τιμές που θεωρήσαμε για το σ_0 είναι $\sigma_0^{(k)} = k\pi/40$ και $N_1 = 10$. Στο σχήμα 5-9 έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τις συναρτήσεις μ_0, s_0, μ_1 και s_1 για τις διάφορες τιμές του M , του σ_0 και του $\Delta\sigma$.

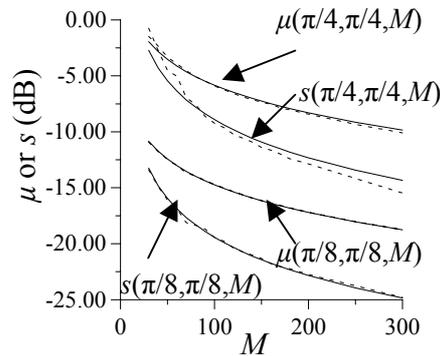
Οι καμπύλες του σχήματος 5-9 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του μέγιστου δευτερευόντος λοβού για οποιοδήποτε συμβατικό AWG, εάν γνωρίζουμε τον αριθμό των κυματοδηγών φράγματος M , καθώς και τις παραμέτρους $\Delta\sigma$ και σ_0 που υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.28)-(5.29). Στο σχήμα 5-10 έχουμε απεικονίσει γραφικά τις συναρτήσεις μ και s που λαμβάνονται από τις συναρτήσεις μ_0, s_0, μ_1, s_1 (με συνεχείς γραμμές) βάσει των προσεγγίσεων (5.61)-(5.62) για διάφορες τιμές του M και για $\Delta\sigma = \sigma_0 = \pi/8$ και για



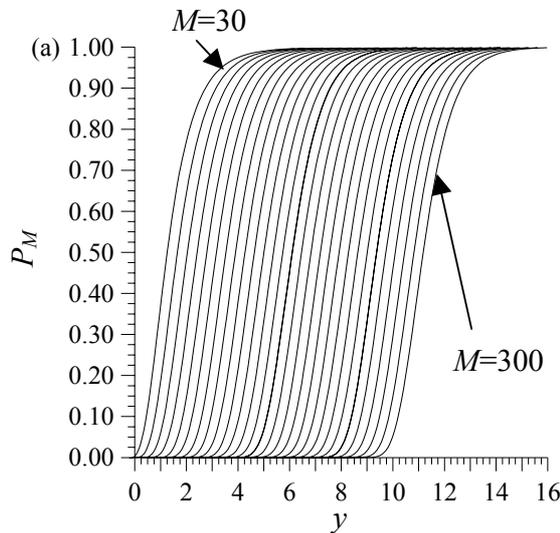
Σχήμα 5-9: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων μ_0 , μ_1 , s_0 και s_1 για τις διάφορες τιμές των σ_0 , M και $\Delta\sigma=n(\pi/40)$.

$\Delta\sigma=\sigma_0=\pi/4$. Επίσης (με διακεκομμένες γραμμές) έχουμε απεικονίσει τις τιμές των συναρτήσεων μ και s που υπολογίσαμε απευθείας βάση των προσομοιώσεων που πραγματοποιήσαμε (χωρίς να χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις (5.61)-(5.62)).

Στο σχήμα 5-10 έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τις τιμές των μ και s που λαμβάνουμε από την προσομοίωση και από τις (5.61)-(5.62) για $\sigma_0=\Delta\sigma=\pi/8$ και $\sigma_0=\Delta\sigma=\pi/4$. Παρατηρούμε πως η ακρίβεια των (5.61)-(5.62) είναι πολύ καλή ακόμα και για μεγάλα σφάλματα φάσης. Επομένως δεδομένων των $\Delta\sigma, \sigma_0$ και M ενός AWG, τα διαγράμματα του σχήματος 5-9, μαζί με τις εξισώσεις (5.61)-(5.62) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του μέγιστου δευτερεύοντος λοβού με μεγάλη ακρίβεια.



Σχήμα 5-10: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων μ και s που υπολογίζονται βάσει των συναρτήσεων μ_0, s_0, μ_1 και s_1 (συνεχής γραμμές) και απευθείας βάση των προσομοιώσεων (διακεκομμένες γραμμές) για $\sigma_0 = \Delta\sigma = \pi/8$ και $\sigma_0 = \Delta\sigma = \pi/4$.



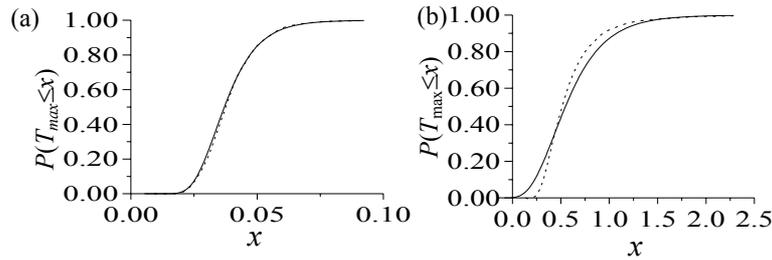
Σχήμα 5-11: Οι συναρτήσεις $P_M(y)$ για τιμές του $M=30, 40, 50, 60, \dots, 300$

Για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα του τρόπου συμπεριφοράς του μέγιστου του δευτερεύοντος λοβού T_{max} θα πρέπει επίσης να υπολογίσουμε και την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητάς του, $P(T_{max} \leq x)$. Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση που έγινε από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, ήτανε πως αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό $y = (x - \mu)/s$, τότε η μετασχηματισμένη συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας του y εξαρτάται κυρίως από το $\Delta\sigma$ και σ_0 . Επομένως

$$P(T_{max} \leq x) \cong P_M(y) \quad (5.65)$$

όπου δεδομένου του M , οι συναρτήσεις $P_M(y)$ εξαρτώνται μονάχα από το y . Οι συναρτήσεις $P_M(y)$ υπολογίζονται από τις μέσες τιμές των συναρτήσεων $P(T_{max} \leq x)$ ως προς το M .

Οι διάφορες συναρτήσεις $P_M(y)$ που υπολογίσαμε με τον τρόπο αυτό έχουν αναπαρασταθεί γραφικά στο σχήμα 5-11. Για να είναι διακριτές οι συναρτήσεις μεταξύ τους κάθε μία συνάρτηση έχει μετατοπισθεί στον οριζόντιο άξονα κατά tM όπου η ποσότητα t είναι ίση με 0.036. Η τιμή αυτή του t είναι το ένα δέκατο της μέσης τιμής $\langle \mu/s \rangle$ της συνάρτησης μ/s ως προς



Σχήμα 5-12: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων αθροιστικής πυκνότητας πιθανότητας του T_{max} που υπολογίστηκαν κατευθείαν από τις προσομοιώσεις (διακεκομμένες γραμμές) και από τις συναρτήσεις $P_M(y)$ (συνεχείς γραμμές) στην περίπτωση όπου α) $\sigma_0 = \Delta\sigma = \pi/8$ με $M=80$ και β) $\sigma_0 = \Delta\sigma = \pi/4$ με $M=50$

τα μεγέθη $\Delta\sigma, \sigma_0$ και M . Στο σχήμα 5-12 έχουμε απεικονίσει γραφικά την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας που υπολογίσαμε κατευθείαν από τις προσομοιώσεις (διακεκομμένες γραμμές) μαζί με τη συνάρτηση πιθανότητας που έχουμε υπολογίσει από τις συναρτήσεις $P_M(y)$ του σχήματος 5-11 (συνεχείς γραμμές). Το x που αντιστοιχεί στο εκάστοτε y , υπολογίζεται βάση της σχέσης $x = sy + \mu - M\sigma$. Από το σχήμα 5-12 παρατηρούμε πως οι προσεγγιστικές τιμές της συνάρτησης που υπολογίζονται από την (5.65) είναι αρκετά ακριβείς ακόμα και για μεγάλες τιμές σφαλμάτων φάσης.

5.8 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΔΟΣΕΩΝ ΤΟΥ AWG

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθείται, ώστε να εκτιμηθούν οι επιδόσεις του ενός AWG, έχοντας κάποια πληροφορία για την ακρίβεια της διαδικασίας κατασκευής του. Έστω λοιπόν πως είναι γνωστή η αναμενόμενη απόκλιση $\langle \Delta p^2 \rangle$ των χαρακτηριστικών των κυματοδηγών του φράγματος από τις προδιαγεγραμμένες τους τιμές. Υπολογίζοντας τις παραγώγους του δείκτη διάθλασης με τη μέθοδο που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 4.3 και εφαρμόζοντας την εξίσωση (5.2) μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση του δείκτη διάθλασης σ_{neff}^2 για κάθε πόλωση TE και TM. Χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή καθώς και το αναμενόμενο σφάλμα εξαιτίας της πεπερασμένης διακριτικότητας της μάσκας $\langle \Delta L^2 \rangle$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση σ_m των σφαλμάτων φάσης για κάθε κυματοδηγό του φράγματος βάσει της εξίσωσης (5.24). Οι παράμετροι σ_0 και $\Delta\sigma$ υπολογίζονται προσεγγίζοντας την σχέση σ_m με μία συνάρτηση της μορφής $\sigma_0 + m\Delta\sigma/(M-1)$. Έχοντας τις παραμέτρους αυτές καθώς και τον αριθμό κυματοδηγών του φράγματος M μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του ύψους των δευτερευόντων λοβών της συνάρτησης μεταφοράς. Οι δευτερεύοντες λοβοί θα ακολουθούν μία εκθετική κατανομή της οποίας γνωρίζουμε την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε και την αναμενόμενη τιμή των απωλειών ισχύος λόγω των σφαλμάτων φάσης με τη βοήθεια της (5.41).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα του σχήματος 5-9, βρίσκουμε την αναμενόμενη τιμή μ και τη διακύμανση s του μεγίστου T_{max} των δευτερευόντων λοβών χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των (5.61)-(5.62). Έχοντας τα μ και s μπορούμε να υπολογίσουμε και την αθροιστική πυκνότητα πιθανότητας του T_{max} χρησιμοποιώντας την (5.65) και το σχήμα 5-11.

Για παράδειγμα αν χρησιμοποιήσουμε τις κατασκευαστικές ανοχές που αναφέρονται στην [GSS97], την εξίσωση (5.1) και το πίνακα 5-1, υπολογίζουμε τη διακύμανση του δείκτη διάθλασης για τον τρόπο TE ως $\sigma_{neff} = 2.1 \times 10^{-6} \mu m^{-1}$. Υποθέτουμε πως πρόκειται για ένα 16×16

AWG με 65 κυματοδηγούς φράγματος, του οποίου οι κυματοδηγοί είναι τετράγωνοι με διατομή $7 \times 7 \mu\text{m}$. Αν υποθέσουμε επίσης πως το σφάλμα λόγω της ψηφιοποίησης της μάσκας είναι $\langle \Delta L^2 \rangle^{1/2} = 0.025 \mu\text{m}$, πως η προδιαγεγραμμένη τιμή του δείκτη διάθλασης του βασικού τρόπου TE είναι $n_{\text{eff},0} \cong 1.5$, και πως το μικρότερο μήκος του κυματοδηγού φράγματος είναι $L_0 = 10000 \mu\text{m}$ τότε εφαρμόζοντας την (5.24) βρίσκουμε πως $\sigma_0 = 0.17 \text{rad}$ και πως $\sigma_{64} = 0.22 \text{rad}$. Η παράμετρος $\Delta\sigma$ μπορεί να προσεγγισθεί από την ποσότητα $\sigma_{65}, \sigma_0 = 0.05 \text{rad}$. Ας σημειωθεί πως οι παράμετροι σ_0 και $\Delta\sigma$ που υπολογίσαμε είναι σχεδόν ίδιες με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίζουμε με γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης σ_m . Εφόσον γνωρίζουμε τις τιμές των M , $\Delta\sigma$ και σ_0 προχωρούμε στην εκτίμηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης του μέγιστου δευτερεύοντος λοβού. Από τα διαγράμματα του σχήματος 5-9, έχουμε $\mu_0(M) \cong \mu_0(65) \cong \mu_0(70) \cong 2.5 \text{dB}$ και $\mu_1(\sigma_0, \Delta\sigma) = \mu_1(0.17, 0.05) \cong \mu_1(0.17, \pi/40) \cong -25 \text{dB}$. Η μέση τιμή του T_{max} υπολογίζεται από το άθροισμα των δύο αυτών τιμών, $\mu = \mu_1 + \mu_0 \cong -22.5 \text{dB}$. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε πως η διακύμανση του μέγιστου λοβού είναι $s \cong -27.5 \text{dB}$. Για να βρούμε τη συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας του T_{max} χρησιμοποιούμε το σχήμα 5-11. Για $M=65$ έχουμε πως $P_M(y) = P_{65}(y) \cong P_{70}(y)$ και από το σχήμα 5-11 βρίσκουμε πως $P_{65}(y) \cong P_{70}(y) = 80\%$ για $y \cong 3.8$. Το αντίστοιχο x δίνεται από την $x = sy + \mu - Mts = 0.014 = -18.5 \text{dB}$. Άρα το 80% των κατασκευασμένων AWG περιμένουμε να έχει μέγιστο ύψος δευτερεύοντος λοβού κάτω από -18.5dB . Είναι λοιπόν φανερό πως η παραπάνω διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκτήσουμε μία εικόνα για την απόδοση μίας διαδικασίας κατασκευής AWG εφόσον οι κατασκευαστικές ανοχές είναι γνωστές.

6. ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ ΤΟΥ AWG ΣΕ ΕΝΑ ΑΜΙΓΩΣ ΟΠΤΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το προηγούμενο κεφάλαιο ήταν αφιερωμένο στη μελέτη της επίδρασης των σφαλμάτων φάσης στο ύψος των δευτερευόντων λοβών της συνάρτησης μεταφοράς του AWG. Το επόμενο βήμα είναι να διερευνήσουμε τις επιπτώσεις της ύπαρξης των δευτερευόντων λοβών στις επιδόσεις ενός οπτικού δικτύου. Στο φυσικό επίπεδο, το πλέον κατάλληλο μέγεθος για το χαρακτηρισμό των επιδόσεων διακίνησης πληροφορίας είναι η πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη (bit error rate – BER) καθώς η απόδοση των ανωτέρων επιπέδων του δικτύου εξαρτώνται άμεσα από αυτή.

Η ύπαρξη των δευτερευόντων λοβών προκαλεί θόρυβο διαφωνίας από τα υπόλοιπα κανάλια του συστήματος που αυξάνει την τιμή του BER στο δέκτη. Η εκτίμηση του BER πειραματικά είναι σχετικά απλή, μετά την τοποθέτηση των AWG στο δίκτυο. Ωστόσο, κατά τη διαδικασία του σχεδιασμού του δικτύου θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος που να επιτρέπει είτε τον αναλυτικό είτε τον αριθμητικό υπολογισμό του BER ώστε να καθορισθούν οι απαιτούμενες προδιαγραφές των AWG που πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά την υλοποίηση του δικτύου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία απλή, παθητικό οπτικό σύνδεση $N \times N$ σαν αυτό του σχήματος 2-40 του κεφαλαίου 2 που επιτρέπει N^2 ταυτόχρονες οπτικές συνδέσεις μεταξύ N κόμβων χρησιμοποιώντας μονάχα N μήκη κύματος. Η οικονομία στον αριθμό των μήκων κύματος οφείλεται στην επαναχρησιμοποίηση μήκους κύματος, η οποία συντελείται εξαιτίας των κυκλικών ιδιοτήτων του AWG (κεφάλαιο 2). Στην παραπάνω σύνδεση εμφανίζονται δύο είδη διαφωνίας: η ενδοκαναλική διαφωνία (in-band crosstalk) [GMB99],[ISA99] και η εξωκαναλική διαφωνία (out-band crosstalk). Η ενδοκαναλική διαφωνία βρίσκεται στο ίδιο μήκος κύματος με το οπτικό σήμα, ενώ η εξωκαναλική διαφωνία βρίσκεται σε διαφορετικό μήκος κύματος και επομένως μπορεί να απομακρυνθεί χρησιμοποιώντας επιπλέον φιλτράρισμα στο δέκτη. Ωστόσο, η ενδοκαναλική διαφωνία, που όπως θα δούμε συνδέεται άμεσα με την επαναχρησιμοποίηση μήκους κύματος, δεν μπορεί να απομακρυνθεί και μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την τιμή του BER στο δέκτη. Επομένως σε ένα δίκτυο με επαναχρησιμοποίηση μήκους κύματος η ενδοκαναλική διαφωνία θέτει ένα όριο στις επιδόσεις του συστήματος και πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη.

Σε ένα σύστημα επικοινωνιών η τιμή της πιθανότητας σφάλματος του καναλιού εξαρτάται άμεσα από τη στατιστική συμπεριφορά του θορύβου. Στην περίπτωση της ενδοκαναλικής διαφωνίας ακολουθούνται δύο προσεγγίσεις. Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, αν ο αριθμός των καναλιών που παρεμβάλλονται στο σήμα είναι πολύ μεγάλος και τα κανάλια είναι στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε η πυκνότητα πιθανότητας του θορύβου μπορεί να θεωρηθεί Gaussian, εξαιτίας του θεωρήματος του κεντρικού ορίου (Central Limit Theorem – CLT) [EHR75, §3.4]. Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός του BER είναι σχετικά απλός και

λαμβάνει χώρα μέσω της συνάρτησης Q του Marcuim [Sam79, §3.4.2]. Η Gaussian προσέγγιση, έχει χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του BER σε μία $N \times N$ οπτική σύνδεση με AWG [TOT96]. Παρά το γεγονός πως το Gaussian μοντέλο είναι αρκετά απλό, εντούτοις δεν είναι εξακριβωμένο αν υπολογίζει το BER με μεγάλη ακρίβεια. Στην περίπτωση της μίας οπτικής σύνδεσης με AWG, για παράδειγμα, ενδέχεται ο αριθμός των καναλιών που παρεμβάλλονται στο ίδιο μήκος κύματος, να είναι μικρός και να μην έχουν όλα την ίδια ισχύ. Επομένως η πυκνότητα πιθανότητας (Probability Density Function – PDF) του θορύβου ενδέχεται να μην προσεγγίζει μία Gaussian με ικανοποιητική ακρίβεια. Επίσης στην [TOT96] δεν λήφθηκαν υπόψη ο θόρυβος βολής καθώς και το γεγονός πως τα bit των διαφόρων καναλιών μπορεί να μην είναι συγχρονισμένα μεταξύ τους [KHH99].

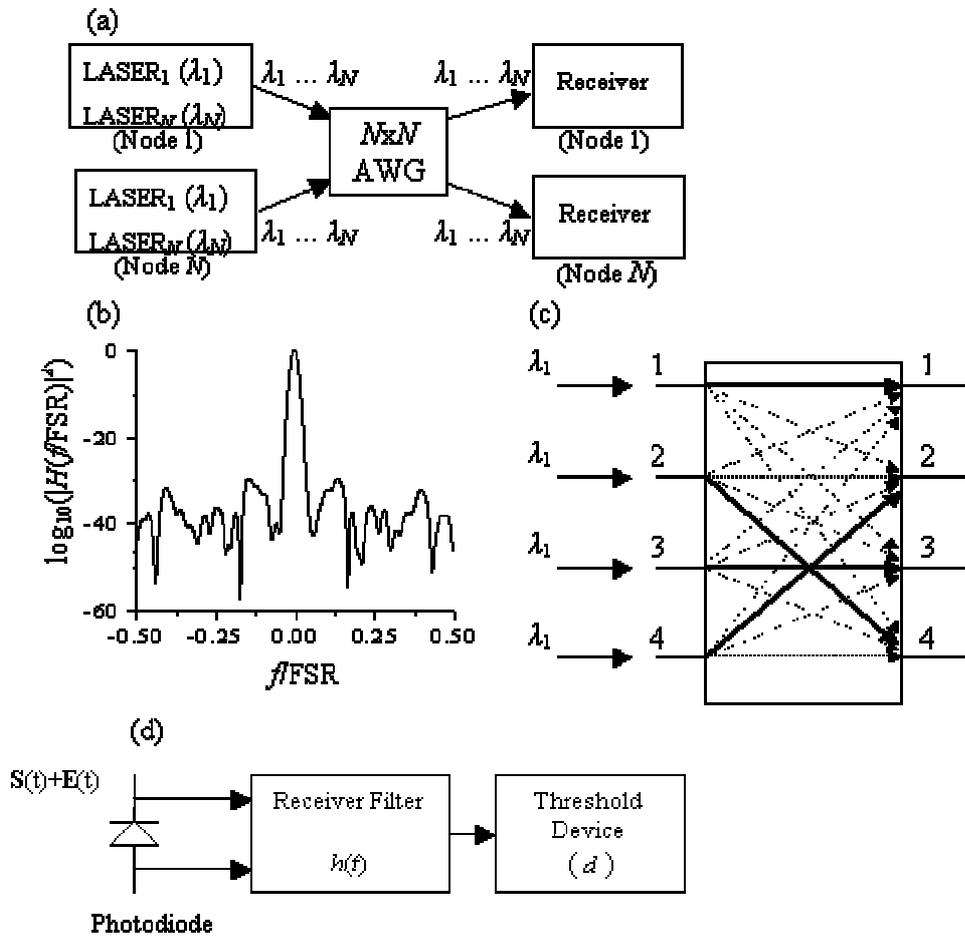
Δυστυχώς, η ακριβής PDF του ενδοκαναλικού θορύβου, δεν είναι γνωστή σε κλειστή μορφή. Στη περίπτωση όπου δεν γνωρίζουμε την PDF του θορύβου, ο υπολογισμός του BER μπορεί να συντελεσθεί χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση ροπών (Moment Generating Function – MGF) και την προσέγγιση saddle-point [Ein95, §5.2]. Αν η MGF είναι γνωστή σε κλειστή μορφή ή μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά, τότε το BER υπολογίζεται σχετικά εύκολα και με μεγάλη ακρίβεια, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Στην περίπτωση της ενδοκαναλικής διαφωνίας, η MGF του θορύβου είναι προσεγγιστικά γνωστή σε κλειστή μορφή [MT98]. Η μέθοδος saddle point έχει στο παρελθόν χρησιμοποιηθεί [MT98], για τον υπολογισμό του BER στην περίπτωση όπου τα παρεμβαλλόμενα κανάλια έχουν την ίδια ισχύ λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβολές της πόλωσης, το θόρυβο φάσης, το θόρυβο βολής καθώς και το θερμικό θόρυβο.

Στο παρών κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε την προσέγγιση saddle point για να υπολογίσουμε το BER σε μία $N \times N$ οπτική σύνδεση AWG, λαμβάνοντας υπόψη την ακριβή μεταβολή της συνάρτησης μεταφοράς του AWG στην περιοχή των δευτερευόντων λοβών και το πώς αυτή επηρεάζει τη στατιστική συμπεριφορά του ενδοκαναλικού θορύβου. Στον υπολογισμό της MGF θα λάβουμε υπόψη και την έλλειψη συγχρονισμού μεταξύ των bit των διαφόρων καναλιών η οποία αμελείται στην [TOT96]. Η MGF που χρησιμοποιείται λαμβάνει υπόψη της τη στατιστική συμπεριφορά των μεταβολών της φάσης και της πόλωσης των καναλιών. Το πλάτος των σημάτων διαφωνίας υπολογίζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς του AWG, λαμβάνοντας υπόψη τους δευτερευόντες λοβούς της, σε αντίθεση με τη [TOT96] όπου χρησιμοποιήθηκε η μέση διαφωνία. Επομένως το μοντέλο που θα περιγραφεί στη συνέχεια αποτελεί ένα εργαλείο για τη λεπτομερή μελέτη των επιπτώσεων του θορύβου διαφωνίας σε μια οπτική σύνδεση και θα το χρησιμοποιήσουμε για να διαπιστώσουμε την βαρύτητα των διαφόρων φαινομένων που επηρεάζουν τη στατιστική του θορύβου (π.χ. μεταβολές της πόλωσης, θόρυβος φάσης, κ.τ.λ.).

6.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ

6.2.1 ΓΕΝΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Μία $N \times N$ οπτική σύνδεση που χρησιμοποιεί έναν δρομολογητή μήκους κύματος AWG εικονίζεται στο σχήμα 6-1(α). Υπάρχουν N κόμβοι στο δίκτυο και κάθε κόμβος διαθέτει N πομπούς και N δέκτες. Το AWG έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε η ελεύθερη φασματική περιοχή του, FSR , να ισούται με N φορές την απόσταση των καναλιών Δf_{ch} . Κάθε κόμβος χρησιμοποιεί N μήκη κύματος $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ που είναι τα ίδια για κάθε κόμβο. Στο σχήμα 6-1(b) έχουμε γραφικά την κεντρική συνάρτηση μεταφοράς ισχύος $T(f/FSR) = |H(f/FSR)|^2$ ενός 16×16 AWG (με $M=65$ κυματοδηγούς φράγματος) του οποίου τα σφάλματα φάσης έχουν διακύμανση $\sigma_m = \sigma_0 = \pi/10$. Η συχνότητα f μετριέται γύρω από την κεντρική συχνότητα f_0 του AWG.



Σχήμα 6-1: (α) Μία οπτική σύνδεση $N \times N$ που χρησιμοποιεί έναν δρομολογητή AWG, (β) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός AWG 16×16 με $M=65$ κυματοδηγούς με σφάλματα φάσης δ_m που έχουν διακύμανση ίση με $\pi/10$. (γ) Δρομολόγηση του μήκους κύματος λ_1 από τις εισόδους του AWG στις εξόδους του (οι συνεχείς γραμμές αναπαριστούν τους επιθυμητούς δρόμους ενώ οι διακεκομμένες αναπαριστούν τους δρόμους των παρασιτικών σημάτων), (δ) ένα διάγραμμα τυπικού δέκτη.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, η συνάρτηση μεταφοράς του AWG $H_{pq}(f)$ μεταξύ της p θύρας εισόδου και της q θύρας εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$H_{pq}(f) = e_{pq} H(f - (p + q)\Delta f_{ch}) \quad (6.1)$$

Για να δούμε το πώς δημιουργείται ο θόρυβος ενδοκαναλικής διαφωνίας, θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα 6-1(c) το οποίο δείχνει πως τον τρόπο που το AWG κατευθύνει τα σήματα στο μήκος κύματος λ_1 από τις εισόδους του, στις εξόδους του. Για παράδειγμα, το σήμα που βρίσκεται στην είσοδο 1 και στο μήκος κύματος λ_1 θα πρέπει να καταλήξει στην έξοδο 1. Ωστόσο, εξαιτίας των δευτερευόντων λοβών της συνάρτησης μεταφοράς $H_{12}(f)$ ένα μικρό τμήμα του ίδιου σήματος θα καταλήξει στην έξοδο 2, στην οποία ιδανικά θα έπρεπε να καταλήξει μόνο το σήμα στο μήκος κύματος λ_1 , από την είσοδο 4. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι σε κάθε έξοδο του δρομολογητή, πέραν του επιθυμητού σήματος, υπάρχουν και παρασιτικές συνιστώσες στο ίδιο μήκος κύματος, από τις άλλες εισόδους του AWG. Οι παρασιτικές αυτές συνιστώσες, συνθέτουν τον ενδοκαναλικό θόρυβο διαφωνίας. Παρατηρούμε πως εφόσον σε κάθε έξοδο, οι συνιστώσες

προέρχονται από οπτικές πηγές που βρίσκονται σε διαφορετικούς κόμβους και επομένως οι συνιστώσες του ενδοκαναλικού θορύβου διαφωνίας θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ένα διάγραμμα τυπικού δέκτη παρουσιάζεται στο σχήμα 6-1(δ). Το οπτικό πεδίο που προσπίπτει στη φωτοδίοδο είναι το άθροισμα $\mathbf{S}+\mathbf{E}$, του σήματος \mathbf{S} και της ενδοκαναλικής διαφωνίας \mathbf{E} που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}_0 e^{j\phi_0} g_0(t) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{x}_i e^{j\phi_i} g_i(t) \quad (6.3)$$

όπου τα \mathbf{S} και \mathbf{E} είναι οι περιβάλλουσες του σήματος και του θορύβου ενδοκαναλικής διαφωνίας. Τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{x}_i καθορίζουν τη διεύθυνση της πόλωσης είτε του σήματος (εάν $i=0$) είτε των παρασιτικών συνιστωσών ($i \geq 1$). Οι φάσεις ϕ_i οφείλονται στο θόρυβο φάσης των οπτικών πηγών ενώ οι συναρτήσεις $g_i(t)$ περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του σήματος ($i=0$) και των παρασιτικών συνιστωσών ($i \geq 1$). Εξαιτίας του οπτικού σήματος, το φωτόρευμα $i(t)$ που διαρρέει τη φωτοδίοδο δίνεται από την

$$i(t) = \frac{\eta}{2hf} |\mathbf{S} + \mathbf{E}|^2 \cong \frac{\eta}{2hf} |g_0(t)|^2 + \frac{\eta}{hf} \operatorname{Re} \left\{ \sum_i \cos \theta_i g_i^*(t) g_0(t) e^{j(\phi_0 - \phi_i)} \right\} \quad (6.4)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η είναι η εσωτερική κβαντική απόδοση της φωτοδίοδου, h η σταθερά του Planck, ενώ το φωτόρευμα μετριέται σε φωτοηλεκτρόνια / δευτερόλεπτο. Επίσης θ_i είναι η γωνία μεταξύ των \mathbf{x}_i και \mathbf{x}_0 (οπότε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_0$ των \mathbf{x}_i και \mathbf{x}_0 θα ισούται με $\cos \theta_i$) και με g^* συμβολίζουμε το μιγαδικό συζυγές του g . Ας σημειωθεί πως στο τρίτο μέρος της (6.4) έχουμε αγνοήσει τον όρο $|\mathbf{E}|^2$ του αναπτύγματος του $|\mathbf{S}+\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{S}|^2 + |\mathbf{E}|^2 + 2\operatorname{Re}\{\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{E}\}$, θεωρώντας πως είναι αμελητέος σε σχέση με το θόρυβο $2\operatorname{Re}\{\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{E}\}$. Με άλλα λόγια έχουμε αγνοήσει τον θόρυβο λόγω του διακροτήματος διαφωνίας-διαφωνίας και θεωρούμε μονάχα τη συνεισφορά του θορύβου του διακροτήματος σήματος-διαφωνίας. Η σημασία του θορύβου διαφωνίας-διαφωνίας θα αναλυθεί στο κεφάλαιο 8.

Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τα μεγέθη έτσι ώστε $\eta/hf=1$. Στην έξοδο του ηλεκτρικού φίλτρου η μεταβλητή απόφασης του δέκτη, D , θα δίνεται από τη σχέση:

$$D(T) = \int_0^T h(T-t) i(t) dt \quad (6.5)$$

όπου με T έχουμε συμβολίσει τη διάρκεια του bit και με $h(t)$ την κρουστική απόκριση του φίλτρου. Αν για λόγους απλοποίησης υποθέσουμε πως το ηλεκτρικό φίλτρο είναι ένας ολοκληρωτής, τότε θα έχουμε $h(t)=1$ μέσα στο διάστημα $[0, T]$. Η μεταβλητή απόφασης D μπορεί να χωριστεί σε δύο συνεισφορές, μία συνεισφορά D_s η οποία οφείλεται στο σήμα και μία D_n που οφείλεται στον θόρυβο διαφωνίας σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$D_s(T) = \int_0^T |g_0(t)|^2 dt \quad (6.6)$$

$$D_n(T) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_i \cos \theta_i e^{-j(\phi_i - \phi_0)} \int_0^T g_i^*(t) g_0(t) dt \right\} \quad (6.7)$$

$$D(T) = D_n(T) + D_s(T) \quad (6.8)$$

Στην εξίσωση (6.7) έχουμε υποθέσει πως οι φάσεις ϕ_i αλλάζουν αργά με το χρόνο και πως μπορούν να θεωρηθούν σταθερές μέσα στη διάρκεια ενός bit. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι οι σύγχρονοι δίοδοι LASER έχουν εύρος γραμμής το πολύ μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες MHz και επομένως οι μεταβολές της φάσης είναι πολύ πιο αργές από τις μεταβολές του σήματος που είναι της τάξεως των μερικών GHz. Το ίδιο συμβαίνει και με τις μεταβολές της πόλωσης, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε πως και τα θ_i είναι σταθερά κατά τη διάρκεια μερικών bit.

Για να κάνουμε το μοντέλο όσο το δυνατό πιο γενικό θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη μεταβολή της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς του AWG με την συχνότητα, [YOK00] εξαιτίας των σφαλμάτων φάσης στους κυματοδηγούς του [SMK01]. Οι συναρτήσεις $g_i(t)$ θα πρέπει να θεωρηθούν μιγαδικές, δηλαδή

$$g_i(t) = |g_i(t)|e^{jw_i(t)} \quad (6.9)$$

όπου $w_i(t)$ είναι η φάση της συνάρτησης $g_i(t)$. Χρησιμοποιώντας την (6.9) στις (6.6)-(6.8) θα έχουμε

$$D(T) = G_0 + 2 \sum_i |G_i| \cos(\phi_i - r_i - \phi_0) \cos \theta_i \quad (6.10)$$

όπου τα G_i και r_i δίνονται από τις εξισώσεις

$$G_i = \int_0^T g_0(t) g_i^*(t) dt \quad (6.11)$$

$$r_i = \arg(G_i) \quad (6.12)$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 6-1(c), τα τμήματα του ενδοκαναλικού θορύβου που συνοδεύουν το σήμα, προέρχονται από διαφορετικές εισόδους. Επομένως, οι φάσεις ϕ_i μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες, αφού προέρχονται από διαφορετικές πηγές. Το ίδιο ισχύει και για τις γωνίες πόλωσης θ_i . Εφόσον τόσο οι ϕ_i όσο και οι θ_i είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0, 2\pi]$, οι ροπές του $\cos(\phi_i - r_i - \phi_0)$ θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$E \{ \cos^{2n+1}(\phi_i - r_i - \phi_0) | r_i, \phi_0 \} = 0 \quad (6.13)$$

$$E \{ \cos^{2n}(\phi_i - r_i - \phi_0) | r_i, \phi_0 \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\phi_i - r_i - \phi_0) d\phi_i = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (6.14)$$

Οι εξισώσεις (6.13) και (6.14) προκύπτουν αν αναπτύξουμε το $\cos^l \phi$ ως προς τα $\cos(k\phi)$, $1 \leq k \leq l$ και πραγματοποιήσουμε την ολοκλήρωση. Από τις (6.13) και (6.14) προκύπτει το συμπέρασμα πως οι ροπές του $\cos(\phi_i - r_i - \phi_0)$ είναι ανεξάρτητες από τα r_i και ϕ_0 . Επομένως, η στατιστική συμπεριφορά της D δεν αλλοιώνεται αν θεωρήσουμε πως $r_i = \phi_0 = 0$. Έτσι, η μεταβλητή απόφασης γράφεται ισοδύναμα:

$$D(T) = G_0 + 2 \sum_i |G_i| \cos \phi_i \cos \theta_i \quad (6.15)$$

6.2.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΤΟΥ AWG

Θεωρώντας την κεντρική θύρα εξόδου του AWG, οι συναρτήσεις $g_i(t)$ για $i > 0$, οφείλονται στη μη ιδανική απομόνωσή του και μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση

$$g_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(f) F_i(f) e^{j2\pi ft} df \quad (6.16)$$

Στην (6.16) η $H_i(f)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της εισόδου i του AWG και της κεντρικής εξόδου του, $F_i(f)$ είναι το φάσμα του i -οστού παρεμβλλόμενου σήματος του οποίου η κεντρική συχνότητα είναι στο ίδιο μήκος κύματος με το σήμα (εφόσον αποτελεί ενδοκαναλική διαφωνία). Θεωρώντας ότι η ομοιομορφία καναλιού είναι 1 για όλες τις εξόδους του AWG ($e_{pq} \cong 1$) και χρησιμοποιώντας τις κυκλικές ιδιότητες της συνάρτησης μεταφοράς του AWG, η συνάρτηση μεταφοράς $H_i(f)$ θα συνδέεται με την κεντρική συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ βάση της σχέσεως:

$$H_i(f + i\Delta f_{ch}) = H(f) = \sum_{k=-P}^P C_k \exp(j \frac{2\pi k}{FSR} f) \exp(j\delta_k) \quad (6.17)$$

Στην παραπάνω εξίσωση C_k είναι το ποσοστό ισχύος που εισάγεται στον k -οστό κυματοδηγό του φράγματος, f είναι η οπτική συχνότητα, ενώ τα δ_k είναι τα σφάλματα φάσης του AWG. Ο συνολικός αριθμός των κυματοδηγών φράγματος είναι $N_w = 2P + 1$.

Τα σφάλματα φάσης του AWG οφείλονται, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στις κατασκευαστικές ατέλειες των κυματοδηγών του φράγματος του AWG που προκαλούν μεταβολή της πραγματικής τιμής του δείκτη διάθλασης του βασικού τρόπου διάδοσης από την ονομαστική του τιμή. Αν θεωρήσουμε για απλότητα πως η διακύμανση σ_k των σφαλμάτων φάσης του k -οστού κυματοδηγού είναι σταθερή για κάθε k , δηλαδή πως $\sigma_k = \sigma$, τότε σύμφωνα με τη σχέση (6.39) το μέσο ύψος των δευτερευόντων λοβών θα είναι:

$$X = E\{|H(f)|^2\} \cong (1 - e^{-\sigma^2}) \sum_{k=-P}^P C_k^2 \quad (6.18)$$

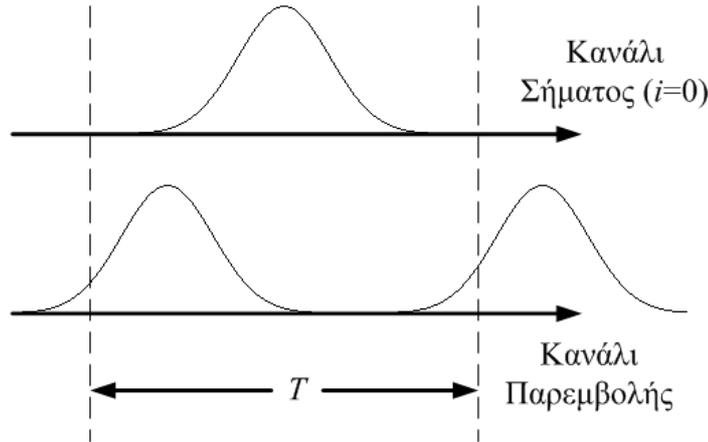
Η παραπάνω σχέση συνδέει το μέσο ύψος των δευτερευόντων λοβών X με τη διακύμανση σ των σφαλμάτων φάσης, δεδομένης της κατανομής ισχύος C_k στους κυματοδηγούς του φράγματος.

Στις προσομοιώσεις του κεφαλαίου αυτού, τα σφάλματα φάσης θα θεωρηθούν πως είναι Gaussian ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια διακύμανση. Ας σημειωθεί πως σε μία πραγματική οπτική σύνδεση τα σφάλματα φάσης του AWG που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί, μπορούν να μετρηθούν [YTI95] και επομένως η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ μπορεί να αναπαραχθεί με μεγάλη ακρίβεια. Επομένως το μοντέλο που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό μπορεί να εφαρμοσθεί και σε μία πραγματική οπτική σύνδεση, αν μετρηθούν τα σφάλματα φάσης του AWG, για να υπολογιστεί το BER του οπτικού σήματος.

6.2.3 ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΥ ΤΩΝ BIT

Για να συμπεριλάβουμε τη έλλειψη συγχρονισμού των bit του σήματος με τα bit της πληροφορίας θα πρέπει να θεωρήσουμε πως τα σήματα $f_i(t)$ τα οποία δημιουργούν τη διαφωνία (και αντιστοιχούν στα φάσματα $F_i(f)$) μπορεί να είναι μετατοπισμένα κατά μία τυχαία μετατόπιση τ_i . Εξαιτίας της γραμμικότητας της (6.16) θα πρέπει και οι συναρτήσεις $g_i(t)$ να παρουσιάζονται μετατοπισμένες κατά την ίδια τυχαία μετατόπιση τ_i . Έτσι οι συναρτήσεις G_i θα εξαρτώνται από το τ_i και θα δίνονται από την σχέση:

$$G_i(\tau_i) = \int_0^T g_0(t) g_i^*(t - \tau_i) dt \quad (6.19)$$



Σχήμα 6-2: Επικάλυψη των παλμών του σήματος με τους παλμούς του καναλιού παρεμβολής

Η μεταβλητή απόφασης $D(T)$ θα εξαρτάται από τις τυχαίες μετατοπίσεις των τ_i βάσει της σχέσεως:

$$D(T) = G_0 + 2 \sum_i |G_i(\tau_i)| \cos \phi_i \cos \theta_i \quad (6.20)$$

Αν υποθέσουμε πως οι χρονικές μετατοπίσεις μετριόνται σε σχέση με τη μετατόπιση του σήματος, τότε θα έχουμε $\tau_0=0$. Επίσης, η τιμή του G_i θα εξαρτάται από τα δύο bit a και b του καναλιού i που η διάρκειά τους έχει επικάλυψη με τη διάρκεια του bit του σήματος, βάσει της σχέσεως:

$$G_i^{ab}(\tau_i) = \int_0^T g_0(t) (a q_i^*(t - \tau_i) + b q_i^*(t + T - \tau_i)) dt \quad (6.21)$$

Στην (6.21), οι παλμοί $q_i(t)$ είναι οι παλμοί $g_i(t)$ στην περίπτωση όπου το bit του καναλιού i είναι 1. Αν υποθέσουμε πως η τυχαία μεταβλητή τ_i είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα του bit τότε μονάχα ένας παλμός $q_i(t)$ θα υπάρχει μέσα στο διάστημα $[0, T]$ στην περίπτωση όπου τα δύο bit του καναλιού i είναι διαφορετικά ($a \neq b$). Επομένως δεν έχει νόημα να ξεχωρίσουμε τις περιπτώσεις $a=1, b=0$ και $a=0, b=1$. Έτσι, για παράδειγμα η μέση τιμή του G_i^{ab} θα δίνεται από την

$$E\{G_i^{ab}\} = \frac{1}{4} E\{G_i^{11}\} + \frac{1}{2} E\{G_i^{01}\} \quad (6.22)$$

Στην (6.22) έχουμε υποθέσει ένα τέλειο λόγο σβέσης στο bit 0, οπότε $G_i^{00}=0$.

6.2.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΡΟΠΩΝ

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση γεννήτριας ροπών (MGF) ώστε να είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το BER μέσω της μεθόδου Saddle Point. Η MGF $M_i(s)$ του i -οστού καναλιού παρεμβολής, δίνεται από τη σχέση:

$$M_i(s) = E\{\exp[s|G_i(\tau_i)| \cos \theta_i \cos \phi_i]\} \quad (6.23)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $E\{2s \cos \phi \cos \theta_i\} = I_0^2(s)$ [MT98], όπου $I_0(s)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης [AS, §9.6], η συνάρτηση MGF $M_i(s)$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$M_i^{PPM}(s) = \frac{1}{4T} \int_0^T I_0^2(s|G_i^{11}(\tau)|) d\tau + \frac{1}{2T} \int_0^T I_0^2(s|G_i^{01}(\tau)|) d\tau + \frac{1}{4} \quad (6.24)$$

Τα αρχικά PPM σηματοδοτούν το συνυπολογισμό των μεταβολών της πόλωσης και της φάσης του σήματος καθώς και το γεγονός πως έχει ληφθεί υπόψη η έλλειψη συγχρονισμού των bit. Στην περίπτωση όπου δεν λάβουμε υπόψη την έλλειψη συγχρονισμού των bit ($\tau_i=0$), η συνάρτηση γεννήτριας ροπών δίνεται από την σχέση:

$$M_i^{PP}(s) = \frac{1}{2} I_0^2(s|G_i^{11}(0)|) + \frac{1}{2} \quad (6.25)$$

όπου τα αρχικά PP σηματοδοτούν το συνυπολογισμό των μεταβολών της πόλωσης και της φάσης του σήματος. Στην περίπτωση όπου είτε τα σήματα έχουν όλα την ίδια πόλωση ($\theta_i=0$) ή έχουμε αγνοήσει τον θόρυβο φάσης ($\phi_i=0$), τότε η MGF θα δίνεται από την

$$M_i^{PM}(s) = \frac{1}{4T} \int_0^T I_0(2s|G_i^{11}(\tau)|) d\tau + \frac{1}{2T} \int_0^T I_0(2s|G_i^{01}(\tau)|) d\tau + \frac{1}{4} \quad (6.26)$$

αν έχουμε λάβει υπόψη την έλλειψη συγχρονισμού των bit, ή από την

$$M_i^P(s) = \frac{1}{2} I_0(2s|G_i^{11}(0)|) + \frac{1}{2} \quad (6.27)$$

στην περίπτωση όπου τα bit των καναλιών παρεμβολής είναι συγχρονισμένα. Τέλος αν αγνοήσουμε τις μεταβολές της φάσης και της πόλωσης, η MGF θα δίνεται από την

$$M_i^M(s) = \frac{1}{4T} \int_0^T \exp(2s \operatorname{Re}\{G_i^{11}(\tau)\}) d\tau + \frac{1}{2T} \int_0^T \exp(2s \operatorname{Re}\{G_i^{01}(\tau)\}) d\tau + \frac{1}{4} \quad (6.28)$$

αν τα bit δεν θεωρούνται συγχρονισμένα και από την

$$M_i^{NONE}(s) = \frac{1}{2} \exp(2s \operatorname{Re}\{G_i^{11}(0)\}) + \frac{1}{2} \quad (6.29)$$

αν θεωρηθεί πως τα bit είναι συγχρονισμένα. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6.23)-(6.29) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση MGF των καναλιών παρεμβολής, ανάλογα με το ποια φαινόμενα επιθυμούμε να λάβουμε υπόψη μας (μεταβολές πόλωσης και φάσης, συγχρονισμός των bit). Έχοντας υπολογίσει τις MGF $M_i(s)$ για το κάθε κανάλι, μπορούμε να υπολογίσουμε την MGF του D στην περίπτωση όπου το bit του σήματος είναι 1, από τη σχέση:

$$M'_{D|1}(s) = \exp(sG_0) \prod_{i=1}^{N-1} M_i(s) \quad (6.30)$$

Η MGF $M'_{D|1}(s)$ είναι η MGF της μεταβλητής απόφασης χωρίς το θερμικό θόρυβο και το θόρυβο βολής. Στην παραπάνω εξίσωση το $\exp(sG_0)$ είναι η MGF του σήματος που για δεδομένα σφάλματα φάσης δ_k (και επομένως για δεδομένη $H_i(f)$) δεν παρουσιάζει τυχαίες μεταβολές (αφού $\tau_0=0$).

6.2.5 ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΒΟΛΗΣ

Κατά τον υπολογισμό της μεταβλητής απόφασης αγνοήσαμε το θόρυβο βολής και το θερμικό θόρυβο. Για τον ακριβή υπολογισμό του BER οι δύο αυτοί θόρυβοι θα πρέπει να ληφθούν υπόψη. Ο θόρυβος βολής λαμβάνεται εύκολα υπόψη με μία απλή αλλαγή μεταβλητής. Στην περίπτωση όπου το ηλεκτρικό φίλτρο είναι ένας ολοκληρωτής, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε στην MGF την μεταβλητή s με $e^s - 1$ [Ein95, §5]. Ο θερμικός θόρυβος είναι προσθετικός, λευκός Gaussian θόρυβος και επομένως για να ληφθεί υπόψη η MGF του D θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με $\exp(\sigma_{th}^2 s^2 / 2)$ που είναι η MGF του θερμικού θορύβου και καθορίζεται πλήρως από την ισχύ σ_{th}^2 του θερμικού θορύβου [Ein, §5]. Η τελική MGF στην περίπτωση όπου το bit σήματος είναι 1 θα δίνεται από την

$$M_{D|1}(s) = \exp\left(G_0(e^s - 1) + \frac{\sigma_{th}^2}{2}s^2\right) \prod_{i=1}^{N-1} M_i(e^s - 1) \quad (6.31)$$

Στην περίπτωση όπου το bit σήματος είναι 0, τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε πως η MGF θα δίνεται από την

$$M_{D|0}(s) = \exp\left(\frac{\sigma_{th}^2}{2}s^2\right) \quad (6.32)$$

αφού όταν το σήμα έχει τέλειο λόγο σβέσης τότε στην περίπτωση του bit 0, ο ηλεκτρικός θόρυβος διαφωνίας που δίνεται από το γινόμενο το σήματος επί τον οπτικό θόρυβο διαφωνίας, είναι μηδέν.

6.2.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BER ΑΠΟ ΤΗΝ MGF

Εφόσον η MGF της μεταβλητής απόφασης είναι γνωστή σε κλειστή μορφή ή μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά με μεγάλη ακρίβεια, τότε ο υπολογισμός του BER μπορεί να γίνει εύκολα βάσει της προσέγγισης Saddle Point. Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε τους τελικούς τύπους της μεθόδου, ενώ οι λεπτομέρειες για την απόδειξη τους αναφέρονται στο παράρτημα.

Αν η συνάρτηση $M_{D|1}(s)$ είναι γνωστή τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi_1(s)$ βάσει της σχέσης:

$$\psi_1(s) = \ln(M_{D|1}(s)) - sd - \ln|s| \quad (6.33)$$

όπου d είναι το κατώφλι απόφασης που χρησιμοποιούμε στο δέκτη. Η συνάρτηση $\psi_1(s)$ έχει ένα saddle point s_1 στον αρνητικό πραγματικό άξονα και η πιθανότητα σφάλματος στην περίπτωση όπου το bit του σήματος είναι 1, υπολογίζεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$P_{e1} = P\{D \leq d|1\} = \int_{-\infty}^d p_1(u) du \cong \frac{\exp(\psi_1(s_1))}{\sqrt{2\pi\psi_1'(s_1)}} \quad (6.34)$$

όπου $p_1(u)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής απόφασης, δεδομένου ότι το bit του σήματος είναι ίσο με 1.

Στην περίπτωση όπου το bit του σήματος ισούται με 0 τότε ο υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος γίνεται με παρόμοιο τρόπο από την MGF της μεταβλητής απόφασης $M_{D|0}(s)$. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $\psi_0(s)$ από την εξίσωση

$$\psi_0(s) = \ln(M_{D|0}(s)) - sd - \ln|s| \quad (6.34)$$

τότε, βρίσκοντας το σημείο καμπής s_0 στο θετικό πραγματικό άξονα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$P_{e0} = P\{D \geq d|0\} \cong \frac{\exp(\psi_0(s_0))}{\sqrt{2\pi\psi_0''(s_0)}} \quad (6.35)$$

Το BER στην περίπτωση του bit 0, θα οφείλεται μόνο στο θερμικό θόρυβο, όποτε δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο saddle point για το P_{e0} , το οποίο είναι γνωστό σε κλειστή μορφή [Ein95, §5]:

$$P_{e0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_{th}\sqrt{2}}\right) \quad (6.36)$$

Ας σημειωθεί πως η (6.36) ισχύει επειδή έχουμε υποθέσει ένα άπειρο λόγο σβέσης. Εάν ο λόγος σβέσης δεν είναι άπειρος, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και την οπτική διαφωνία λόγω του διακροτήματος του σήματος με τον οπτικό θόρυβο διαφωνίας. Η MGF $M_{D|0}(s)$ θα δίνεται από μία έκφραση παρόμοια με την (6.31) και η μέθοδος saddle point μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το P_{e0} με μεγάλη ακρίβεια. Το μέσο BER P_e θα δίνεται πάντα από τη σχέση:

$$P_e = \frac{1}{2}(P_{e1} + P_{e0}) \quad (6.37)$$

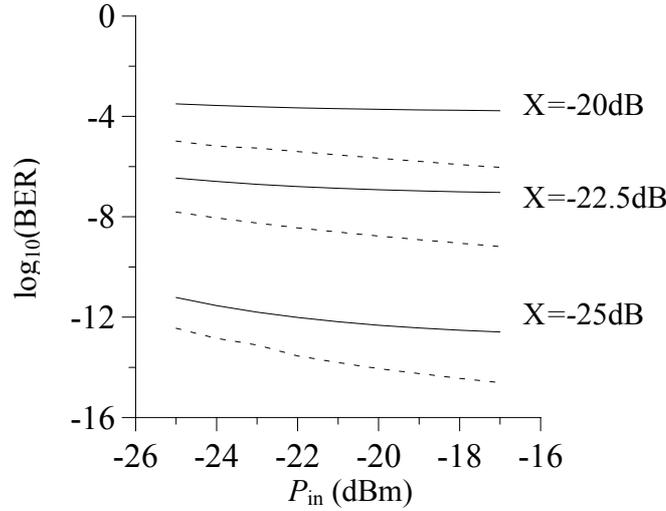
Το βέλτιστο κατώφλι $d=d_{opt}$ είναι το κατώφλι εκείνο για το οποίο η πιθανότητα σφάλματος λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της. Η τιμή του βέλτιστου κατωφλίου μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας αριθμητικά την εξίσωση $P_e'(d_{opt})=0$, όπου P_e' είναι η παράγωγος του BER ως προς το κατώφλι απόφασης.

6.3 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ GAUSSIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Η πιθανότητα σφάλματος μίας $N \times N$ παθητικής αμιγώς οπτικής σύνδεσης που στηρίζεται σε έναν δρομολογητή AWG μπορεί να υπολογιστεί σε μία πρώτη προσέγγιση βασιζόμενοι στο Gaussian μοντέλο. Ωστόσο, η Gaussian προσέγγιση ενδεχομένως να μην είναι ακριβής εφόσον τα σήματα παρεμβολής ενδέχεται να μην έχουν την ίδια ισχύ αλλά και την ίδια στατιστική κατανομή. Έτσι η σύγκλιση της πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής απόφασης στην Gaussian ασυμπτωτική μορφή μπορεί να είναι αργή ιδιαίτερα στις ουρές της. Στην παράγραφο αυτή, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που δίνει τόσο η μέθοδος saddle point όσο και το Gaussian μοντέλο για να διαπιστώσουμε κατά πόσο το τελευταίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητα σφάλματος.

Βάσει του Gaussian μοντέλου, ο θόρυβος στην περίπτωση όπου το bit σήματος είναι 1 θεωρείται μία Gaussian τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή ίση με m_s και διακύμανση ίση με σ_n^2 . Η πιθανότητα σφάλματος επομένως δίνεται από τη σχέση:

$$P_e = \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{m_s - d}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma_{th}}\right) \quad (6.38)$$



Σχήμα 6-3: Σύγκριση των τιμών του BER για διάφορες τιμές ισχύος κορυφής P_{in} και για τρεις διαφορετικές τιμές του, μέσω ύψους του δευτερεύοντος λοβού X . Με διακεκομμένες γραμμές είναι οι τιμές του BER που λαμβάνουμε με το Gaussian μοντέλο ενώ με συνεχείς οι τιμές που λαμβάνουμε με τη μέθοδο saddle point

Η μέση τιμή και η διακύμανση της μεταβλητής απόφασης μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από την εξίσωση (6.15). Πραγματοποιώντας τις πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη πως $E\{\cos^2\phi_i\} = E\{\cos^2\theta_i\} = 1/2$, έπεται πως

$$m_s = G_0 \quad (6.39)$$

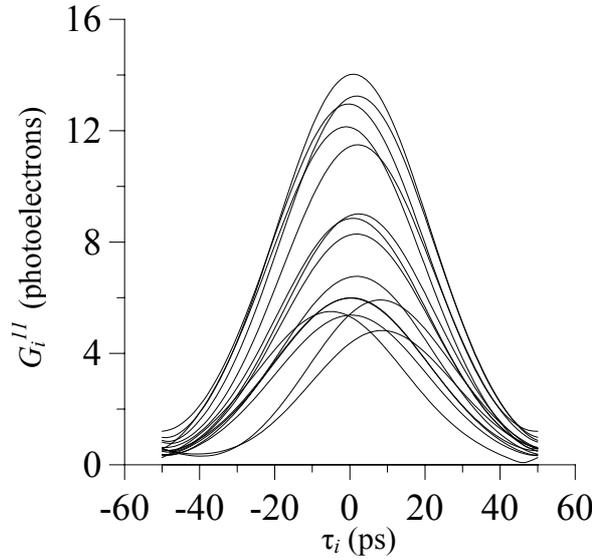
$$\sigma_n^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^T d\tau_i (G_i^{11}(\tau_i))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^T d\tau_i (G_i^{01}(\tau_i))^2 + G_0 + \sigma_{th}^2 \quad (6.40)$$

Παρατηρούμε πως στην (6.40) ο όρος G_0 αντιπροσωπεύει την ισχύ του θορύβου βολής.

Μία σύγκριση των αποτελεσμάτων της Gaussian προσέγγισης και της μεθόδου Saddle Point παρουσιάζεται στο σχήμα 6-3 για την περίπτωση ενός AWG 16x16 για τρεις διαφορετικές τιμές του μέσου ύψους των δευτερευόντων λοβών X . Τα σφάλματα φάσης δ_k έχουν υπολογιστεί από τα δείγματα δ_k^0 μίας γεννήτριας τυχαίων δειγμάτων με Gaussian κατανομή που έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση ίση με 1, βάσει της σχέσης:

$$\delta_k = \sigma(X)\delta_k^0 \quad (6.41)$$

Τα ίδια δείγματα δ_k^0 έχουν χρησιμοποιηθεί και για τα τρία AWG, ενώ το $\sigma(X)$ έχει υπολογιστεί λύνοντας την (6.18) ως προς το σ . Ο αριθμός των κυματοδηγών φράγματος ισούται με 65, ενώ η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών καναλιών είναι 200GHz. Τα σήματα στην είσοδο του AWG είναι RZ παλμοί με Gaussian μορφή των οποίων το πλήρες εύρος μισής ισχύος έχει τεθεί ίσο με το 1/3 της διάρκειας του bit, η οποία στην περίπτωση μας είναι $T=100ps$. Η ισχύς του θερμικού θορύβου έχει θεωρηθεί ίση με $\sigma_{th}^2=25$, ενώ με P_{in} έχουμε συμβολίσει την ισχύ κορυφής του σήματος στην περίπτωση όπου το bit του σήματος είναι 1. Οι παραπάνω τιμές θα χρησιμοποιηθούν και στους υπόλοιπους υπολογισμούς του κεφαλαίου.



Σχήμα 6-4: Οι συναρτήσεις $G_i^{11}(\tau_i)$ στην περίπτωση ενός AWG 16x16.

Είναι φανερό από το σχήμα 6-3 πως το Gaussian μοντέλο δεν υπολογίζει σωστά το BER. Για να μπορέσουμε να ερμηνεύσουμε αυτήν την ασυμφωνία έχουμε καταρχήν αναπαραστήσει γραφικά τις συναρτήσεις $G_i^{11}(\tau_i)$, στην περίπτωση όπου $X=-22\text{dB}$. Παρατηρούμε πως οι συναρτήσεις αυτές έχουν αφενός διαφορετικά πλάτη και αφετέρου διαφορετική εξάρτηση ως προς τα τ_i . Επομένως η στατιστική κατανομή που ακολουθεί κάθε ένα από τα κανάλια παρεμβολής θα είναι ελαφρώς διαφορετική και η πυκνότητα πιθανότητας του D ενδεχομένως να μην συγκλίνει αρκετά γρήγορα σε μια Gaussian.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να δούμε πως το Gaussian μοντέλο υποτιμά την πραγματική τιμή του BER. Για να δικαιολογήσουμε το αποτέλεσμα αυτό θεωρητικά, θα χρησιμοποιήσουμε τις ροπές των δύο κατανομών, δηλαδή της πραγματικής κατανομής της μεταβλητής απόφασης καθώς και της Gaussian. Οι άρτιες ροπές μίας τυχαίας μεταβλητής R δίνονται από τη σχέση:

$$E\{(R - E\{R\})^2\} = \int (r - \bar{R})^2 f_R(r) dr \quad (6.42)$$

και αποτελούν ένα μέτρο του πόσο γρήγορα η πυκνότητα πιθανότητας $f_R(r)$ τείνει στο μηδέν όταν το $r \rightarrow \pm\infty$. Επομένως, για δύο τυχαίες κατανομές με την ίδια διακύμανση και με σχεδόν ίδια πυκνότητα πιθανότητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ροπές τετάρτης τάξης για να διαπιστώσουμε πια πυκνότητα πιθανότητας έχει τις χαμηλότερες ουρές. Για μεγάλο αριθμό καναλιών αναμένουμε η πυκνότητα πιθανότητας του D να γίνει σχεδόν Gaussian. Έτσι, η πυκνότητα πιθανότητας του D θα μπορεί να συγκριθεί με μια Gaussian βάσει των ροπών υψηλότερης τάξης.

Αρχικά ας θεωρήσουμε τις ροπές του φωτορεύματος y στην περίπτωση όπου έχουμε μονάχα ένα κανάλι παρεμβολής το οποίο θα δίνεται από μία σχέση:

$$y = 2\sqrt{2}\varepsilon\sigma \cos\theta \cos\phi \quad (6.43)$$

όπου ϕ και θ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στο $[0, 2\pi]$. Για να λάβουμε υπόψη μας τις μεταβολές των bit θεωρούμε πως το ε ακολουθεί μία τυχαία κατανομή με $P(\varepsilon=0)=P(\varepsilon=1)=1/2$. Τέλος το σ^2 είναι η διακύμανση του y αφού

$$E\{y^2\} = 8\sigma^2 E\{\varepsilon^2\} E\{\cos^2\theta\} E\{\cos^2\phi\} = \sigma^2 \quad (6.44)$$

Η τέταρτης τάξης ροπή του y δίνεται από την

$$\sigma_4 = E\{y^4\} = 16\sigma^4 E\{\varepsilon^4\} E\{\cos^4 \theta\} E\{\cos^4 \phi\} = \frac{9}{2}\sigma^4 \quad (6.45)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (6.14) καθώς και το γεγονός ότι $E\{\varepsilon^4\}=1/2$.

Ας υποθέσουμε τώρα πως y_g είναι μία Gaussian τυχαία μεταβλητή με την ίδια διακύμανση με αυτήν του y . Η τέταρτη ροπή της Gaussian δίνεται από την $E\{y_g^4\}=3\sigma^4$ η οποία είναι μικρότερη από την 4^η ροπή του y που υπολογίσαμε στην (6.45).

Στην περίπτωση όπου υπάρχουν παραπάνω του ενός κανάλια τότε οι ροπές της μεταβλητής απόφασης μπορούν να υπολογιστούν βάσει του γεγονότος ότι για δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές r_1 και r_2 οι ροπές n -οστής τάξης του r_1+r_2 καθορίζονται πλήρως από τις ροπές των r_1 και r_2 μέχρι n -οστής τάξης, βάσει της σχέσης:

$$E\{(r_1 + r_2)^n\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E\{r_1^k\} E\{r_2^{n-k}\} \quad (6.46)$$

Χρησιμοποιώντας την (6.46), για $n=4$ μπορεί να δειχθεί πως ακόμα και αν έχουμε παραπάνω από 1 κανάλι η τέταρτη ροπή της μεταβλητής απόφασης, θα είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση όπου έχουμε θεωρήσει την πραγματική στατιστική της. Χρησιμοποιώντας παρόμοιο σκεπτικό, μπορούμε να αποδείξουμε πως το ίδιο ισχύει για τις ροπές τάξεως $n=6,8$ και 10. Επομένως οι ροπές μέχρι και 10^{ης} τάξης επιβεβαιώνουν το γεγονός πως το BER που υπολογίζεται βάσει της Gaussian προσέγγισης θα είναι χαμηλότερο από το πραγματικό.

Στην προηγούμενη ανάλυση αμελήσαμε την επίδραση του θορύβου βολής ο οποίος επηρεάζει τη στατιστική συμπεριφορά του θορύβου διαφωνίας στο ηλεκτρικό επίπεδο. Η MGF του θορύβου χωρίς τη συνεισφορά του θορύβου βολής θα είναι

$$M_c(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} s^n \quad (6.47)$$

όπου $I_n=E\{(m+y)^n\}$ είναι οι ροπές του αθροίσματος του σήματος m και του θορύβου διαφωνίας y . Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα του $(m+y)^n$ καθώς και το γεγονός ότι $E\{y\}=E\{y^3\}=0$ και $E\{y^2\}=\sigma^2$, $E\{y^4\}=\sigma_4$ θα έχουμε

$$I_4 = m^4 + 4m^2\sigma^2 + \sigma_4 \quad (6.48)$$

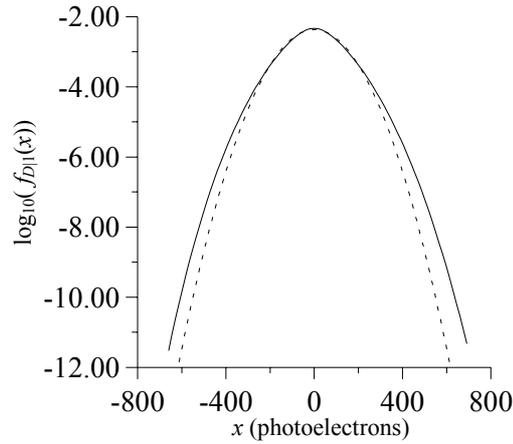
$$I_3 = m^3 + 3m\sigma^2 \quad (6.49)$$

$$I_2 = m^2 + \sigma^2 \quad (6.50)$$

$$I_1 = m \quad (6.51)$$

Λαμβάνοντας υπόψη το θόρυβο βολής, η MGF του φωτορεύματος γράφεται ως εξής:

$$M_{csh}(s) = M_c(e^s - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} (e^s - 1)^n \quad (6.52)$$



Σχήμα 6-5: Λογαριθμική γραφική παράσταση της πυκνότητας πιθανότητας $f_{D11}(x)$ (συνεχείς γραμμές) και της Gaussian προσέγγισης της (διακεκομμένες γραμμές). Έχουμε επιλέξει $X=-22\text{dB}$ και $P_{in}=-24\text{dBm}$

Οι αναμενόμενες τιμές $E\{Y^n\}=I_n'$ του φωτορεύματος Y μπορεί να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη σχέση $I_n' = d^n M_{csh}(s)/ds^n|_{s=0}$. Πραγματοποιώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$I_4' = I_4 + 7I_3 + 6I_2 + I_1 \quad (6.53)$$

$$I_3' = I_3 + 3I_2 + I_1 \quad (6.54)$$

$$I_2' = I_2 + I_1 \quad (6.55)$$

$$I_1' = I_1 \quad (6.56)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συνδέουν τις ροπές του Y με τις ροπές του $m+y$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα του $(Y-I_1')^4$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τετάρτης τάξεως ροπή του Y ως εξής:

$$E\{(Y - I_1')^4\} = I_4' - 4I_3'I_1' + 6I_2'(I_1')^2 - 3(I_1')^4 \quad (6.57)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.53)-(6.56) στην (6.57), η τετάρτης τάξεως ροπή γράφεται ως εξής

$$E\{(Y - E\{Y\})^4\} = 3m^2 + m + 7\sigma^2 + 6m\sigma^2 + \sigma_4 \quad (6.58)$$

Η ροπή τετάρτης τάξης μίας Gaussian τυχαίας μεταβλητής είναι ίση με

$$3m^2 + 6m\sigma^2 + 3\sigma^4 \quad (6.59)$$

Συγκρίνοντας την (6.58) με την (6.59) και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως $\sigma_4 \geq 3\sigma^2$ το οποίο αποδείξαμε προηγουμένως, συνάγουμε πως η ροπή τετάρτης τάξης της μεταβλητής απόφασης είναι πάλι μεγαλύτερη από τη ροπή τετάρτης τάξης που δίνει η Gaussian προσέγγιση. Παρατηρούμε μάλιστα, πως η παρουσία του m στην (6.58) αυξάνει την τετάρτης τάξεως ροπή της μεταβλητής απόφασης.

Η συμπεριφορά αυτή αναδεικνύεται και στο σχήμα 6-5, όπου οι πυκνότητες πιθανότητας της μεταβλητής απόφασης έχουν αναπαρασταθεί λογαριθμικά, στην περίπτωση όπου λαμβάνεται υπόψη η πραγματική στατιστική του θορύβου διαφωνίας και στην περίπτωση όπου ο θόρυβος θεωρείται Gaussian. Έχουμε θεωρήσει ένα 16x16 AWG με $X=-22\text{dB}$ και ισχύ εισόδου ίση με

$P_{in}=-24\text{dBm}$. Οι πυκνότητες πιθανότητας έχουν μετακινηθεί γύρω από το $x=0$ για λόγους απλότητας. Κατά τον υπολογισμό της πυκνότητας πιθανότητας έχουμε λάβει υπόψη τόσο τον θόρυβο βολής όσο και το θερμικό θόρυβο. Ο υπολογισμός της πυκνότητας πιθανότητας $f_{D|1}(x)$ έγινε χρησιμοποιώντας το γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform) και βάσει του γεγονότος πως τα $f_{D|1}(x)$ και $M_{D|1}(js)$ σχετίζονται δια μέσου του ζεύγους μετασχηματισμών Fourier

$$M_{D|1}(js) = E\{e^{jsD}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{D|1}(x) \exp(jsx) dx \quad (6.60)$$

$$f_{D|1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_{D|1}(js) \exp(-jsx) dx \quad (6.61)$$

Από το σχήμα 6-5 παρατηρούμε πως οι ουρές της Gaussian κατανομής είναι χαμηλότερες και επομένως το Gaussian μοντέλο θα προβλέπει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος.

6.4 ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ

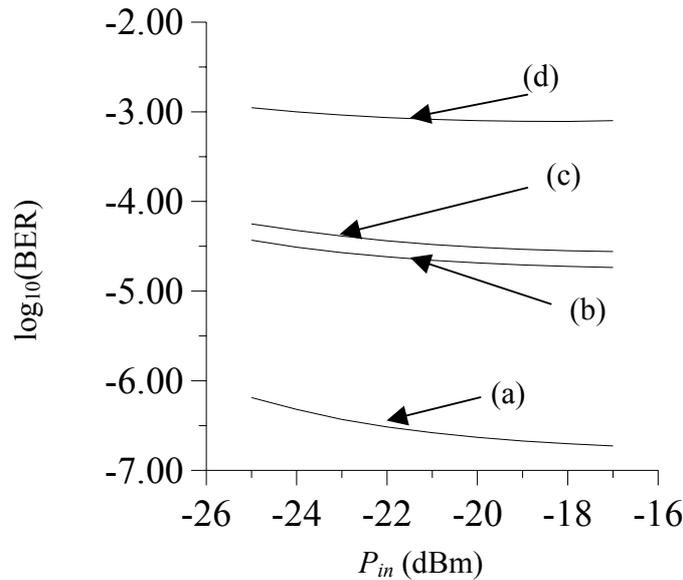
Σύμφωνα με την εξίσωση (6.15), για ένα AWG με δεδομένα σφάλματα φάσης δ_k , υπάρχουν τρεις παράγοντες που καθορίζουν τη στατιστική συμπεριφορά του θορύβου διαφωνίας: Οι μεταβολές της φάσης (ϕ_i), οι μεταβολές της πόλωσης (θ_i) και η έλλειψη συγχρονισμού των bit (που σχετίζεται με την τυχαία χρονική μετατόπιση κάθε καναλιού τ_i). Στο σχήμα 6-6 έχουμε αναπαραστήσει γραφικά το BER για ορισμένους συνδυασμούς των διαφόρων φαινομένων που επηρεάζουν το θόρυβο διαφωνίας σε συνάρτηση με την ισχύ P_{in} . Έχουμε θεωρήσει ένα 16x16 AWG με μέση διαφωνία $X=-22\text{dB}$. Από την (6.15) καθίσταται φανερό πως εφόσον τα ϕ_i και τα θ_i ακολουθούν την ίδια στατιστική κατανομή επηρεάζουν τη μεταβλητή απόφασης με τον ίδιο τρόπο. Επομένως στο σχήμα (6.15) το να αγνοήσει κανείς την πόλωση των επιμέρους καναλιών είναι ισοδύναμο με το να αγνοήσει τις μεταβολές της φάσης.

Η καμπύλη (a) αντιστοιχεί στην ύπαρξη και των τριών φαινομένων που επηρεάζουν το θόρυβο διαφωνίας ενώ η καμπύλη (b) αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου λαμβάνονται υπόψη μονάχα οι μεταβολές φάσης και πόλωσης. Καθίσταται φανερό πως η έλλειψη συγχρονισμού μεταξύ των bit προκαλεί μείωση του BER κατά δύο τάξεις μεγέθους, βελτιώνοντας έτσι σημαντικά τις επιδόσεις της οπτικής σύνδεσης. Η βελτίωση του BER εξαιτίας της έλλειψης συγχρονισμού των bit μπορεί εύκολα να δικαιολογηθεί βάσει της ισχύος του θορύβου διαφωνίας. Στην περίπτωση όπου ο συγχρονισμός μεταξύ των bit είναι τέλειος, η ισχύς θορύβου διαφωνίας δίνεται από την

$$N_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} |G_i^{11}(0)|^2 \quad (6.62)$$

Αν λάβουμε υπόψη την έλλειψη συγχρονισμού των bit τότε η ισχύς θορύβου δίνεται από τη σχέση:

$$N_2 = \frac{1}{4T} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^T |G_i^{11}(\tau_i)|^2 d\tau_i + \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^T |G_i^{01}(\tau_i)|^2 d\tau_i \quad (6.63)$$

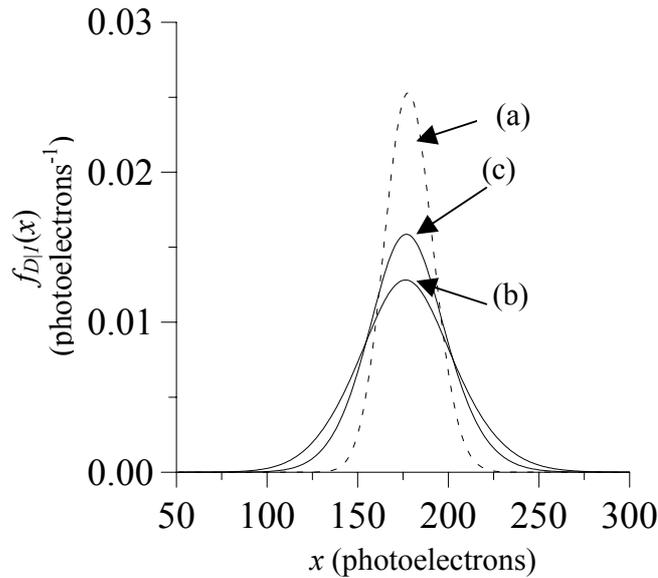


Σχήμα 6-6: Τιμές του BER συναρτήσει της ισχύος εισόδου P_{in} στην περίπτωση όπου λαμβάνουμε υπόψη: (a) τις μεταβολές της πόλωσης, της φάσης και την έλλειψη συγχρονισμού, (b) τις μεταβολές της πόλωσης και της φάσης, (c) την έλλειψη συγχρονισμού και είτε τις μεταβολές της πόλωσης είτε της φάσης και (d) είτε τις μεταβολές της πόλωσης είτε της φάσης

Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο με τον υπολογισμό του σ_n^2 . Ένας εναλλακτικό τρόπος υπολογισμού είναι να χρησιμοποιήσουμε τις δεύτερες παραγώγους των MGF στο σημείο $s=0$, αφού για μία τυχαία μεταβλητή R με MGF $M_R(s)$ θα έχουμε $E\{R^n\} = d^n M_R(s) / ds^n |_{s=0}$

Από το σχήμα 6-4 προκύπτει πως η μεγάλη πλειονότητα των συναρτήσεων $G_i^{11}(\tau_i)$ έχουν την κορυφή τους κοντά στο $\tau_i=0$. Επομένως ο μέσος όρος των $|G_i^{ab}|^2$ στην (6.63) αναμένουμε να είναι αρκετά μικρότερος από τη $|G_i^{11}|^2$ που εμφανίζεται στην (6.62), στην περίπτωση ενός RZ συστήματος. Επομένως $N_1 < N_2$. Τούτο εξηγεί γιατί το BER είναι πολύ μικρότερο στην περίπτωση αυτή. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από το σχήμα 6-7 στο οποίο έχουμε αναπαραστήσει τις πυκνότητες πιθανότητας στις περιπτώσεις όπου (a) λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο τον θόρυβο βολής, (b) όπου θεωρούμε πως τα bit είναι τελείως συγχρονισμένα και τέλος (c) στην περίπτωση όπου θεωρούμε πως έχουμε έλλειψη συγχρονισμού. Οι πυκνότητες πιθανότητας (b) και (c) έχουν υπολογιστεί λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις μεταβολές της φάσης όσο και της πόλωσης των καναλιών που συνθέτουν το θόρυβο διαφωνίας για ισχύ εισόδου $P_{in} = -30\text{dBm}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά των πυκνοτήτων πιθανότητας του σχήματος 6-7 συμφωνεί με το γεγονός ότι όταν λαμβάνεται υπόψη η έλλειψη συγχρονισμού, το BER είναι μικρότερο. Ωστόσο αν το σχήμα διαμόρφωσης που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικό (π.χ. παλμοί NRZ) τότε δεν είναι δεδομένο πως η έλλειψη συγχρονισμού μεταξύ των bit θα οδηγεί σε μείωση του BER.

Στο σχήμα 6-6 η καμπύλη (d) αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου είτε η πόλωση είτε οι μεταβολές της φάσης έχουν ληφθεί υπόψη στη στατιστική συμπεριφορά του θορύβου διαφωνίας. Συγκρίνοντας την καμπύλη (b) με την καμπύλη (d) προκύπτει πως όταν λαμβάνουμε υπόψη και τα δύο φαινόμενα τότε το BER μειώνεται κατά μία τάξη μεγέθους. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η διακύμανση του γινομένου των δύο συνημίτονων στη σχέση (6.15) ισούται με $1/4$ ενώ εάν αγνοήσουμε το ένα από τα δύο φαινόμενα θα απομείνει μόνο ένα \cos και η διακύμανση θα



Σχήμα 6-7: Οι πυκνότητες πιθανότητας στην περίπτωση όπου λαμβάνουμε υπόψη μας, (a) μόνο το θόρυβο βολής, (b) τις μεταβολές της πόλωσης, της φάσης και το θόρυβο βολής, (c) τις μεταβολές της πόλωσης, της φάσης, το θόρυβο βολής και την έλλειψη συγχρονισμού μεταξύ των bit

ισούται με $\frac{1}{2}$. Επομένως η ισχύς του θορύβου θα είναι μεγαλύτερη αν τα σήματα είναι όλα συμφασικά ή αν έχουν την ίδια πολωτική κατάσταση.

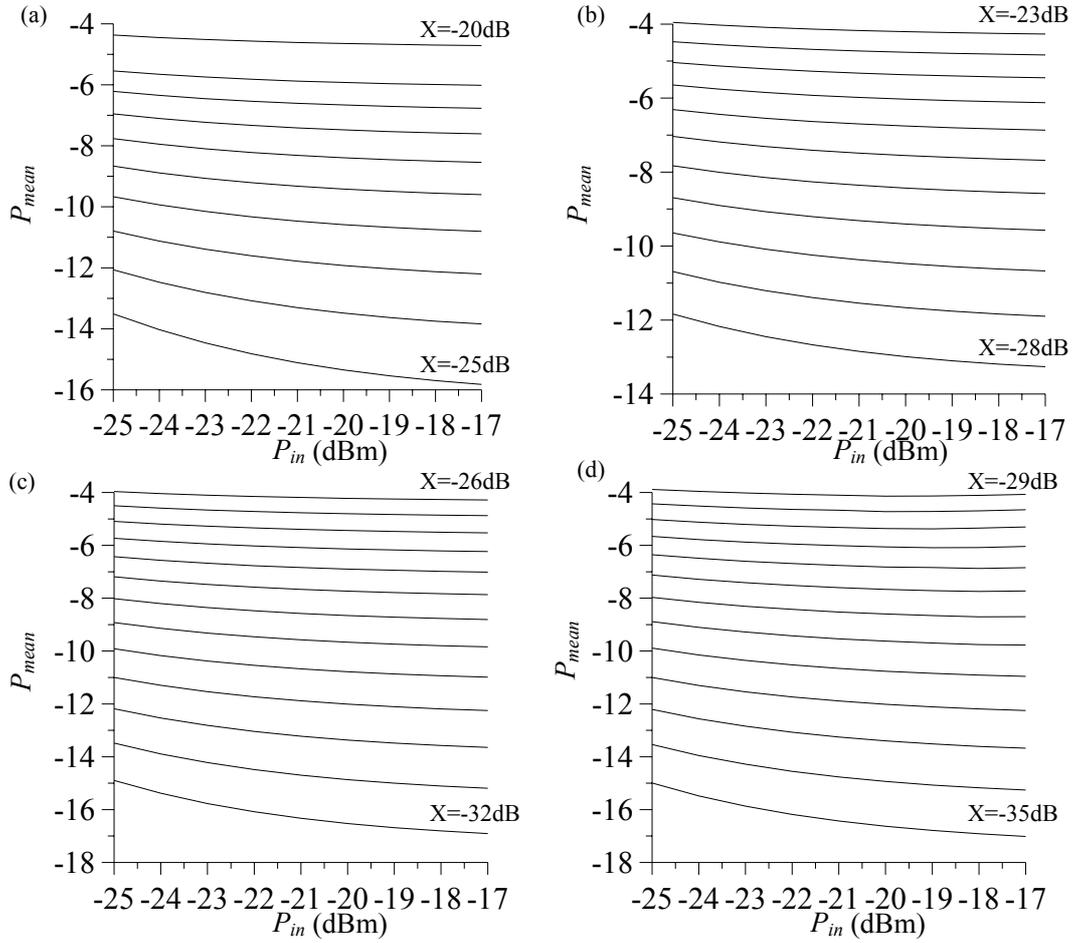
Στην περίπτωση όπου τόσο οι μεταβολές της φάσης όσο και οι μεταβολές της πόλωσης αγνοούνται, το BER προκύπτει πολύ χαμηλότερο από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι η ισχύς του θορύβου στην περίπτωση αυτή θα καθορίζεται μονάχα από την τυχαία διακύμανση των bit.

6.5 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ BER ΚΑΙ ΜΕΣΗΣ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ ΤΟΥ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΤΗ

Για να εκτιμήσουμε τη σχέση μεταξύ του BER και της διαφωνίας του δρομολογητή AWG μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η $N \times N$ οπτική σύνδεση πραγματοποιήσαμε μία σειρά από εξομοιώσεις στις οποίες για διάφορες τιμές της μέσης διαφωνίας X , της ισχύος κορυφής P_{in} αλλά και του αριθμού των καναλιών N , υπολογίσαμε το BER της σύνδεσης του σχήματος 6-1(a). Για κάθε διαφορετική τριάδα (P_{in}, X, N) δημιουργήσαμε 25 δείγματα συναρτήσεων μεταφοράς για το AWG και χρησιμοποιήσαμε τις συναρτήσεις G_i για να υπολογίσουμε το BER της διασύνδεσης μέσω της προσέγγισης saddle point. Τα αποτελέσματα έχουν απεικονισθεί στο σχήμα 6-8 για $N=16$, $N=32$, $N=64$ και $N=128$ όπου το μέσο λογαριθμικό BER το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$P_{mean} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \log_{10}(P_{e,i}) \quad (6.64)$$

όπου $P_{e,i}$ είναι η τιμή του BER που υπολογίσαμε από την i -οστή συνάρτηση μεταφοράς. Το σχήμα 6-8 δείχνει πως στην περίπτωση όπου ο αριθμός των καναλιών είναι ίσος με 16, μία μέση τιμή διαφωνίας $X=-25$ dB αρκεί για να έχουμε ένα μέσο BER μικρότερο από 10^{-12} . Ωστόσο, όσο ο αριθμός των καναλιών αυξάνει, τόσο μειώνεται και το απαιτούμενο X για να έχουμε ικανοποιητική πιθανότητα σφάλματος. Για παράδειγμα στην περίπτωση $N=128$, η μέση διαφωνία του δρομολογητή για πολύ χαμηλές τιμές του BER θα πρέπει να είναι $X=-35$ dB.



Σχήμα 6-8: Μεταβολή του μέσου BER με τη μεταβολή του P_{in} για διάφορες τιμές της μέσης διαφωνίας X του AWG και της ισχύος εισόδου P_{in} για a) $N=16$, b) $N=32$, c) $N=64$ και d) $N=128$. Η διαφορά μεταξύ των τιμών του X δύο γειτονικών καμπυλών κάθε σχήματος ισούται με 0.5dB.

Από τα διαγράμματα του σχήματος 6-8, συνάγουμε το γεγονός πως το BER δεν μειώνεται σημαντικά με την αύξηση της ισχύος P_{in} . Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι αυξάνοντας την ισχύ εισόδου κάθε καναλιού P_{in} αυξάνεται και η ισχύς του θορύβου διαφωνίας αφού όπως δείχνει και η (6.12) το τμήμα της μεταβλητής απόφασης που οφείλεται στο θόρυβο διαφωνίας εξαρτάται γραμμικά από τα γινόμενα $g_i(t)g_0^*(t)$. Επομένως μία αύξηση της ισχύος εισόδου κατά έναν παράγοντα p είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό των συναρτήσεων $g_i(t)$ επί έναν παράγοντα $p^{1/2}$. Έτσι, τόσο η ισχύς του θορύβου, που είναι η αναμενόμενη τιμή του D_n^2 , όσο και η ισχύς του σήματος, που είναι το D_s^2 , θα έχει αυξηθεί κατά ένα παράγοντα p^2 . Άρα ο λόγος σήματος προς διαφωνία θα παραμείνει σταθερός και το BER δεν αναμένεται να μειωθεί σημαντικά.

7. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΝΟΣ AWG ΜΕ ΟΜΑΛΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

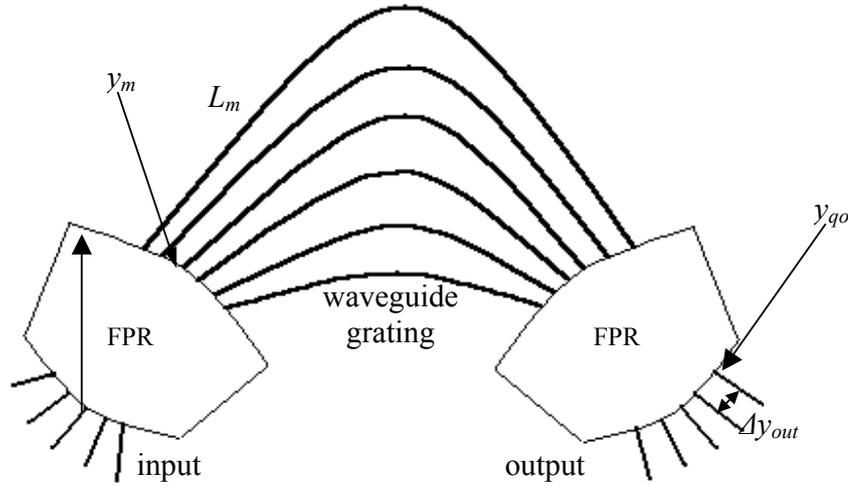
7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με την επίδραση των κατασκευαστικών ατελειών στις επιδόσεις του AWG. Είδαμε πως οι κατασκευαστικές ατέλειες εισάγουν μία τυχαία διαφορά φάσης μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος. Στην παρούσα παράγραφο θα δείξουμε πως η εισαγωγή σωστά επιλεγμένων διαφορών φάσεως μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος μπορεί να ομαλοποιήσει τη φασματική απόκριση του AWG.

Η ομαλοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ενός AWG είναι ένα πρόβλημα με ιδιαίτερη πρακτική αξία. Έχει αποδειχθεί πως το Gaussian προφίλ της συνάρτησης μεταφοράς ενός συμβατικού AWG δεν επιτρέπει τη σειριακή σύνδεση πολλών πολυπλεκτών και αποπολυπλεκτών. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των AWG σε μία σειριακή σύνδεση [OAR99], τόσο μειώνεται το εύρος της συνολικής συνάρτησης μεταφοράς, της σύνδεσης. Επομένως, ο έλεγχος του κεντρικού μήκους κύματος των πηγών θα πρέπει να είναι πολύ ακριβής έτσι ώστε το σήμα να παραμένει στον κεντρικό λοβό της συνολικής συνάρτησης μεταφοράς. Αν αντίθετα, το AWG είχε ιδανική (ορθογώνια) συνάρτηση μεταφοράς, τότε ο αριθμός των συσκευών που θα μπορούσαν να διασυνδεθούν θα ήταν θεωρητικά άπειρος και η ανάγκη για έλεγχο του κεντρικού μήκους κύματος εκπομπής των οπτικών πηγών θα ήταν πολύ μικρότερη.

Αρκετές τεχνικές έχουν προταθεί κατά καιρούς στη βιβλιογραφία με σκοπό την ομαλοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ενός AWG [OY95]. Μία μέθοδος, είναι η χρήση πολύτροπων συζευκτών συμβολής (multi-mode interference couplers, MMI couplers) [ASL96] στους κυματοδηγούς εισόδου. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από το ολοκλήρωμα επικάλυψης του τρόπου κυματοδηγού εισόδου και του τρόπου κυματοδηγού εξόδου. Με κατάλληλη επιλογή των χαρακτηριστικών του MMI προσαρμόζουμε τον τρόπο του κυματοδηγού εισόδου έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του AWG να ομαλοποιηθεί. Μία άλλη μέθοδος εισάγει διαφορά φάσης ίση με π στους ακριανούς κυματοδηγούς του AWG [DTB97]. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μέθοδος αυτή αποτελεί μία ειδική περίπτωση της προτεινόμενης εδώ μεθόδου. Μία άλλη μέθοδος βασίζεται στη μεταβολή της γεωμετρίας του δεύτερου συζεύκτη αστέρα του AWG [HC97] ενώ στην [PW99] έχει προταθεί η χρήση υπό-παραβολικού προφίλ φάσης στους κυματοδηγούς του φράγματος. Τέλος στην [OTO96] προτείνεται η χρήση μη συμμετρικών Mach-Zehnder φίλτρων στις εξόδους του AWG.

Η προτεινόμενη μέθοδος που θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο, στηρίζεται στη μέθοδο *αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης* (deterministic tapering) που αποτελεί μέθοδο σχεδιασμού μιας συστοιχίας μη-ομοιόμορφων κεραιών [CZ69, pp.200]. Το γεγονός πως η μέθοδος αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση σχεδιασμού ενός AWG οφείλεται στο γεγονός πως η φασματική συνάρτηση μεταφοράς του και η χωρική συνάρτηση μεταφοράς μίας κεραιάς δίνονται από παρόμοιες εξισώσεις. Επομένως από μαθηματικής απόψεως, τα δύο



Σχήμα 7-1: Δρομολογητής AWG.

προβλήματα είναι ισοδύναμα. Στην περίπτωση του AWG, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης για να υπολογίσουμε το βέλτιστο μήκος κάθε κυματοδηγού φράγματος έτσι ώστε η τελική συνάρτηση μεταφοράς να είναι ομαλή. Η εύρεση των βέλτιστων μηκών συντελείται βάσει μίας μαθηματικής διαδικασίας ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης σφάλματος, χωρίς τη μεσολάβηση εμπειρικών κανόνων. Για να επιτύχουμε ομαλή συνάρτηση μεταφοράς και για όλους τους συνδυασμούς θυρών εισόδου και θυρών εξόδου, μεταβάλλουμε και τη θέση των κυματοδηγών φράγματος στην έξοδο και την είσοδο του πρώτου και του δεύτερου συζεύκτη αστέρα αντίστοιχα. Στις παραγράφους που ακολουθούν επιχειρούμε επίσης και μία σύγκριση της μεθόδου αυτής με τις υπόλοιπες μεθόδους που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και στηρίζονται στην αλλαγή των μηκών των κυματοδηγών.

7.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $H_q(f)$ μεταφοράς μεταξύ της κεντρικής εισόδου ($p=0$) και της εξόδου q του AWG στη θέση y_{q0} στην έξοδο του δεύτερου συζεύκτη, δίνεται από την (κεφάλαιο 3):

$$H_q(f) = \sum_{m=-P}^P C_m \exp(j2\pi t_m f - j\kappa y_m y_{q0} f) \quad (7.1)$$

όπου f είναι η οπτική συχνότητα και C_m το ποσοστό της οπτικής ισχύς που διεγείρει τον κυματοδηγό φράγματος m , στη θέση y_m στην έξοδο του πρώτου συζεύκτη αστέρα του AWG (θεωρούμε πως ο κεντρικός κυματοδηγός φράγματος είναι ο $m=0$ στη θέση $y_m=y_0=0$) (σχήμα 7-1). Για λόγους απλότητας θεωρούμε πως η ομοιομορφία του φράγματος είναι $e_{pq} \approx 1$ για κάθε συνδυασμό εισόδου-εξόδου του AWG και πως ο συνολικός αριθμός $M=2P+1$ των κυματοδηγών είναι περιττός. Τέλος οι παράμετροι t_m δίδονται από την

$$t_m = nL_m / c \quad (7.2)$$

όπου L_m η διαφορά του μήκους του κυματοδηγού φράγματος m από τον κεντρικό κυματοδηγό, n ο ενεργός δείκτης διάθλασης του φράγματος και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Τέλος η παράμετρος κ δίνεται από την

$$\kappa = \frac{2\pi n}{cR} \quad (7.3)$$

όπου R είναι η ακτίνα των συζευκτών του AWG. Βάσει της προσέγγισης ασθενούς κυματοδότησης [SL83, pp. 280-300] έχουμε υποθέσει πως ο ενεργός δείκτης διάθλασης των κυματοδηγών του φράγματος αλλά και του συζεύκτη του AWG ισούται με n .

Θεωρώντας, όπως και στο κεφάλαιο 3, πως ο προσπίπτων τρόπος του κυματοδηγού μπορεί να προσεγγισθεί με μία Gaussian μορφή, έπεται πως οι συντελεστές C_m ακολουθούν μία Gaussian κατανομή

$$C_m = C_0 \exp(-a^2 y_m^2) \quad (7.4)$$

όπου ο συντελεστής a δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{2\pi n \sigma}{cR} f_0 \quad (7.5)$$

όπου f_0 είναι η κεντρική συχνότητα του AWG και σ η διακύμανση (standard deviation) του προσπίπτοντος τρόπου διάδοσης του κυματοδηγού εισόδου. Σε ένα συμβατικό AWG με Gaussian συνάρτηση μεταφοράς, οι παράμετροι t_m δίνονται από τη σχέση:

$$t_m = \frac{m}{FSR} \quad (7.6)$$

όπου FSR είναι η ελεύθερη φασματική περιοχή του AWG η οποία, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, δίνεται από την σχέση

$$FSR = \frac{f_0}{N} \quad (7.7)$$

Στην (7.7) με N έχουμε συμβολίσει την τάξη του φράγματος.

Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο, οι παράμετροι t_m αντιμετωπίζονται ως άγνωστες ποσότητες που πρέπει να καθοριστούν έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ μεταξύ της κεντρικής θύρας εισόδου και της κεντρικής θύρας εξόδου, που δίνεται από την (7.1) θέτοντας $y_{qo}=0$,

$$H(f) = \sum_{m=-P}^P C_m \exp(j2\pi t_m f) \quad (7.8)$$

να προσεγγίζει την ιδανική ορθογώνια συνάρτηση μεταφοράς,

$$H_0(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_0| \leq \Delta f_p / 2 \\ 0 & |f - f_0| > \Delta f_p / 2 \end{cases} \quad (7.9)$$

όπου Δf_p είναι το φασματικό εύρος της ορθογώνιας συνάρτησης μεταφοράς που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε.

Όπως αναφέραμε, για την εύρεση των t_m θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης. Η μέθοδος της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης προϋποθέτει πως η συνάρτηση μεταφοράς είναι χαμηλών συχνοτήτων (δηλαδή έχει κέντρο το 0 και όχι το f_0). Επομένως πρέπει να ανάγουμε το πρόβλημα του σχεδιασμού της $H(f)$ σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού χαμηλών συχνοτήτων. Για το σκοπό αυτό απαιτούμε τα t_m να είναι ακέραια πολλαπλάσια του $1/(2f_0)$, δηλαδή,

$$t_m = i_m / (2f_0) \quad (7.10)$$

όπου τα i_m είναι ακέραιοι. Τότε αν θέσουμε $F=f-f_0$, όπου F είναι η οπτική συχνότητα γύρω από την κεντρική συχνότητα f_0 τότε

$$H(F) = \sum_{m=-P}^P C_m (-1)^{a_m} \exp(j2\pi t_m F) \quad (7.11)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει το $\exp(j2\pi i_m) = (-1)^{a_m}$ και οι εκθέτες a_m καθορίζονται από τους ακεραίους i_m ως εξής:

$$a_m = \text{mod}(i_m, 2) \quad (7.12)$$

Στην (7.12) με $\text{mod}(x,y)$ συμβολίζουμε το υπόλοιπο της ακεραίου διαίρεσης του x με το y . Οι ακέραιοι a_m στην ουσία καθορίζουν το πρόσημο κάθε όρου του αθροίσματος της (7.11).

Η συνάρτηση $H(F)$ είναι μία συνάρτηση χαμηλών συχνοτήτων και το πρόβλημα επομένως είναι να επιλέξουμε τα t_m και a_m με τέτοιο τρόπο ώστε η (7.11) να προσεγγίζει μία ορθογώνια συνάρτηση μεταφοράς χαμηλών συχνοτήτων $H_0(F)$ η οποία προκύπτει από την (7.9) αν θέσουμε $F=f$ και $f_0=0$. Έχουμε επομένως μετασχηματίσει το αρχικό πρόβλημα σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού χαμηλοπερατού φίλτρου.

Επιδιώκεται η συνάρτηση μεταφοράς να μην έχει φανταστικό μέρος, το δε πραγματικό μέρος της να έχει σταθερό πρόσημο, ώστε η φάση της να είναι σταθερή. Τούτο εξασφαλίζει πως το AWG δεν θα εισάγει διασπορά στο διαδιδόμενο σήμα. Για να είναι πραγματική η $H(F)$ θα πρέπει

$$C_m = C_{-m}, \quad t_m = -t_{-m} \quad \text{και} \quad a_m = a_{-m} \quad (7.13)$$

όποτε η $H(F)$ γράφεται ως εξής:

$$H(F) = C_0 + 2 \sum_{m=1}^P (-1)^{a_m} C_m \cos(2\pi t_m F) \quad (7.14)$$

Ας σημειωθεί πως ο πρώτος και ο δεύτερος περιορισμός της (7.13), που ισχύουν και στην περίπτωση ενός συμβατικού φράγματος AWG, πληρούνται όταν οι κυματοδηγοί φράγματος είναι τοποθετημένοι συμμετρικά ως προς τον κεντρικό κυματοδηγό και όταν η διαφορά των μήκων των κυματοδηγών φράγματος είναι μία αντισυμμετρική συνάρτηση ως προς το $m=0$. Ο τρίτος περιορισμός εκφράζει το γεγονός πως όταν το σήμα στον κυματοδηγό m ($a_m=1$) υφίσταται μία στροφή φάσης κατά π , το ίδιο ισχύει και για το σήμα στον κυματοδηγό $-m$ ($a_{-m}=1$).

Σύμφωνα με την μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης, οι $H(F)$ και οι $H_0(F)$ εκφράζονται μέσω των μετασχηματισμών τους Fourier $h(t)$ και $h_0(t)$, βάσει των εξισώσεων,

$$H(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cos(2\pi Ft) dt \quad (7.15)$$

$$H_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t) \cos(2\pi Ft) dt \quad (7.16)$$

όπου τα $h_0(t)$ και $h(t)$ δίνονται από τις

$$h(t) = C_0 \delta(t) + \sum_{m=-P}^P C_m (-1)^{a_m} \delta(t - t_m) \quad (7.17)$$

$$h_0(t) = \Delta f_p \sin c(\Delta f_p t) \quad (7.18)$$

όπου το $\delta(t)$ είναι η συνάρτηση Dirac και $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Χρησιμοποιώντας τις (7.15) και (7.16) καθώς και τη συμμετρία των $h(t)$, $h_0(t)$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως

$$\frac{H(F) - H_0(F)}{2\pi F} = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(t) - A_0(t)] \sin(2\pi Ft) dt \quad (7.19)$$

όπου οι συναρτήσεις $A(t)$ και $A_0(t)$ δίνονται από τις

$$A(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \sum_{t_m \leq t} C_m (-1)^{a_m} \quad (7.20)$$

$$A_0(t) = \int_0^t h_0(\tau) d\tau = \int_0^t \Delta f_p \sin c(\Delta f_p \tau) d\tau \quad (7.21)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval [MF53, p.400], λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$E = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{H(F) - H_0(F)}{F} \right|^2 dF = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(t) - A_0(t)|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} |A(t) - A_0(t)|^2 dt \quad (7.22)$$

όπου E είναι μία συνάρτηση σφάλματος μεταξύ του $H(F)$ και του $H_0(F)$. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει πως η $H(F)$ θα πλησιάζει την $H_0(F)$ όσο περισσότερο πλησιάζει η $A(t)$ στην $A_0(t)$. Παίρνοντας την παράγωγο της (7.22) ως προς τα t_m και εξισώνοντας το αποτέλεσμα με μηδέν, λαμβάνουμε τις εξής εξισώσεις

$$2A_0(t_m) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{a_k} C_k + 2(-1)^{a_m} C_m \quad m=0,1,\dots,P \quad (7.23)$$

Για να λύσουμε την (7.23), θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις τιμές των C_m . Για το σκοπό αυτό πρέπει να γνωρίζουμε τις θέσεις των κυματοδηγών φράγματος y_m . Για να εξασφαλίσουμε ότι όλες οι συναρτήσεις $H_q(f)$ θα έχουν το ίδιο σχήμα με την $H(f)$ θα πρέπει σύμφωνα με τη μέθοδο του διπλού τερετίσματος (double chirping) [DJ97], τα y_m να είναι ανάλογα του L_m δηλαδή

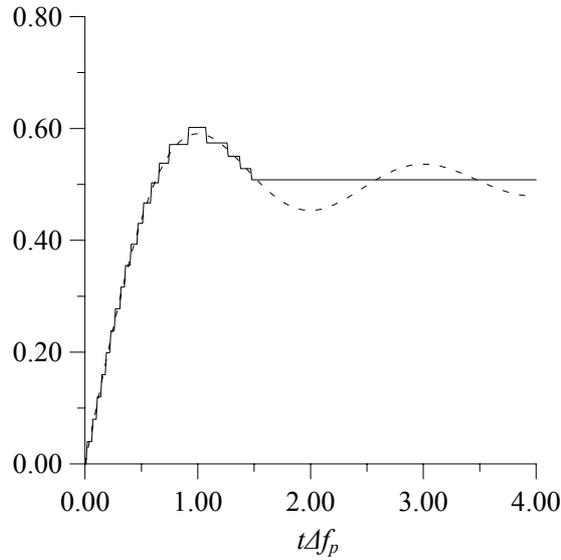
$$y_m = u t_m \quad (7.24)$$

$$u = \frac{cR\Delta f_{ch}}{f_0 n \Delta y_{out}} \quad (7.25)$$

με Δf_{ch} την απόσταση (σε συχνότητα) μεταξύ δύο διαδοχικών καναλιών του AWG και Δy_{out} την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κυματοδηγών εξόδου του AWG. Χρησιμοποιώντας τις (7.24), (7.25) και (7.1), λαμβάνουμε $H_q(f - q\Delta f_{ch}) \cong H(f)$ και επομένως όλες οι συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ των κυματοδηγών εξόδου θα έχουν το ίδιο σχήμα. Αντικαθιστώντας την (7.24) και την (7.25) στην (7.4) και χρησιμοποιώντας την (7.5) λαμβάνουμε:

$$C_m = C_0 \exp(-b^2 t_m^2) \quad (7.26)$$

όπου το b δίνεται από την



Σχήμα 7-2: Οι συναρτήσεις $A(t\Delta f_p)$ (με συνεχείς γραμμές) και $A_0(t\Delta f_p)$ (με διακεκομμένες). Το αρχικό βήμα είναι $c_0=0.05$ και ο συντελεστής b είναι $b=0.05\text{THz}$, ενώ $\Delta f_p=0.16\text{THz}$.

$$b = au = \frac{2\pi\sigma\Delta f_{ch}}{\Delta y_{out}} \quad (7.27)$$

Η εξίσωση (7.23) πρέπει να λυθεί αριθμητικά για να υπολογιστούν οι τιμές των t_m βάση των σχέσεων

$$t_0 = 0$$

$$A_0(t_1) = C_0(-1)^{a_1} \exp(-b^2 t_1^2) / 2$$

$$A_0(t_i) = C_0 \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{a_k} \exp(-b^2 t_k^2) + C_0 \frac{(-1)^{a_i} \exp(-b^2 t_i^2)}{2}$$

$$A_0(t_p) = C_0 \sum_{k=0}^{P-1} (-1)^{a_k} \exp(-b^2 t_k^2) + C_0 \frac{(-1)^{a_p} \exp(-b^2 t_p^2)}{2}$$

Οι εκθέτες a_m πρέπει να έχουν τέτοια τιμή ώστε τα $A(t)$ και $A_0(t)$ να έχουν τη μικρότερη δυνατή διαφορά. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 7-2 όπου έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τόσο τη συνάρτηση $A_0(t\Delta f_p)$ όσο και τη συνάρτηση $A(t\Delta f_p)$. Παρατηρούμε πως η $A(t)$ αποτελείται από σκαλοπάτια, κάθε ένα από τα οποία έχει ύψος ίσο με C_m όπως υποδηλώνει και η (7.21). Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι εφόσον τα C_m δίνονται από τη σχέση (7.4), το ύψος των σκαλοπατιών στην ουσία καθορίζεται από το C_0 , την παράμετρο b καθώς και την τιμή των t_m .

Παρατηρούμε πως για $t\Delta f_p \in [0,1]$, η συνάρτηση $A(t\Delta f_p)$ αυξάνει όσο αυξάνει το t και επομένως το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και για την $A_0(t\Delta f_p)$. Επομένως οι εκθέτες a_m που αντιστοιχούν σε t_m τέτοια ώστε $t_m\Delta f_p \in [0,1]$ θα πρέπει να τεθούν ίσοι με 0, ώστε να διασφαλισθεί

η αύξουσα συμπεριφορά της $A(t\Delta f_p)$. Αντίθετα όταν $t\Delta f_p \in [1,2]$, όπου η συνάρτηση A_0 είναι φθίνουσα οι εκθέτες a_m θα πρέπει να τεθούν ίσοι με 1. Τα σημεία στα οποία τέμνονται οι A και A_0 είναι ίσα με $t_m\Delta f_p$ και το πλήθος τους είναι πεπερασμένο με συνέπεια, η A θα ακολουθεί την A_0 μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα. Το διάστημα αυτό συμπίπτει με το διάστημα $[0, t_p\Delta f_p]$ όπου το t_p είναι η τιμή του t_m που αντιστοιχεί στον τελευταίο κυματοδηγό του φράγματος.

Εξαιτίας της μορφής των εξισώσεων που πρέπει να επιλυθούν για την εύρεση των t_m , η τιμή των t_m καθορίζεται από 4 παράγοντες: Το αρχικό ύψος των μονοπατιών C_0 , την παράμετρο b , το εύρος Δf_p της ορθογώνιας συνάρτησης που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε και τον ακέραιο P . Πράγματι το C_0 το b και το Δf_p (μέσω του A_0) καθορίζουν την τιμή του t_0 , η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του t_1 και ούτω καθεξής. Το P καθορίζει πότε θα σταματήσει η διαδικασία υπολογισμού. Επομένως η συνάρτηση $A(t)$ καθορίζεται πλήρως από τα C_0 , b , Δf_p και P .

7.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

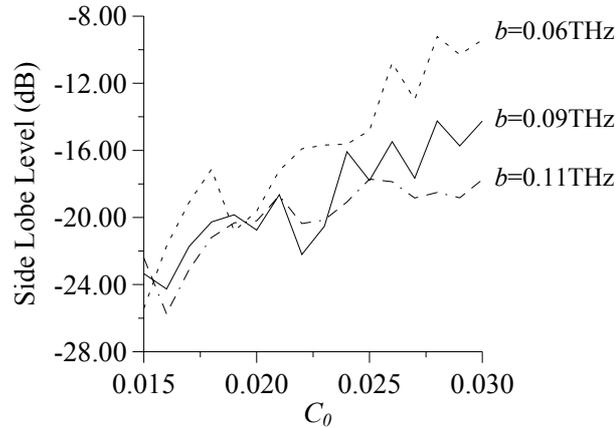
Γίνεται αντιληπτό, πως υπάρχουν τρεις παράμετροι που καθορίζουν το σχεδιασμό του AWG με ομαλή συνάρτηση μεταφοράς: Το C_0 , ο συνολικός αριθμός των κυματοδηγών καθώς και η σταθερά b . Ας σημειωθεί πως όλες αυτές οι παράμετροι καθορίζονται από τη γεωμετρία του AWG. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης, ο στόχος μας είναι η συνάρτηση μεταφοράς $H(F)$ να πλησιάζει όσο το δυνατόν την ιδανική ορθογώνια συνάρτηση μεταφοράς $H_0(F)$. Για να χαρακτηρίσουμε την αποτελεσματικότητα του σχεδιασμού πρέπει να υπολογίσουμε το ύψος των δευτερευόντων λοβών καθώς και την ομαλότητα της συνάρτησης μεταφοράς μέσα στο εύρος 3dB, του βασικού λοβού της. Η ομαλότητα μίας συνάρτησης μεταφοράς ορίζεται ως η διακύμανση της μέσα στο εύρος 3dB και δίνεται από την σχέση

$$\sigma_{3dB}^2 = \frac{1}{\Delta f_{3dB} \bar{H}^2} \int_{-\Delta f_{3dB}/2}^{\Delta f_{3dB}/2} |H(F) - \bar{H}|^2 dF \quad (7.28)$$

όπου Δf_{3dB} είναι το εύρος 3dB της $H(F)$ και \bar{H} το μέσο πλάτος της $H(F)$ εντός του εύρους 3dB,

$$\bar{H} = \frac{1}{\Delta f_{3dB}} \int_{-\Delta f_{3dB}/2}^{\Delta f_{3dB}/2} H(F) dF \quad (7.29)$$

Επίσης θα πρέπει να υπολογίσουμε και τις απώλειες που εισάγονται εξαιτίας της μεθόδου της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης. Οι απώλειες λόγω της μεθόδου σχεδιασμού, οφείλονται στο γεγονός πως ορισμένοι όροι του αθροίσματος της (7.14) εμφανίζονται με αρνητικό πρόσημο ($a_m = -1$), οπότε η κορυφή της $H(F)$ βρίσκεται χαμηλότερα σε σχέση με την κορυφή της $H_0(F)$ στην οποία όλοι οι όροι έχουν θετικό πρόσημο. Η φυσική σημασία του φαινομένου αυτού πρέπει να αναζητηθεί στην ποιότητα της συμβολής των κυμάτων που διαδίδονται μέσα στους κυματοδηγούς του AWG. Σε ένα συμβατικό AWG τα κύματα σε όλους τους κυματοδηγούς έχουν στο κεντρικό μήκος κύματος διαφορά φάσης που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και επομένως όλα συμβάλλουν προσθετικά. Στην περίπτωση του ομαλοποιημένου AWG, ορισμένα κύματα θα παρουσιάζονται με διαφορά φάσης π και επομένως δεν θα συμβάλλουν όλα προσθετικά στο κεντρικό μήκος κύματος. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα απώλεια ισχύος, όπως και στην περίπτωση των σφαλμάτων φάσης που είδαμε στο κεφάλαιο 4. Οι απώλειες αυτές μπορούν εύκολα να υπολογιστούν με τη βοήθεια της σχέσης:



Σχήμα 7-3: Το ύψος των δευτερευόντων λοβών συναρτήση του C_0 για τρεις τιμές της παραμέτρου b .

$$L_{dB} = 20 \log_{10} \left(H(0) / H_{\max}^p \right) \quad (7.30)$$

όπου

$$H_{\max}^p = \sum_{m=-P}^P C_m \quad (7.31)$$

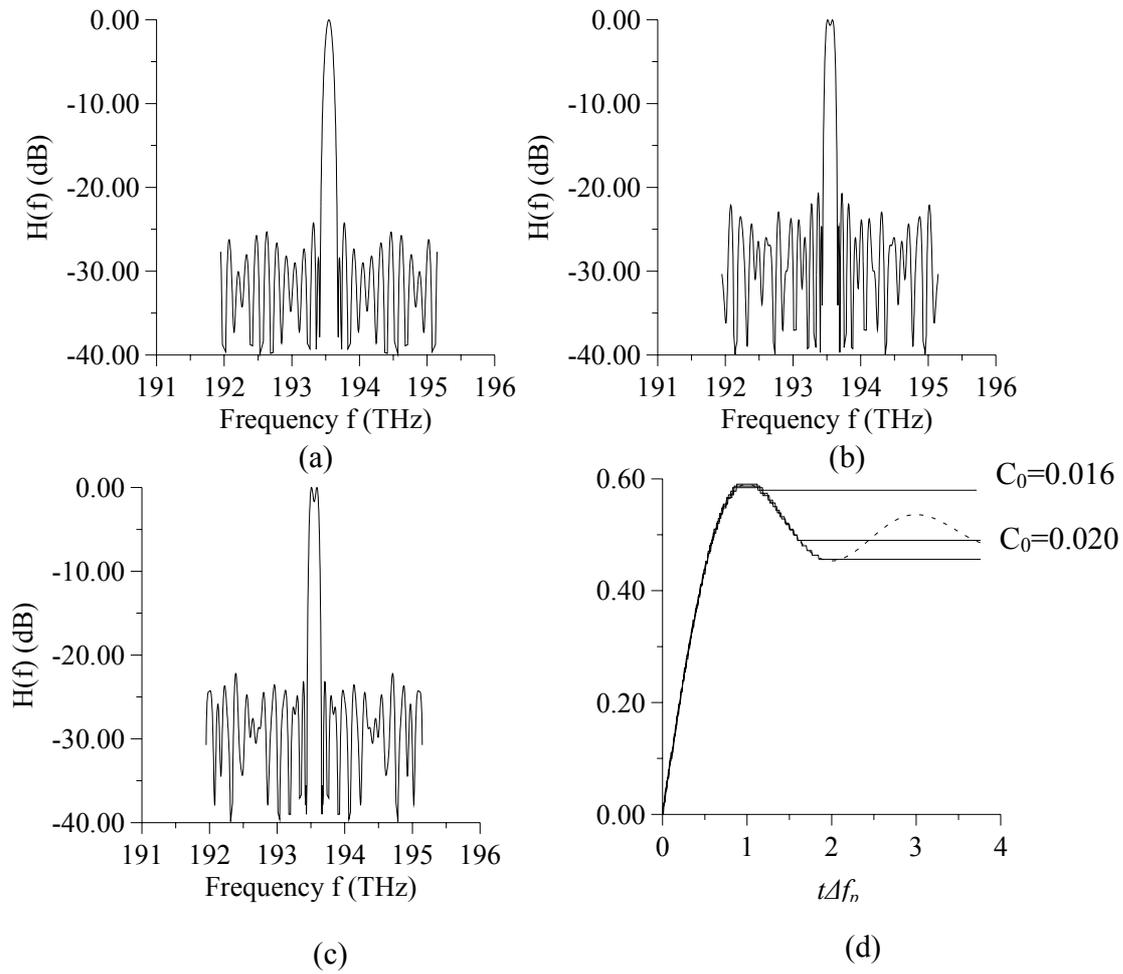
και

$$H(0) = \sum_{m=-P}^P (-1)^{a_m} C_m \quad (7.32)$$

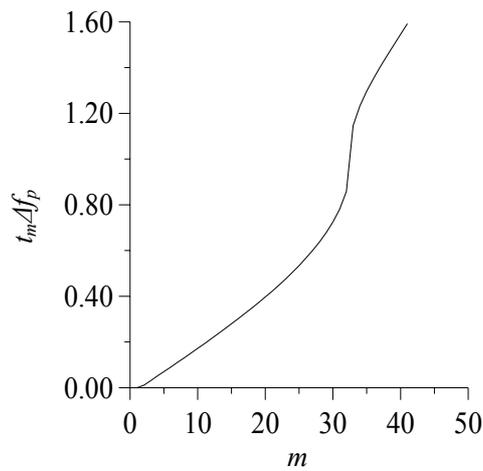
Οι παραπάνω απώλειες δεν είναι οι μοναδικές που εισάγονται από το σχεδιασμό με τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης. Όπως είδαμε, οι κυματοδηγοί φράγματος δε ισαπέχουν και ενδεχομένως αν υπάρχει ένα μεγάλο κενό μεταξύ των κυματοδηγών, τμήμα της οπτικής ισχύος του σήματος που διαδίδεται μέσα στο συζεύκτη αστέρα να μην βρίσκει κυματοδηγούς να διεγείρει. Έτσι οι απώλειες του φίλτρου αναμένεται να είναι αυξημένες σε σχέση με ένα συμβατικό AWG στο οποίο οι κυματοδηγοί έχουν τοποθετηθεί πυκνά πάνω στην έξοδο του συζεύκτη αστέρα. Πάντως πρέπει να σημειωθεί πως οι απώλειες ισχύος που εισάγονται μπορούν να κρατηθούν κάτω από -3dB , όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Όσο για τη διασπορά του φίλτρου, παρατηρούμε πως σύμφωνα με την (7.13), τα t_m , C_m και a_m είναι συμμετρικά και επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου $H(F)$ θα είναι πραγματική. Επίσης η $H(F)$ μοιάζει με μία ορθογώνια συνάρτηση $H_0(F)$ και αναμένουμε να είναι θετική μέσα στον κύριο λοβό της. Επομένως η φάση του φίλτρου μέσα στον κύριο λοβό θα είναι σταθερή και η διασπορά του φίλτρου πρακτικά μηδενική.

Για να παρουσιάσουμε την επίδραση των διαφόρων παραμέτρων που επηρεάζουν το σχεδιασμό του φίλτρου, σχεδιάζουμε ένα 8×8 AWG βάσει της μεθόδου της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης. Η απόσταση μεταξύ των γειτονικών καναλιών είναι $\Delta f_{ch}=0.2\text{THz}$, ενώ το εύρος της ορθογώνιας συνάρτησης που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε τίθεται ίσο με $\Delta f_p=0.16\text{THz}$. Το κεντρικό κανάλι βρίσκεται στο μήκος κύματος $\lambda_0=1.55\mu\text{m}$ (οπότε $f_0=193.55\text{THz}$). Τέλος το P έχει επιλεγεί ίσο με 40, κάτι που σημαίνει πως το AWG θα έχει $M=2P+1=81$ κυματοδηγούς φράγματος.



Σχήμα 7-4: Συναρτήσεις μεταφοράς που λαμβάνουμε με τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης για $b=0.09\text{THz}$, και a) $C_0=0.016$, b) $C_0=0.02$ και c) $C_0=0.022$. Επίσης στο (d) έχουν απεικονιστεί οι συναρτήσεις A και A_0 για τις τρεις περιπτώσεις.



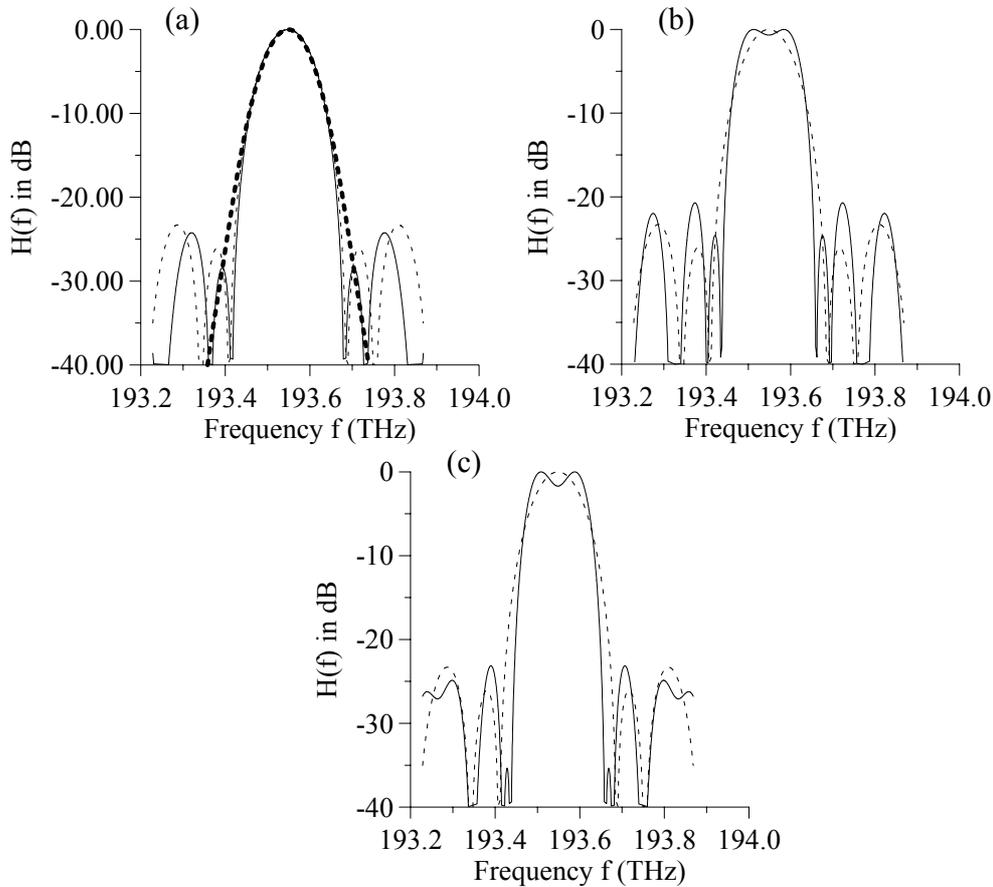
Σχήμα 7-5: Οι λύσεις των $t_m\Delta f_p$ για $C_0=0.02$ και $b=0.09\text{THz}$

7.3.1 ΥΨΟΣ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΩΝ ΛΟΒΩΝ ΚΑΙ ΟΜΑΛΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΕΥΡΟΣ ΜΙΣΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Στο σχήμα 7-3 έχουμε παραστήσει για διάφορες τιμές της παραμέτρου b το μέγιστο ύψος των δευτερευόντων λοβών σε συνάρτηση με την παράμετρο C_0 για $P=40$. Από το σχήμα καθίσταται σαφές πως το μέγιστο ύψος των δευτερευόντων λοβών παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση από τις παραμέτρους σχεδιασμού. Για χαμηλές τιμές του C_0 η συνάρτηση μεταφοράς, όπως θα συζητηθεί αργότερα, μοιάζει με τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συμβατικού AWG και επομένως οι δευτερεύοντες λοβοί είναι χαμηλοί. Ωστόσο όσο αυξάνεται το C_0 , η συνάρτηση A αρχίζει να προσεγγίζει την A_0 σε μεγαλύτερη περιοχή και η ομαλότητα μέσα στο εύρος 3dB αυξάνει. Ωστόσο, η αύξηση της ομαλότητας συνοδεύεται από μία αύξηση των δευτερευόντων λοβών της συνάρτησης μεταφοράς. Επειδή η παράμετρος b καθορίζει το κατά πόσο η συνάρτηση A προσεγγίζει την A_0 , έπεται πως το ύψος των δευτερευόντων λοβών αλλά και η ομαλότητα στα 3dB επηρεάζονται και από το b .

Τα αποτελέσματα της μεθόδου φαίνονται καλύτερα στο σχήμα 7-4, όπου έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τις συναρτήσεις μεταφοράς που λαμβάνουμε στην περίπτωση όπου το b ισούται με 0.09THz και για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου C_0 . Το σχήμα 7-4(a) παρουσιάζει τη συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνουμε όταν $C_0=0.016$ και της οποίας οι δευτερεύοντες λοβοί βρίσκονται κάτω από τα -24dB. Η μορφή της συνάρτησης μεταφοράς μοιάζει με εκείνη ενός συμβατικού AWG, αλλά έχει υψηλότερους δευτερεύοντες λοβούς. Η ύπαρξη υψηλότερων δευτερευόντων λοβών μπορεί να αποδοθεί σε τέσσερις λόγους: Πρώτον, η συνάρτηση A προσεγγίζει την A_0 σε ένα πεπερασμένο διάστημα. Συνεπώς, το δεύτερο μέρος της (7.22) δεν είναι μηδέν, με αποτέλεσμα να μην έχουμε απόλυτη ταύτιση της $H(F)$ με την $H_0(F)$, κάτι που θα οδηγούσε στην εξάλειψη των δευτερευόντων λοβών. Δεύτερον, ακόμα και εντός του πεπερασμένου διαστήματος όπου η A ακολουθεί την A_0 , η ταύτισή τους γίνεται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων $t_m \Delta f_p$. Τρίτον, η συνάρτηση σφάλματος που χαρακτηρίζει την (7.22) είναι ένα ολοκλήρωμα της συνάρτησης $1/F^2 |H(F) - H_0(F)|^2$. Η συνάρτηση βάρους $1/F^2$ έχει ως αποτέλεσμα η $H(F)$ να πλησιάζει την $H_0(F)$ καλύτερα όσο μικραίνει το F , δηλαδή κοντά στο $F=0$. Τέλος, όπως φαίνεται στο σχήμα 7-5, όπου έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τα t_m για τη συνάρτηση μεταφοράς του σχήματος 7-4(b), κοντά στο $\Delta f_p=1$ παρατηρείται ένα άλμα στις τιμές των t_m . Σύμφωνα με τη μέθοδο του διπλού τερετίσματος, τα y_m είναι ανάλογα των t_m και το άλμα αυτό μεταφέρεται και στις τιμές των y_m . Έτσι, η κατανομή των $C_m \sim \exp(-b^2 y_m^2)$ παρουσιάζει μία ασυνέχεια στο σημείο όπου εμφανίζεται το άλμα αυτό και, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, οι ασυνέχειες των C_m έχουν ως συνεπακόλουθο την εμφάνιση δευτερευόντων λοβών στη συνάρτηση μεταφοράς.

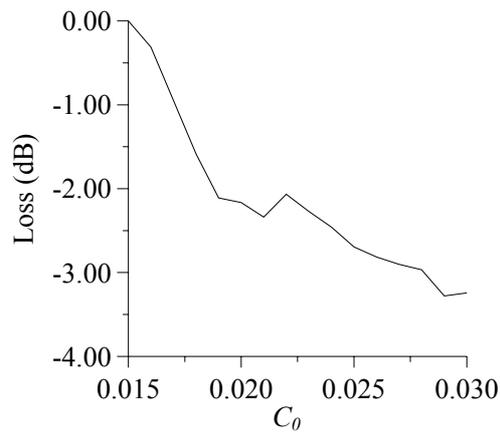
Παρατηρούμε πως στα σχήματα 7-4(b) και 7-4(c), οι δευτερεύοντες λοβοί έχουν ελαφρώς ανυψωθεί αλλά η ομαλότητα της συνάρτησης μεταφοράς έχει βελτιωθεί σημαντικά. Όπως φαίνεται στο σχήμα 7-4(d) αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση A ακολουθεί την A_0 μέσα στην περιοχή [1,2], όπου η A_0 έχει φθίνουσα μονοτονία. Αξίζει να σημειωθεί πως η ομαλότητα των συναρτήσεων 7-4(a), 7-4(b) και 7-4(c) είναι 0.037, 0.0204 και 0.0266 αντίστοιχα. Για να εκτιμήσουμε καλύτερα την ομαλότητα της μεθόδου, έχουμε παραστήσει γραφικά την συνάρτηση μεταφοράς κοντά στο $F=0$ στο σχήμα 7-6. Τα σχήματα 7-6(a) έως 7-6(c) αντιστοιχούν στα σχήματα 7-4(a) έως 7-4(c) αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως η πιο ομαλή συνάρτηση μεταφοράς είναι η (β) η οποία έχει ομαλότητα $\sigma_{3dB}^2=0.0204$. Στο σχήμα 7-4(a) έχουμε συμπεριλάβει με παχιές διακεκομμένες γραμμές τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συμβατικού AWG. Επίσης με ελαφριές διακεκομμένες γραμμές έχουμε παραστήσει τη συνάρτηση μεταφοράς ενός AWG στο οποίο όλα τα a_m είναι θετικά και για το οποίο $C_0=0.015$.



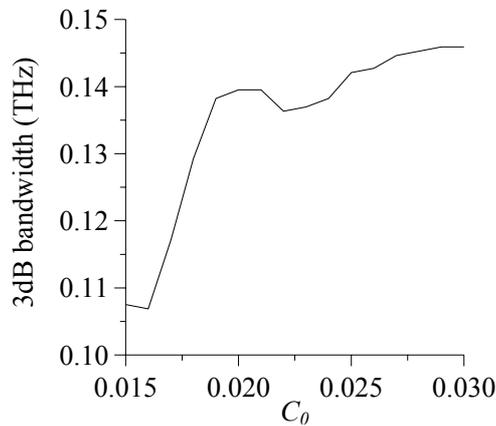
Σχήμα 7-6: Συναρτήσεις μεταφοράς κοντά στο $F=0$, που λαμβάνουμε με την μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης για $b=0.09\text{THz}$, και a) $C_0=0.016$, b) $C_0=0.02$ και c) $C_0=0.022$.

7.3.2 ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Όπως συζητήθηκε και προηγουμένως, η μέθοδος της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης εισάγει κάποιες απώλειες εξαιτίας της στροφής της φάσης κατά π εξαιτίας των εκθετών a_m που είναι ίσοι με 1 στο διάστημα $[1,2]$. Έτσι, η κορυφή της συνάρτησης μεταφοράς εμφανίζεται με μειωμένο ύψος, στο $F=0$, σε σχέση με το ύψος της συνάρτησης μεταφοράς όταν όλοι οι όροι του αθροίσματος της $H(0)$ συμβάλλουν θετικά. Οι απώλειες εξαρτώνται από τον αριθμό των εκθετών a_m που έχουν τιμή 1 και οι οποίοι εξαρτώνται από τις παραμέτρους C_0 και b . Στο σχήμα 7-7 έχουμε αναπαραστήσει τις απώλειες εξαιτίας της ανεπαρκούς συμβολής. Παρατηρούμε πως όσο αυξάνει το C_0 τόσο αυξάνουν και οι απώλειες λόγω ανεπαρκούς συμβολής καθώς από το σχήμα 7-4(d) καθίσταται φανερό πως όσο αυξάνει το C_0 τόσο αυξάνει και το πλήθος των λύσεων $t_m \Delta f_p$ που βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[1,2]$. Για τις συναρτήσεις μεταφοράς των σχημάτων 7-4(a), 7-4(b) και 7-4(c), οι απώλειες είναι -0.31dB , -2.16dB και -2.06dB αντίστοιχα. Ας σημειωθεί πως στις παραπάνω απώλειες δεν έχουμε συμπεριλάβει τις απώλειες λόγω της αραίωσης των κυματοδηγών του φράγματος που συζητήσαμε στην αρχή της 7.3.



Σχήμα 7-7: Μεταβολή των απωλειών λόγω ανεπαρκούς συμβολής στην περίπτωση όπου $b=0.09$ συναρτήσει του C_0 .

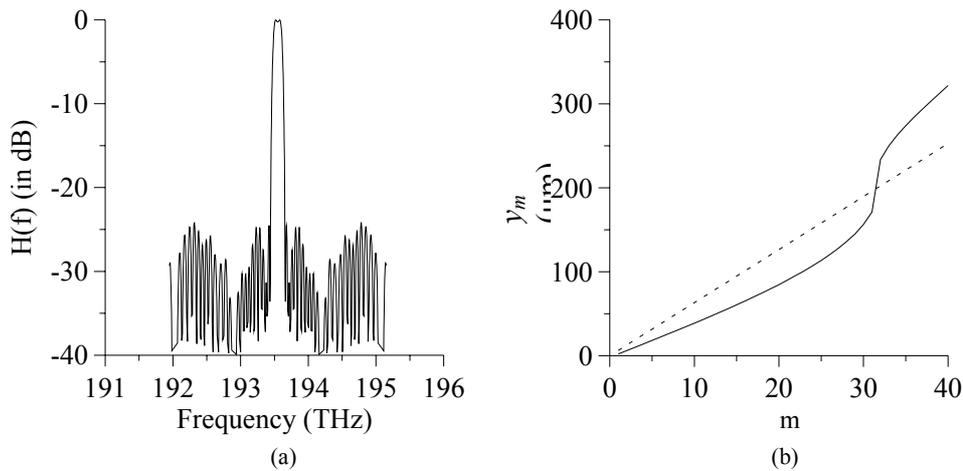


Σχήμα 7-8: Μεταβολή του εύρους ζώνης 3dB σε σχέση με την παράμετρο C_0

7.3.3 ΤΟ ΕΥΡΟΣ ΜΙΣΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Στο σχήμα 7-8, έχουμε αναπαραστήσει το εύρος 3dB σε συνάρτηση με την παράμετρο C_0 για $b=0.09\text{THz}$. Όσο αυξάνει το C_0 το εύρος 3dB αυξάνει γρήγορα στα 0.14THz και στη συνέχεια τείνει αργά προς την τιμή 0.16THz, η οποία αποτελεί και το εύρος της ιδανικής συνάρτησης που επιθυμούμε να προσεγγίσουμε. Η συμπεριφορά αυτή του εύρους 3dB οφείλεται στο γεγονός πως με την αύξηση της παραμέτρου C_0 αυξάνεται και ο αριθμός των όρων για τους οποίους τα a_m έχουν την τιμή 1 και η συνάρτηση A προσεγγίζει καλύτερα την ιδανική συνάρτηση A_0 (σχήμα 7-4(d)).

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως με τη βοήθεια της μεθόδου της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης μπορούμε να σχεδιάσουμε AWG που να έχουν διαφορετικό εύρος 3dB. Για παράδειγμα αν θέσουμε $\Delta f_p=0.32\text{THz}$ αντί για 0.16THz και $\Delta f_{ch}=0.4\text{THz}$ αντί για 0.2THz λαμβάνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς που έχουμε παραστήσει στο σχήμα 7-9 με συνεχή γραμμή. Οι παράμετροι b και C_0 έχουν τιμή 0.09THz και 0.0185 αντίστοιχα. Το εύρος 3dB της συνάρτησης μεταφοράς ισούται με 0.272THz το οποίο είναι διπλάσιο από εκείνο της συνάρτησης



Σχήμα 7-9 (α) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός AWG με $C_0=0.02$, $b=0.09$ THz στην οποία έχουν αφαιρεθεί οι όροι που αντιστοιχούν στα C_0 , C_{33} , C_{35} . (β) Οι θέσεις των κυματοδηγών (συνεχής γραμμή) του φράγματος για το AWG του σχήματος 7-6(a) και για ένα AWG με απόσταση κυματοδηγών φράγματος ίση με $6.3\mu\text{m}$ (διακεκομμένες γραμμές)

μεταφοράς του σχήματος 7-6(c) την οποία έχουμε παραστήσει στο ίδιο σχήμα με διακεκομμένες γραμμές.

7.3.4 ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΥΨΟΥΣ ΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΩΝ ΛΟΒΩΝ

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ μπορεί να έχει υψηλούς δευτερεύοντες λοβούς ιδιαίτερα μακριά από την κεντρική της συχνότητα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο για την ελάττωση του ύψους των λοβών αυτών.

Όπως φαίνεται από την (7.14), η συνάρτηση μεταφοράς $H(F)$ είναι ένα άθροισμα όρων συνημίτονων της μορφής $\cos(2\pi t_m F)$. Κάθε όρος έχει περίοδο $1/t_m$, η οποία και καθορίζει τη θέση των μεγίστων του $|\cos(2\pi t_m F)|$, που βρίσκονται στις θέσεις $F_k = k/t_m$ όπου k ακέραιος. Οι δευτερεύοντες λοβοί της συνάρτησης μεταφοράς έχουν αυξημένο ύψος στα διαστήματα του F έξω από τον κύριο λοβό του $H(F)$ όπου βρίσκονται συγκεντρωμένα πολλά μέγιστα των όρων $\cos(2\pi t_m F)$. Το ίδιο συμβαίνει και στα διαστήματα όπου βρίσκονται συγκεντρωμένα πολλά ελάχιστα των όρων $\cos(2\pi t_m F)$. Επομένως μία μέθοδος για να μειώσουμε το ύψος των δευτερευόντων λοβών είναι να αφαιρέσουμε ορισμένους από τους όρους που προκαλούν την ανύψωση των δευτερευόντων λοβών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παράλειψη ορισμένων κυματοδηγών φράγματος κάτι που θα προκαλέσει επιπλέον απώλειες. Ωστόσο, αν ο αριθμός των κυματοδηγών που θα παραλειφθούν είναι μικρός, οι απώλειες θα είναι πολύ μικρές.

Στο σχήμα 7-9(α) έχουμε αναπαραστήσει γραφικά τη συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνουμε αν από τη συνάρτηση μεταφοράς του σχήματος 7-4(b) αφαιρέσουμε τους όρους με συντελεστή C_0 , C_{33} και C_{35} . Το ύψος των δευτερευόντων λοβών βρίσκεται στα -24.3dB ενώ το ύψος των δευτερευόντων λοβών του σχήματος 7-4(b) ισούται με -20.3dB . Ας σημειωθεί πως οι απώλειες που εισάγονται με την απομάκρυνση των τριών όρων είναι αμελητέες και ίσες με -0.34dB .

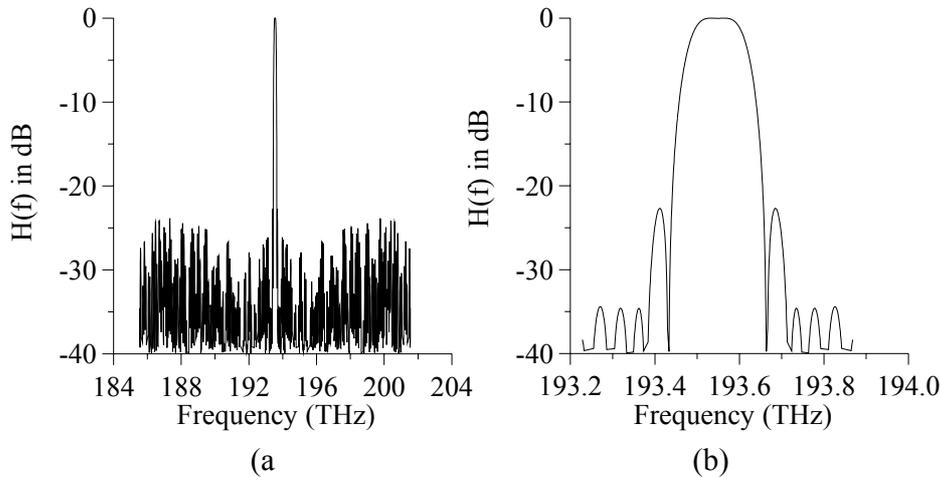
7.3.5 ΑΚΤΙΝΑ ΣΥΖΕΥΚΤΗ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΕΞΟΔΟΥ

Εξαιτίας της μεθόδου του διπλού τερετίσματος, η κατανομή των C_m σχετίζεται με την κατανομή των t_m βάσει της σχέσης (7.26). Η τιμή της σταθεράς b που δίνεται από την (7.27) είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ των κυματοδηγών εξόδου Δy_{out} του AWG (σχήμα 7-1). Το ελάχιστο Δy_{out} καθορίζεται από τα φαινόμενα σύζευξης που λαμβάνουν χώρα στους κυματοδηγούς εξόδου και επομένως υπάρχει ένα άνω όριο b_{max} στην τιμή των b που μπορούμε να επιτύχουμε. Τα φαινόμενα σύζευξης μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος αποτελούν επίσης ένα σημαντικό ζήτημα για τις επιδόσεις του AWG. Η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών του φράγματος Δy δεν μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή και επομένως η παράμετρος u που τη καθορίζει σε μεγάλο βαθμό μέσω της (7.24) πρέπει να είναι μεγαλύτερη από μία συγκεκριμένη τιμή. Εφόσον το u είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας R του συζεύκτη αστέρα, έπεται πως η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών μπορεί να ρυθμιστεί επιλέγοντας κατάλληλα το R .

Για παράδειγμα αν οι πυρήνες των κυματοδηγών είναι $2\mu\text{m}$, ο δείκτης διάθλασης του πυρήνα του κυματοδηγού είναι $n_w=3.3$ και η διαφορά μεταξύ των δεικτών διάθλασης πυρήνα και περιβλήματος είναι $\Delta n_w=0.02$, τότε εφαρμόζοντας τα διαγράμματα που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3 μπορούμε να βρούμε πως η παράμετρος σ που παρουσιάζει τη διακύμανση του προφίλ του τρόπου του κυματοδηγού είναι $\approx 1\mu\text{m}$. Επομένως, είναι λογικό να θέσουμε την απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος να ίση με $\Delta y=4\mu\text{m}$. Αν η απόσταση μεταξύ των καναλιών είναι $\Delta f_{ch}=0.2\text{GHz}$, τότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η παράμετρος b είναι $b_{max}=0.254\text{THz}$. Για τη συνάρτηση μεταφοράς του σχήματος 7-9(α) για την οποία έχουμε θέσει $b=0.09\text{THz}$, η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών εξόδου θα πρέπει να είναι ίση με $\Delta y_{out}=14\mu\text{m}$. Επίσης για την ίδια συνάρτηση μεταφοράς, η ελάχιστη δυνατή τιμή t_m-t_{m-1} βρίσκεται για $m=2$, δηλαδή έχουμε $\Delta t_{min}=t_2-t_1$. Επομένως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος θα δίνεται από την $\Delta y_{min}=u(t_2-t_1)$. Για $\Delta y_{min}=4\mu\text{m}$ θα πρέπει να έχουμε $u=32$ και χρησιμοποιώντας την (7.25) μπορούμε να βρούμε πως η ελάχιστη δυνατή ακτίνα του συζεύκτη του AWG θα πρέπει να είναι $R_{min}\approx 4800\mu\text{m}$.

7.3.6 ΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

Η απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών φράγματος καθορίζεται από τις θέσεις y_m οι οποίες για την περίπτωση του σχήματος 7-9(α) έχουν παρασταθεί γραφικά στο σχήμα 7-9(β) μαζί με τις θέσεις των κυματοδηγών ενός AWG με ισαπέχοντες κυματοδηγούς στο οποίο η απόσταση μεταξύ των κέντρων δύο γειτονικών κυματοδηγών ισούται $6.3\mu\text{m}$. Η απόσταση αυτή έχει επιλεγεί έτσι ώστε να ισούται με τη μέση απόσταση μεταξύ των κυματοδηγών του AWG που σχεδιάσαμε με τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης οι κυματοδηγοί είναι τοποθετημένοι πιο πυκνά στο κέντρο του φράγματος και πιο αραιοί στα άκρα. Από το σχήμα παρατηρούμε πως σε σχέση με το συμβατικό AWG οι κυματοδηγοί του AWG που έχει σχεδιαστεί με τη βοήθεια της μεθόδου της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης. Πράγματι, οι κυματοδηγοί του φράγματος του τελευταίου είναι πυκνά τοποθετημένοι κοντά στον κεντρικό κυματοδηγό ($y_m=0$). Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο κυματοδηγών του φράγματος είναι $4\mu\text{m}$. Κοντά στο $m\approx 30$ παρατηρείται αραιώση των κυματοδηγών και για $m>30$ οι κυματοδηγοί είναι πιο αραιά τοποθετημένοι.



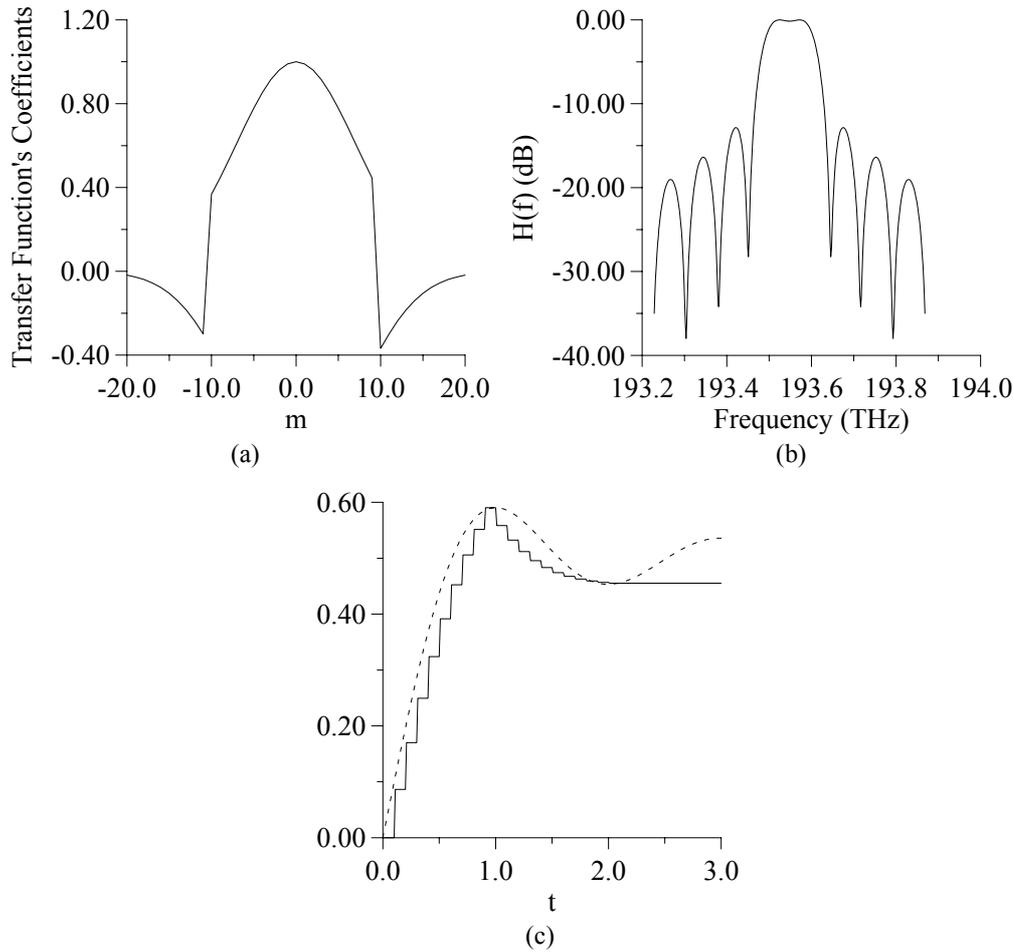
Σχήμα 7-10: Η συνάρτηση μεταφοράς ενός AWG σχεδιασμένου με τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης (α) σε μία περιοχή εύρους 8THz γύρω από την κεντρική συχνότητα $f_0=193.55\text{THz}$ και (β) σε μία περιοχή 0.3THz γύρω από την f_0

Εξαιτίας της αραιώσης των κυματοδηγών όσο απομακρυνόμαστε από τον κεντρικό κυματοδηγό και εξαιτίας του κενού που παρατηρείται στο διάστημα $[150\mu\text{m}, 250\mu\text{m}]$ αναμένουμε την αύξηση των απωλειών του AWG. Οι απώλειες αυτές μπορούν να μειωθούν όπως θα δείξουμε με την επιλογή άλλων τιμών για τις παραμέτρους b και C_0 και προσθέτοντας μερικούς κυματοδηγούς όπου τα κενά μεταξύ των κυματοδηγών είναι μεγάλα.

Αυξάνοντας τον αριθμό των κυματοδηγών του φράγματος και επομένως και το πλήθος P των όρων της συνάρτησης μεταφοράς, μπορούμε να σχεδιάσουμε AWG με μεγαλύτερο αριθμό καναλιών. Στο σχήμα 7-10 έχουμε παραστήσει γραφικά τη συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνουμε αν αυξήσουμε τον αριθμό των κυματοδηγών από 81 σε 201. Οι κυματοδηγοί που αντιστοιχούν στους όρους με πλάτος $C_0, C_{78}, C_{91}, C_{92}$ και C_{94} έχουν παραληφθεί και το μέγιστο ύψος των δευτερευόντων λοβών είναι -23dB .

7.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Για το πρόβλημα της ομαλοποίησης της συνάρτησης μεταφοράς ενός AWG έχουν προταθεί πολλές λύσεις. Στην παρούσα παράγραφο θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης με τις μεθόδους του χωρικού φιλτραρίσματος [DTB97] και του υπό-παραβολικού τερετίσματος [PW99]. Η τεχνική του χωρικού φιλτραρίσματος βασίζεται στο γεγονός πως η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ ενός συμβατικού AWG είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier των C_m [OY95]. Επομένως, αν τα C_m είχαν μορφή παρόμοια με της εκείνη της συνάρτησης sinc τότε θα αναμέναμε το σχήμα της $H(f)$ να προσεγγίζει ένα τέλειο ορθογώνιο. Δυστυχώς δεν είναι εύκολο να επέμβουμε άμεσα στη μορφή των C_m . Εισάγοντας όμως μία διαφορά φάσης π στους ακριανούς κυματοδηγούς, μπορούμε να προσδώσουμε στα C_m το πρόσημο της συνάρτησης sinc στην περιοχή που καλύπτεται από τον κύριο λοβό και τους δύο γειτονικούς του, όπως φαίνεται στο σχήμα 7-11(a). Στο σχήμα 7-11(b) δείχνουμε τη συνάρτηση μεταφορά που λαμβάνεται από τη μέθοδο του χωρικού φιλτραρίσματος, ενώ στο σχήμα 7-11(c) έχουμε παραστήσει γραφικά τις αντίστοιχες συναρτήσεις A και A_0 για τις τιμές των t_m που χρησιμοποιούνται στην [DTB97] και δίνονται από τη σχέση:

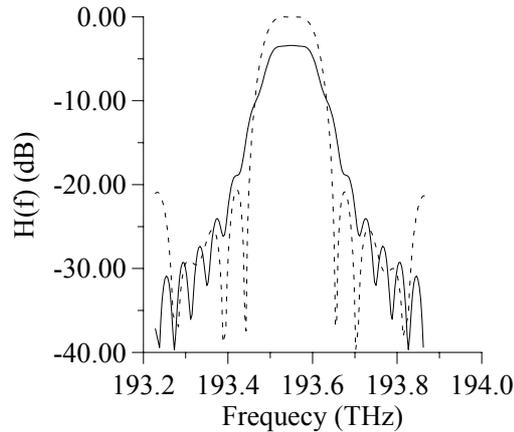


Σχήμα 7-11: Σχεδιασμός της συνάρτησης μεταφοράς ενός AWG με τη μέθοδο του χωρικού φιλτραρίσματος. (α) Οι συντελεστές C_m της συνάρτησης μεταφοράς, (β) η συνάρτηση μεταφοράς που παράγεται και (γ) οι συναρτήσεις $A(t)$ (συνεχείς γραμμές) και $A_0(t)$ (διακεκομμένες) στην περίπτωση αυτής της μεθόδου.

$$t_m \Delta f_p = \frac{\Delta f_p}{FSR} m \quad (7.33)$$

Είναι προφανές από το σχήμα 7-11(c) πως στην περίπτωση της μεθόδου του χωρικού φιλτραρίσματος η συνάρτηση A δεν πλησιάζει αρκετά την A_0 και σε τούτο οφείλεται το σημαντικό ύψος των δευτερευόντων λοβών που ξεπερνούν τα -15dB . Ας σημειωθεί πως στην [DTB97] το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώθηκε σημαντικά με τη μεταβολή της κατανομής των C_m , έτσι ώστε οι ασυνέχειες των συντελεστών C_m να ελαττώνονται. Ωστόσο, κατασκευαστικά η κατανομή των C_m είναι δύσκολο να μεταβληθεί και επομένως είναι αμφίβολο εάν η τεχνική αυτή μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη.

Επιπλέον, με τη μέθοδο αυτή η τιμή του Δf_p σχετίζεται άμεσα με την περίοδο του AWG. Πράγματι το Δf_p καθορίζεται από το πρώτο μέγιστο του $A(t\Delta f_p)$ το οποίο συμπίπτει περίπου με το πρώτο μέγιστο της $A_0(t\Delta f_p)$. Το πρώτο μέγιστο της $A_0(t\Delta f_p)$ βρίσκεται στη θέση $t_{max}\Delta f_p=1$ και είναι το σημείο όπου οι συντελεστές C_m αλλάζουν πρόσημο από θετικό σε αρνητικό. Με τη μέθοδο του χωρικού φιλτραρίσματος, η τιμή του m για την οποία οι συντελεστές C_m αλλάζουν πρόσημο ισούται με $M/4$ και επομένως θα έχουμε $t_{M/4}\Delta f_p=1$ ή χρησιμοποιώντας την (7.33),



Σχήμα 7-12: Σύγκριση της μεθόδου υπο-παραβολικού τερετίσματος και της μεθόδου αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης

$$\Delta f_p = 4FSR / M \quad (7.34)$$

Επομένως με τη μέθοδο αυτή η τιμή του εύρους της συνάρτησης μεταφοράς καθορίζεται άμεσα από τον αριθμό των κυματοδηγών και την FSR. Αντίθετα στην περίπτωση του AWG που έχει σχεδιαστεί με τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης τούτο δεν ισχύει (ας σημειωθεί άλλωστε πως στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι περιοδική, οπότε το φράγμα δεν έχει ελεύθερη φασματική περιοχή).

Μία άλλη μέθοδος που προτάθηκε στην [PW99] είναι η μέθοδος του παραβολικού τερετίσματος που χρησιμοποιεί ένα υπό-παραβολικό προφίλ φάσης το οποίο προστίθεται στη φάση του σήματος που διατρέχει τους κυματοδηγούς φράγματος. Στη μέθοδο αυτή οι συντελεστές t_m δίνονται από τη σχέση:

$$t_m = \frac{1}{FSR} (m + B|m|^K) \quad (7.35)$$

όπου $K < 2$. Ας σημειωθεί πως για $B=0$ οι τιμές των t_m ταυτίζονται με τις τιμές των t_m του συμβατικού AWG. Το επιπλέον τερέτισμα προκαλεί τη διεύρυνση της συνάρτησης μεταφοράς διατηρώντας το Gaussian σχήμα της στην περίπτωση όπου το C_p είναι πολύ μικρότερο από το C_0 . Στην περίπτωση όπου το C_p δεν είναι αμελητέο σε σχέση με το C_0 τότε η συνάρτηση μεταφοράς παράγεται από το συγκερασμό μίας Gaussian και μίας συνάρτησης sinc. Η ομαλότητα της συνάρτησης μεταφοράς εξαρτάται από την τιμή του K . Δυστυχώς η βέλτιστη τιμή του K δεν μπορεί να υπολογιστεί παρά εξετάζοντας αριθμητικά την ομαλότητα της συνάρτησης μεταφοράς για πολλές τιμές του K . Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής της τεχνικής είναι ότι το φασματικό διάστημα που μεσολαβεί από την κορυφή της συνάρτησης μεταφοράς μέχρι τις άκρες της είναι αρκετά μεγάλο. Επίσης οι απώλειες που εισάγονται από το παραβολικό προφίλ φάσης είναι μεγαλύτερες σε σχέση με την τεχνική της αιτιοκρατικής συνέλιξης.

Στο σχήμα 7-12 έχουμε αναπαραστήσει με συνεχείς γραμμές τη συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνουμε με την βοήθεια της μεθόδου του υπό-παραβολικού τερετίσματος για $M=41$, $B=1.8 \times 10^{-5}$ και $K=1.90$. Επίσης με διακεκομμένες γραμμές έχουμε αναπαραστήσει τη συνάρτηση μεταφοράς που λαμβάνουμε με τη μέθοδο της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης για $M=81$, $b=0.15$, $C_0=0.03$ και $\Delta f_p=0.16$. Οι τιμές του B και του K έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιούν την ομαλότητα της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφοράς. Οι δύο συναρτήσεις

μεταφοράς έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να έχουν το ίδιο εύρος 3dB. Στην περίπτωση της μεθόδου του υπό-παραβολικού τερετίσματος, οι απώλειες που εισάγονται είναι ίσες με -6.4dB ενώ στην περίπτωση της αιτιοκρατικής εκλέπτυνσης οι απώλειες είναι -3.1dB. Ας σημειωθεί πως στη δεύτερη περίπτωση έχουμε προσθέσει ορισμένους κυματοδηγούς ώστε να μειώσουμε τις απώλειες και έχουμε αφαιρέσει κάποιους άλλους ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το ύψος των δευτερευόντων λοβών που βρίσκονται κάτω από -21dB.

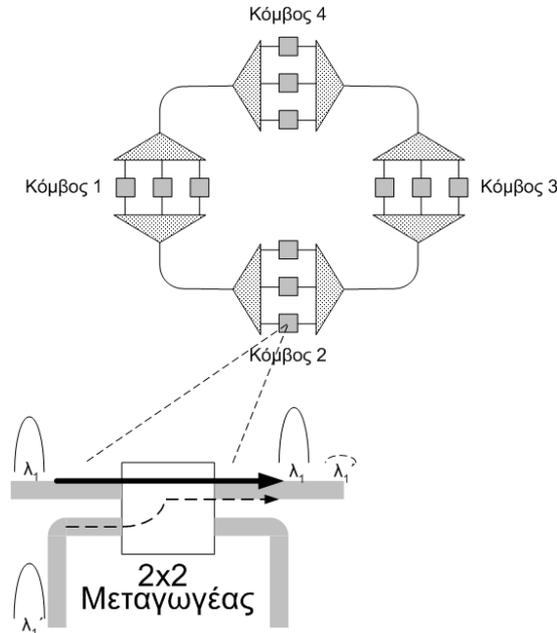
Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως οι απώλειες στην περίπτωση του υποπαραβολικού τερετίσματος οφείλονται στο γεγονός πως για να έχουμε τελικά ομαλή συνάρτηση μεταφοράς, η αρχική συνάρτηση (δηλαδή η συνάρτηση με $B=0$) είναι στενή σε σχέση με την τελική. Επομένως εφόσον η ενέργεια $E = \int |H(f)|^2 df$ στο φασματικό πεδίο διατηρείται σταθερή εξαιτίας της ταυτότητας του Parseval [MF53, p. 456], αναμένουμε κατά τη διεύρυνση της $H(f)$ η κορυφή της να χαμηλώνει ώστε το E να παραμένει σταθερό. Μία ισοδύναμη ερμηνεία των αυξημένων απωλειών που εισάγει η μέθοδος παρέχεται από την ποιότητα της συμβολής. Πράγματι, το επιπλέον υπό-παραβολικό προφίλ φάσης που εισάγεται αλλοιώνει την ένταση της συμβολής της η οποία κατανέμεται σε μεγαλύτερο εύρος γύρω από την κεντρική συχνότητα. Επειδή όλοι οι όροι δεν συμβάλλουν με διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π έπεται πως το κέντρο της συνάρτησης μεταφοράς θα εμφανίζεται χαμηλωμένο, όπως και στην περίπτωση των σφαλμάτων φάσης που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 4. Αξίζει να σημειωθεί πως οι απώλειες λόγω της διεύρυνσης της συνάρτησης μεταφοράς είναι -5dB. Υπάρχουν επιπλέον απώλειες, περίπου -1.4dB, που εισάγονται εξαιτίας του γεγονότος πως στη μέθοδο αυτή ένα τμήμα της ενέργειας του οπτικού σήματος δεν διεγείρει το φράγμα των κυματοδηγών (έτσι ώστε το C_p να μην είναι πολύ μικρότερο του C_0).

8. ΕΝΑ ΑΚΡΙΒΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ WDM

8.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο 4 αναλύσαμε την επίδραση της ενδοκαναλικής διαφωνίας σε μία $N \times N$ οπτική διασύνδεση. Είδαμε πως η ενδοκαναλική διαφωνία θέτει ένα όριο στον ελάχιστο ρυθμό σφάλματος (BER) που μπορεί να επιτευχθεί επειδή η ισχύς του θορύβου διαφωνίας εξαρτάται σε μία πρώτη προσέγγιση γραμμικά από την ισχύ του σήματος. Επομένως η αύξηση της ισχύος εκπομπής κάθε καναλιού δεν θα επηρεάζει το λόγο σήματος προς διαφωνία με αποτέλεσμα το BER να μην μεταβάλλεται σημαντικά

Το πρόβλημα της διαφωνίας το συναντούμε και σε άλλα είδη δικτύων [GWK99] όπως σε ένα δακτύλιο WDM που εικονίζεται στο σχήμα 8-1



Σχήμα 8-1: Δίκτυο δακτυλίου WDM.

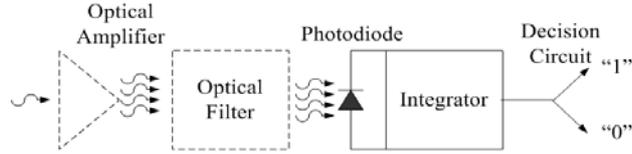
Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2, κάθε κόμβος διαθέτει έναν αποπολυπλέκτη, έναν πολυπλέκτη και K το πλήθος 2×2 οπτικούς διακόπτες που χρησιμοποιούνται για να προσθέτουν

και να αφαιρούν ένα από τα K διαθέσιμα μήκη κύματος. Όπως φαίνεται στο σχήμα 8-1, η ενδοκαναλική διαφωνία προέρχεται από το γεγονός ότι οι μεταγωγείς δεν είναι ιδανικοί, οπότε ένα τμήμα του ανεπιθύμητου σήματος (συνιστώσα ενδοκαναλικής διαφωνίας) μεταφέρεται στην έξοδο του μεταγωγέα. Επειδή το ανεπιθύμητο σήμα βρίσκεται στο ίδιο μήκος κύματος με το επιθυμητό σήμα δεν μπορεί να απομακρυνθεί με φιλτράρισμα. Για το λόγο αυτό η διαφωνία συσσωρεύεται αθροιστικά από το σύνολο των κόμβων του δικτύου. Για παράδειγμα, σε ένα σήμα που έχει ως αφετηρία τον κόμβο 1 και καταλήγει στον κόμβο 3 μέσω του κόμβου 2, ενδεχομένως να παρεμβάλλεται ενδοκαναλική διαφωνία από τους κόμβους 1, 2 και 3.

Στη βιβλιογραφία έχουν κατά καιρούς προταθεί πολλές μέθοδοι για την αποτίμηση των επιπτώσεων της ενδοκαναλικής διαφωνίας στα συστήματα WDM. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 5, η μεταβλητή απόφασης στο φωτοδέκτη αποτελείται από τρεις συνεισφορές: Το διακρότημα σήματος-σήματος, το διακρότημα σήματος-θορύβου διαφωνίας και το διακρότημα διαφωνίας-διαφωνίας. Αν αγνοήσουμε το διακρότημα διαφωνίας-διαφωνίας, τότε υπάρχουν δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις: Η πρώτη είναι να θεωρήσουμε πως η πυκνότητα πιθανότητας είναι Gaussian. Ωστόσο, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 5, η Gaussian προσέγγιση δεν περιγράφει ικανοποιητικά το θόρυβο σήματος-διαφωνίας. Αυτός ήταν άλλωστε ο λόγος που χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη εναλλακτική, τη μέθοδο saddle point για να υπολογίσουμε το BER από την MGF του θορύβου σήματος-διαφωνίας, η οποία είναι γνωστή σε κλειστή μορφή.

Η χρήση της παραπάνω μεθόδου βασίζεται στο γεγονός ότι αγνοήθηκε ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας με το σκεπτικό πως η ισχύς του είναι πολύ μικρή. Ωστόσο, η παράληψη του θορύβου αυτού έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή της στατιστικής συμπεριφοράς του θορύβου. Οι ουρές της PDF ενδεχομένως να επηρεάζονται από την παράληψη αυτή και επομένως το BER να μην υπολογίζεται σωστά. Δυστυχώς, αν επιθυμούμε να συμπεριλάβουμε το θόρυβο διαφωνίας-διαφωνίας τότε η MGF δεν είναι γνωστή σε κλειστή μορφή και επομένως η εφαρμογή της μεθόδου saddle point δεν είναι άμεσα εφικτή.

Πρόσφατα σε πειράματα που διενεργήθηκαν [JR01] παρατηρήθηκε πως η πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής απόφασης όντως επηρεάζεται από το θόρυβο διαφωνίας-διαφωνίας ο οποίος την καθιστά μη συμμετρική. Για την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων, η MGF υπολογίστηκε με αριθμητική ολοκλήρωση σε M διαστάσεις [JR01], όπου M το πλήθος των παρεμβαλλόμενων καναλιών διαφωνίας. Στη συνέχεια, η PDF υπολογίστηκε με τη βοήθεια του FFT καθώς, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 6, η MGF και η PDF συνδέονται βάσει ενός μετασχηματισμού Fourier. Είναι προφανές πως όσο αυξάνει το M η παραπάνω μέθοδος πρέπει να θυσιάσει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από την M -διάστατη ολοκλήρωση προς όφελος του υπολογιστικού χρόνου που χρειάζεται. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό και πιο αποδοτικό τρόπο υπολογισμού της MGF που στηρίζεται στην αριθμητική ολοκλήρωση ενός διπλού ολοκληρώματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τιμές του M που δεν υπερβαίνουν το 100. Επίσης θα αποδείξουμε πως όταν $M \rightarrow \infty$, η στατιστική της μεταβλητής απόφασης προσεγγίζει ασυμπτωτικά εκείνη μίας μη-κεντρικής χι-τετράγωνης τυχαίας μεταβλητής. Τέλος θα δείξουμε πως μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας και το θόρυβο ASE των οπτικών ενισχυτών, αλλά και τους άλλους θορύβους όπως τον ηλεκτρικό θερμικό θόρυβο. Έτσι το τελικό μοντέλο θα είναι σε θέση να εκτιμά με ακρίβεια την επίδραση του θορύβου διαφωνίας σε ένα WDM σύστημα επιτρέποντας το σωστό σχεδιασμό του.



Σχήμα 8-2: Ένα διάγραμμα τυπικού δέκτη ASK.

8.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα εξάγουμε μία έκφραση για τη μεταβλητή απόφασης ενός WDM δέκτη, παρουσία θορύβου ενδοκαναλικής διαφωνίας. Η έκφραση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση γεννήτριας ροτών της μεταβλητής απόφασης μέσω της οποίας θα γίνει και η εκτίμηση του BER. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 5, το οπτικό πεδίο στην είσοδο του φωτοφωρατή δίνεται από τη σχέση:

$$E(t) = g_0(t) \exp(j\phi_0) + \sum_{m \geq 1} g_m(t) \exp(j\phi_m) \quad (8.1)$$

όπου $g_0(t)$ είναι ο παλμός του σήματος και $g_m(t)$ για $m > 0$, είναι οι παλμοί των παρασιτικών σημάτων που συνθέτουν το θόρυβο ενδοκαναλικής διαφωνίας. Οι φάσεις ϕ_m είναι τυχαία κατανομημένες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και οφείλονται στο θόρυβο φάσης των πηγών LASER. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5, στην περίπτωση μίας $N \times N$ οπτικής σύνδεσης με AWG, οι φάσεις ϕ_m είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους επειδή τα σήματα που συνθέτουν το θόρυβο ενδοκαναλικής διαφωνίας παράγονται από διαφορετικές πηγές LASER. Αλλά ακόμα και αν τα σήματα προέρχονται από την ίδια οπτική πηγή, η ανεξαρτησία των φάσεων ϕ_m μπορεί να διατηρηθεί, αρκεί το σήμα και ο θόρυβος ενδοκαναλικής διαφωνίας να συμβάλλουν αφού έχουν διαδοθεί σε μία απόσταση μεγαλύτερη από το μήκος συμφωνίας (coherence length) των LASER. Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί πως στην (8.1) έχουμε υποθέσει πως τα διάφορα σήματα έχουν την ίδια πόλωση και πως όλα τα bit έχουν τιμή 1, κάτι που όπως είδαμε στο κεφάλαιο 6, αποτελεί τη χειρότερη περίπτωση.

Ένα διάγραμμα τυπικού δέκτη ASK εικονίζεται στο σχήμα 8-2. Το φωτόρευμα το οποίο δημιουργείται από το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από την

$$i(t) = \frac{\eta}{2hf_0} |E(t)|^2 \quad (8.2)$$

όπου η είναι η κβαντική απόδοση της φωτοδιόδου, h η σταθερά του Planck και f_0 η κεντρική συχνότητα του σήματος. Η επίδραση του ηλεκτρικού θορύβου έχει αμεληθεί στην (8.2). Επίσης, για να απλοποιήσουμε τις πράξεις θεωρούμε πως το πεδίο έχει κανονικοποιηθεί έτσι ώστε $\eta/(hf) = 1$. Αντικαθιστώντας την (8.1) στην (8.2) λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση για το φωτόρευμα

$$i(t) = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} g_m(t) g_n(t) \exp(j(\phi_m - \phi_n)) \quad (8.3)$$

Θα θεωρήσουμε πως όλοι οι παλμοί έχουν το ίδιο σχήμα, δηλαδή πως $g_m(t) = c_m g(t)$ όπου c_m είναι είτε το πλάτος του σήματος (αν $m=0$) είτε των παρασιτικών σημάτων της ενδοκαναλικής διαφωνίας (αν $m > 0$). Ας σημειωθεί πως αν ο λόγος σβέσης του σήματος θεωρηθεί άπειρος, έπεται πως $c_0 = 0$ στην περίπτωση όπου το bit σήματος είναι $b_s = 0$. Αν θεωρήσουμε πως ο παλμός $g(t)$ έχει μοναδιαία ενέργεια, δηλαδή $\int_{-T}^T |g(t)|^2 dt = 1$, τότε το c_0^2 θα ισούται με τον αριθμό φωτονίων

του σήματος μέσα στην διάρκεια T του bit. Με τον ίδιο τρόπο, το c_m^2 για $m>1$ θα ισούται με τον αριθμό των φωτονίων της παρασιτικής συνιστώσας m της ενδοκαναλικής διαφωνίας. Η μεταβλητή απόφασης δίνεται από την

$$D(T) = \int_0^T i(t)h(T-t)dt \quad (8.4)$$

όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του ηλεκτρικού φίλτρου. Αν υποθέσουμε πως το φίλτρο είναι ένας απλός ολοκληρωτής, τότε θα έχουμε πως $h(t)=1$ για $t \in [0, T]$. Χρησιμοποιώντας την (8.4) και την (8.3) μπορούμε να συνάγουμε πως

$$D = D(T) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} c_m c_n \exp(j(\phi_m - \phi_n)) = c_0^2 + 2 \sum_{m \geq 1} c_m c_0 \cos(\phi_m - \phi_0) + \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} c_m c_n \exp(j(\phi_m - \phi_n)) \quad (8.5)$$

Η εξίσωση (8.5) συνδέει τη μεταβλητή απόφασης με τα πλάτη και τις φάσεις του σήματος και των παρασιτικών συνιστωσών. Ο όρος c_0^2 , στο τρίτο μέρος της (8.5), οφείλεται στο διακρότημα του σήματος με τον εαυτό του, το άθροισμα που ακολουθεί αποτελεί το διακρότημα σήματος-διαφωνίας, ενώ το επόμενο διπλό άθροισμα οφείλεται στο θόρυβο από το διακρότημα διαφωνίας-διαφωνίας. Αν, όπως και στο κεφάλαιο 6, αγνοήσουμε το τελευταίο διπλό άθροισμα, τότε η MGF $M(s)$ του D δίνεται από την

$$M(s) = E\{e^{sD}\} \cong M_n(s) = \exp(c_0^2 s) \prod_{m \geq 1} I_0(2c_m c_0 s) \quad (8.6)$$

όπου $M_n(s)$ είναι η MGF της μεταβλητής απόφασης αν αγνοήσουμε το θόρυβο διαφωνίας-διαφωνίας. Ωστόσο, αν δεν αγνοήσουμε το θόρυβο διαφωνίας-διαφωνίας τότε η $M(s)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή και μπορεί να την υπολογίσουμε από την

$$M(s) = \frac{1}{(2\pi)^M} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_M \exp(s \sum_{m,n=0}^M c_m c_n e^{j(\phi_m - \phi_n)}) \quad (8.7)$$

Παρατηρούμε πως παρά το γεγονός πως η D εξαρτάται από $M+1$ τυχαίες μεταβλητές (ϕ_0, \dots, ϕ_M) στο ολοκλήρωμα της (8.7) μπορούμε να θέσουμε $\phi_0=0$ και η ολοκλήρωση να πραγματοποιηθεί σε M αντί σε $M+1$ διαστάσεις [JR01]. Ωστόσο, για τιμές του M μεγαλύτερες από 10, η αριθμητική ολοκλήρωση της (8.7) καθίσταται προβληματική λόγω των απαιτήσεων σε υπολογιστικό χρόνο ο οποίος αυξάνεται εκθετικά με το M . Φυσικά, κάποιος μπορεί να μειώσει τον αριθμό των σημείων που λαμβάνονται για την ολοκλήρωση, μειώνοντας έτσι τον υπολογιστικό χρόνο αλλά και την ακρίβεια του υπολογισμού της $M(s)$. Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε μία έκφραση της MGF μέσω ενός διπλού ολοκληρώματος το οποίο μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά ακόμα και για μεγάλες τιμές του M . Θα δούμε επίσης πως για $s < 0$, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μπορεί να επιταχυνθεί σημαντικά με την προσέγγιση saddle-point, η οποία δίδει πολύ ακριβή αποτελέσματα.

8.3 ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ MGF ΜΕΣΩ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Για να εκφράσουμε την MGF μέσω ενός διπλού ολοκληρώματος, ορίζουμε δύο νέες μεταβλητές R και V ως εξής:

$$R = \sum_{m \geq 0} c_m \cos \phi_m \quad (8.8a)$$

$$V = \sum_{m \geq 0} c_m \sin \phi_m \quad (8.8b)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (8.5) είναι εύκολο να δείξουμε πως

$$D = R^2 + V^2 \quad (8.9)$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως η συνδυασμένη MGF $M_{RV}(js_r, js_v)$ των R και V εξαρτάται μόνο από το $x=(s_r^2+s_v^2)^{1/2}$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα η συνδυασμένη PDF $f_{RV}(r, v)$ των R και V θα δίνεται από το μετασχηματισμό Hankel της MGF του D . Χρησιμοποιώντας τη μορφή αυτή της f_{RV} , η MGF του D δύναται να εκφραστεί μέσω ενός διπλού ολοκληρώματος μίας συνάρτησης που είναι γνωστή σε κλειστή μορφή.

8.3.1 ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΗ MGF ΤΩΝ R ΚΑΙ V

Η συνδυασμένη MGF $M_{RV}(js_r, js_v)$ των R και V δίνεται από τη σχέση

$$M_{RV}(js_r, js_v) = E\{\exp(js_r R + js_v V)\} = E\left\{\exp\left(\sum_m jc_m (s_r \cos \phi_m + s_v \sin \phi_m)\right)\right\} \quad (8.10)$$

Αντικαθιστώντας $x=(s_r^2+s_v^2)^{1/2}$ και $\theta=\tan^{-1}(s_r/s_v)$ στην παραπάνω εξίσωση θα έχουμε

$$M_{RV}(js_r, js_v) = E\left\{\exp\left(jx \sum_m c_m \cos(\phi_m - \theta)\right)\right\} \quad (8.11)$$

Εφόσον οι φάσεις ϕ_m είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στο $[-\pi, \pi]$, έπεται πως η MGF του $\cos(\phi_m - \theta)$ θα ισούται με $E\{\exp(jb \cos(\phi_m - \theta))\} = E\{\exp(jb \cos \phi_m)\} = J_0(b)$. Επομένως, επειδή τα ϕ_m είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, θα έχουμε

$$M_{RV}(js_r, js_v) = M_c(x) = \prod_{m \geq 0} J_0(c_m x) \quad (8.12)$$

Στην (8.12) έχουμε υποθέσει πως όλα τα bit των καναλιών διαφωνίας είναι 1 κάτι που αποτελεί και τη χειρότερη περίπτωση. Εάν τα bit διαφωνίας θεωρηθούν πως παίρνουν τις τιμές 0 και 1 ισοπίθανα, τότε η M_{RV} θα παράγεται από το γινόμενο των συναρτήσεων $(1+J_0(c_m x))/2$ αντί των $J_0(c_m x)$. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια θα μπορούν να εφαρμοσθούν και σε αυτή την περίπτωση λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερόμενη M_{RV} .

Η εξίσωση (8.12) φανερώνει πως η συνδυασμένη MGF $M_{RV}(js_r, js_v)$ των R και V διαθέτει κυκλική συμμετρία, δηλαδή πως εξαρτάται μονάχα από το $x=(s_r^2+s_v^2)^{1/2}$.

8.3.2 ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ R ΚΑΙ V

Η συνδυασμένη πιθανότητα των R και V δίνεται από τον αντίστροφο δισδιάστατο μετασχηματισμό Fourier της MGF $M_{RV}(js_r, js_v)$, δηλαδή

$$f_{RV}(r, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} M_{RV}(js_r, js_v) e^{-j(s_r r + s_v v)} ds_r ds_v \quad (8.13)$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές ολοκλήρωσης σε x και θ έχουμε

$$f_{RV}(r, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} x M_c(x) \int_0^{2\pi} e^{-jx\rho \cos(\theta-\psi)} d\theta dS \quad (8.14)$$

όπου $\rho=(r^2+v^2)^{1/2}$ και $\psi=\tan^{-1}(r/v)$. Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή της συνάρτησης Bessel,

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-jx\rho \cos(\theta-\psi)} = 2\pi J_0(x\rho) \quad (8.15)$$

το διπλό ολοκλήρωμα της (8.14) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f_{RV}(r, v) = f_{RV}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} M_c(x) J_0(x\rho) x dx \quad (8.16)$$

Η (8.16) φανερώνει πως η συνδυασμένη πιθανότητα των R και V παρουσιάζει μία κυκλική συμμετρία, δηλαδή εξαρτάται μόνο από το $\rho=(r^2+v^2)^{1/2}$ και πως η $f_{RV}(\rho)$ συνδέεται με την $M_c(x)$ βάσει ενός ζεύγους μετασχηματισμών Hankel.

8.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MGF ΤΟΥ R ΚΑΙ ΤΟΥ V

Η MGF του D (χωρίς τη συνεισφορά του ηλεκτρικού θορύβου) δίνεται από την σχέση:

$$M(s) = E\{e^{s(R^2+V^2)}\} = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{s(r^2+v^2)} f_{RV}(r, v) dr dv \quad (8.17)$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές προς ολοκλήρωση από (r, v) σε (ρ, ψ) όπως τις ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η (8.17) δίνει

$$M(s) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{s\rho^2} f_{RV}(\rho) d\rho \quad (8.18)$$

Αντικαθιστώντας την (8.16) στην (8.18), λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση για την $M(s)$

$$M(s) = \int_0^{+\infty} \rho e^{s\rho^2} \int_0^{+\infty} x M_c(x) J_0(x\rho) d\rho dx \quad (8.19)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η $f_{RV}(r, v)=f_{RV}(x)$ είναι άμεσα συνδεδεμένη με την πυκνότητα πιθανότητας $f_D(d)$ της $D=R^2+V^2$. Πράγματι χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $D=R^2+V^2$, $W=\tan^{-1}(R/V)$ όπου $W \in [0, 2\pi]$, αλλά και το θεώρημα μετασχηματισμού των τυχαίων μεταβλητών [Sam79, §3], είναι εύκολο να δείξουμε πως

$$f_D(d) = f_{RV}(\sqrt{d})/2 \quad (8.20)$$

Η μεταβλητή απόφασης D δίνεται από την (8.5) και είναι εύκολο να δούμε ότι δεν μπορεί να ξεπεράσει το L^2 δηλαδή $0 \leq D \leq L^2$ όπου το L δίνεται από την

$$L = \sum_{m=0}^M c_m = c_0 + \sum_{m=1}^M c_m \quad (8.21)$$

Επειδή το D θα είναι πάντα μικρότερο ή ίσο του L^2 , η πιθανότητα το D να πάρει τιμή μεγαλύτερη του L^2 είναι 0 οπότε $f_D(d)=0$ όταν $d > L^2$. Χρησιμοποιώντας την (8.20) διαπιστώνουμε πως $f_{RV}(x)=0$ για $x > L$. Επομένως, το ολοκλήρωμα της (8.19) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$M(s) = \int_0^{+\infty} dx M_c(x) x \int_0^L d\rho J_0(x\rho) \rho e^{s\rho^2} \quad (8.22)$$

Η (8.22) παρέχει μία έκφραση της $M(s)$ βάση ενός διπλού ολοκληρώματος και θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της όταν $s > 0$.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως το γεγονός ότι $f_{RV}(x)=0$ για $x > L$ συνάγεται και απευθείας από την έκφραση για το $f_{RV}(x)$ που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε την (8.12) στην (8.16),

$$f_{RV}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(c_0 x) \cdot \dots \cdot J_0(c_M x) J_0(x\rho) x dx \quad (8.23)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γνωστό πως ισούται με 0 [GR80, §6.573], όταν $x > c_0 + c_1 + \dots + c_M = L$ και επομένως $f_{RV}(x)=0$ για $x > L$.

Όταν $s < 0$, η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάξει και η (8.19) μπορεί να γραφεί,

$$M(s) = \int_0^{+\infty} dx M_c(x) x \int_0^{+\infty} d\rho J_0(x\rho) \rho e^{s\rho^2} \quad (8.24)$$

Τόσο η (8.24) όσο και η (8.22) καθιστούν δυνατό τον υπολογισμό της $M(s)$ βάση ενός διπλού ολοκληρώματος μίας συνάρτησης την οποία γνωρίζουμε σε κλειστή μορφή. Αξίζει να σημειωθεί πως η (8.24) μπορεί να απλοποιηθεί σε απλό ολοκλήρωμα αφού το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι γνωστό σε κλειστή μορφή όταν $s < 0$,

$$\int_0^{+\infty} d\rho J_0(x\rho) \rho e^{s\rho^2} = -\frac{1}{2s} e^{x^2/(4s)} \quad (8.25)$$

όποτε η (8.24) γράφεται

$$M(s) = -\frac{1}{2s} \int_0^{+\infty} x J_0(c_M x) \cdot \dots \cdot J_0(c_0 x) e^{x^2/(4s)} dx \quad (8.26)$$

Επομένως για $s < 0$, η $M(s)$ μπορεί να υπολογιστεί από το απλό ολοκλήρωμα της (8.26).

8.3.4 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ MGF ΟΤΑΝ $M \rightarrow \infty$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως οι σχέσεις (8.26) και (8.22) μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$ όταν $M \rightarrow \infty$. Πράγματι για $s < 0$, η (8.26) γράφεται

$$M(s) = -\frac{1}{2s} \int_0^{+\infty} x M_R(jx) e^{x^2/(4s)} dx \quad (8.27)$$

όπου $M_R(jx) = J_0(c_1x) \cdot \dots \cdot J_0(c_1x)$ είναι η MGF του R . Για $M \rightarrow \infty$, η MGF είναι Gaussian, οπότε $M_R(jx) \rightarrow \exp(-\sigma^2 x^2/4) J_0(c_0x)$ όπου $\sigma^2/2$ είναι η διακύμανση της $R - c_0 \cos \phi$. Επομένως στην περίπτωση αυτή το $M(s)$ θα δίνεται από την

$$M(s) = -\frac{1}{2s} \int_0^{+\infty} x J_0(c_0x) e^{-\sigma^2 x^2/4 + x^2/(4s)} dx \quad (8.28)$$

Το ολοκλήρωμα (8.28) υπολογίζεται βάση της σχέσεως [GR80, §6.631.4]

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{n+1} \exp(-a^2 x^2) J_0(bx) dx = \frac{b^n}{(2a)^{n+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \quad (8.29)$$

όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και η (8.28) γράφεται

$$M(s) = \frac{1}{1 - \sigma^2 s} \exp\left(\frac{c_0^2 s}{1 - \sigma^2 s}\right) \quad (8.30a)$$

με

$$\sigma^2 = \sum_{m=1}^M c_m^2 \quad (8.30b)$$

που αποτελεί την ασυμπτωτική μορφή της MGF (για $s < 0$)

Για $s > 0$, η κατάσταση είναι κάπως πιο περίπλοκη καθώς η $M(s)$ δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα (8.22). Για την εξαγωγή της ασυμπτωτικής μορφής για $s > 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x, s, L)$ ως εξής

$$F(x, s, L) = \int_0^L d\rho J_0(x\rho) \rho e^{s\rho^2} \quad (8.31)$$

Χρησιμοποιώντας την τεχνική της παραγοντικής ολοκλήρωσης είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$F(x, s, L) = \int_0^L d\rho J_0(x\rho) \rho e^{s\rho^2} = \frac{1}{2s} \left(e^{sL^2} J_0(xL) - 1 \right) + \frac{x}{2s} \int_0^L e^{s\rho^2} J_1(x\rho) d\rho \quad (8.32)$$

Συνεχίζοντας την παραγοντική ολοκλήρωση γράφουμε την $F(x, s, L)$ ως δυναμοσειρά του $x/2s/L$ ως εξής:

$$F(x, s, L) = \frac{1}{2s} e^{sL^2} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(xL) \left(\frac{x}{2sL} \right)^n - \frac{1}{2s} \exp\left(\frac{x^2}{4s}\right) \quad (8.33)$$

Αντικαθιστώντας την (8.33) στην (8.22) λαμβάνουμε

$$M(s) = \int_0^{+\infty} dx M_c(x) F(x, s, L) x = -\frac{1}{2s} \int_0^{+\infty} dx M_c(x) x J_0(c_0 x) \exp\left(\frac{x^2}{4s}\right) dx + \frac{1}{2s} e^{sL^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2sL}\right)^{n+\infty} \int_0^{+\infty} x^{n+1} J_n(xL) M_c(x) dx \quad (8.34)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός πως $M_c(x) \cong \exp(-\sigma^2 x^2/4)$ όταν $M \rightarrow \infty$, καθώς και τη σχέση (8.29), η (8.34) θα γραφεί

$$M(s) = -\frac{1}{2s} \int_0^{+\infty} dx \exp\left(x^2 \left(\frac{1}{4s} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\right) J_0(c_0 x) dx + e^{(s-1/2/\sigma^2)L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2s\sigma^2}\right)^{n+1} \quad (8.35)$$

Για $M \rightarrow \infty$ έχουμε και $L \rightarrow \infty$ όποτε για $s < 1/\sigma^2$, η σειρά που εμφανίζεται στο δεύτερο μέρος της (8.35) θα μηδενίζεται. Επίσης το ολοκλήρωμα της (8.35) μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή από την (8.29). Πραγματοποιώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$M(s) = \frac{1}{1-\sigma^2 s} \exp\left(\frac{c_0^2 s}{1-\sigma^2 s}\right) \quad (8.36)$$

Παρατηρούμε πως η (8.36) είναι η ίδια ακριβώς με την (8.30) και επομένως η ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$ είναι η ίδια τόσο για $s > 0$ όσο και για $s < 0$. Αξίζει να σημειωθεί πως το c_0 είναι το πλάτος του σήματος το οποίο διαφέρει για τα bit $b_s = 0$ και $b_s = 1$.

Οι (8.36) και (8.29) μπορούν να συναχθούν και απευθείας, χωρίς τη χρήση της ολοκληρωτικής μορφής της $M(s)$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές R_1 και V_1 ως εξής:

$$R_1 = \sum_{m \geq 1} c_m \cos \phi_m \quad (8.37)$$

$$V_1 = \sum_{m \geq 1} c_m \sin \phi_m \quad (8.38)$$

Η μέση τιμή των R_1 και V_1 είναι 0 ενώ η διακύμανση τους είναι

$$E\{R_1^2\} = E\{V_1^2\} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M c_m^2 = \frac{\sigma^2}{2} \quad (8.39)$$

Η συσχέτιση $\rho = E\{R_1 V_1\}$ των R_1 και V_1 δίνεται από την

$$\rho = E\{R_1 V_1\} = \sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq 1} c_m c_k E\{\cos \phi_m \sin \phi_k\} = 0 \quad (8.40)$$

Σύμφωνα με τις (8.37)-(8.38) η τυχαία μεταβλητή R_1 δίνεται από ένα άθροισμα M ανεξάρτητων μεταβλητών και επομένως όταν $M \rightarrow \infty$ η πυκνότητα πιθανότητας θα τείνει σε μία Gaussian. Το ίδιο ισχύει και για την τυχαία μεταβλητή του V_1 . Η συσχέτιση μεταξύ δύο Gaussian τυχαίων μεταβλητών με μηδενική μέση τιμή, καθορίζεται πλήρως από τη συσχέτισή τους ρ και αν $\rho = 0$, τότε είναι ανεξάρτητες (και υπό την στενή έννοια). Επίσης η μεταβλητή απόφασης D δίδεται από το άθροισμα των τετραγώνων των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $c_0 + R_1$ και V_1 που έχουν την ίδια διακύμανση, βάση της σχέσεως:

$$D = (c_0 + R_1)^2 + V_1^2 \quad (8.41)$$

Η κατανομή του αθροίσματος των τετραγώνων δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την ίδια διακύμανση ονομάζεται χι-τετράγωνη, της οποίας η πυκνότητα πιθανότητας $f_D(d)$ αλλά και η MGF $M(s)$ είναι γνωστές σε κλειστή μορφή και δίνονται από τις

$$f_D(d) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{d + c_0^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{2c_0\sqrt{d}}{\sigma^2}\right) \quad (8.42)$$

$$M(s) = \frac{1}{1 - \sigma^2 s} \exp\left(\frac{c_0^2 s}{1 - \sigma^2 s}\right) \quad (8.43)$$

όπου σ^2 δίνεται από την

$$\sigma^2 = E\{R_1^2\} + E\{V_1^2\} = \sum_{m=1}^M c_m^2 \quad (8.44)$$

Η (8.43) ταυτίζεται με την ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$ (8.36) και (8.30) που δίνουν οι ολοκληρωτικές μορφές της MGF. Αυτό αποτελεί και ένδειξη πως οι ολοκληρωτικές μορφές στις οποίες καταλήξαμε είναι όντως σωστές.

8.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MGF ΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟ ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο εκφράσαμε την MGF της μεταβλητής απόφασης μέσω ενός διπλού ολοκληρώματος για $s > 0$ και μέσω ενός απλού ολοκληρώματος για $s < 0$. Ωστόσο τίθεται το ερώτημα κατά πόσο τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογιστούν με μεγάλη ακρίβεια. Στην περίπτωση $s < 0$ θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο saddle point για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ενώ στην περίπτωση $s > 0$, θα αλλάξουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης έτσι ώστε η συνάρτηση προς ολοκλήρωση να γίνει πιο ομαλή.

8.4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, ολοκληρώματα της μορφής της (8.26) εμφανίζονται κατά την ηλεκτρομαγνητική ανάλυση ενός μέσου του οποίου ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται τμηματικά μόνο ως προς μία διεύθυνση. Για να διευκολύνουμε τη μελέτη του ολοκληρώματος μπορούμε να αλλάξουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης από $[0, +\infty]$ σε $[-\infty, +\infty]$, αν αντικαταστήσουμε μία εκ των συναρτήσεων Bessel J_0 με τη συνάρτηση Hankel $H_0^{(1)}$ και διαιρέσουμε δια του 2. Επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $J_0(c_0 x)$ με την $H_0^{(1)}(c_0 x)$, οπότε η (8.26) γράφεται

$$M(s) = -\frac{1}{4s} \int_{-\infty}^{+\infty} x J_0(c_M x) \cdots H_0^{(1)}(c_0 x) e^{x^2/(4s)} dx \quad (8.45)$$

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 3, τα ολοκληρώματα της μορφής (8.45) ονομάζονται ολοκληρώματα Sommerfeld. Στην περίπτωση του bit $b_s=1$, το πλάτος c_0 είναι πολύ μεγαλύτερο από τα πλάτη c_m (όπου $m > 0$) και επομένως η συνάρτηση προς ολοκλήρωση ολισθαίνει βίαια στον πραγματικό άξονα οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο saddle point για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της συνάρτησης Hankel για μεγάλα ορίσματα

$$H_0^{(1)}(c_0 x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi c_0 x}} e^{j(c_0 x - \pi/4)} \quad (8.46)$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση $F(y)$ ως εξής

$$F(y) = \prod_{m=1}^M I_0(c_m y) \exp\left(-\frac{y^2}{4s} - c_0 y\right) \quad (8.47)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (8.47) και (8.46), η $M(s)$ γράφεται κατά προσέγγιση

$$M(s) \cong \frac{-j\sqrt{2}}{4s\sqrt{\pi c_0}} \int_{-j\infty}^{+j\infty} dy \sqrt{y} e^{f(y)} \quad (8.48)$$

όπου $f(y) = \ln(F(y))$. Το saddle point y_s της $f(y)$ μπορεί να προσδιοριστεί λύνοντας την εξίσωση $f'(y_s) = 0$, όπου η παράγωγος της f μπορεί να προσδιοριστεί παραγωγίζοντας την (8.47) ως προς y είτε αριθμητικά είτε σε κλειστή μορφή. Έχοντας προσδιορίσει το y_s , το ολοκλήρωμα της (8.48) προσεγγίζεται από την

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \sqrt{y} e^{f(y)} dy \cong \sqrt{\frac{-2\pi y_s}{f''(y_s)}} e^{f(y_s)} \quad (8.49)$$

και η συνάρτηση $M(s)$ δίνεται από την

$$M(s) \cong \frac{1}{2|s|} \sqrt{\frac{x_s}{c_0 f''(y_s)}} e^{f(y_s)} \quad (8.50)$$

Η (8.50) θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της MGF της μεταβλητής απόφασης στην περίπτωση όπου $s < 0$.

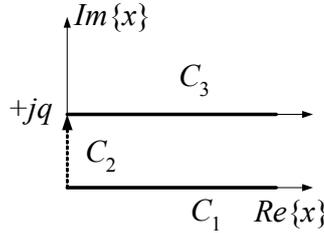
8.4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ

Στην περίπτωση όπου $s > 0$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της (8.22). Ορίζουμε τη συνάρτηση $G(z, s, L)$ ως εξής:

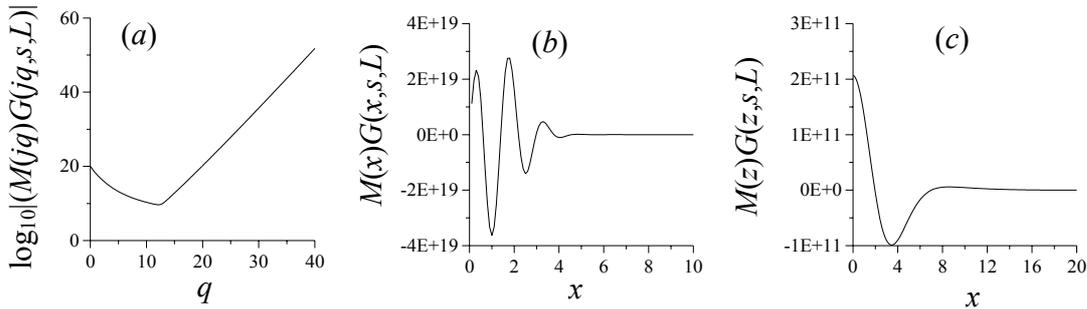
$$G(z, s, L) = \int_0^L d\rho H_0^{(1)}(z\rho) \rho e^{s\rho^2} \quad (8.51)$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, όπως κάναμε και για τη συνάρτηση $F(x, s, L)$ στην παράγραφο (8.3.4), μπορούμε να αποδείξουμε πως

$$G(z, s, L) = \left[\frac{\rho}{z} e^{s\rho^2} H_1^{(1)}(z\rho) \right]_0^L - \frac{2s}{z} \int_0^L d\rho \rho^2 H_1^{(1)}(z\rho) e^{s\rho^2} \quad (8.52)$$



Σχήμα 8-3: Μεταφορά από το μονοπάτι ολοκλήρωσης από το C_1 (θετικός πραγματικός ημιάξονας) στα μονοπάτια C_2 και C_3



Σχήμα 8-4: (a) η συνάρτηση $|M(jq)G(jq,s,L)|$ (b) η συνάρτηση $M(x)G(x,s,L)$ και (c) η συνάρτηση $M(z)G(z,s,L)$ όπου $z=j10+x$. Οι συναρτήσεις έχουν αναπαρασταθεί για $c_0=0, c_1=\dots=c_{16}=0.25$ και $s=3$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του de L'Hopital είναι δυνατό να δείξουμε ότι $H_1^1(z\rho)/\rho \rightarrow -j/z$ όταν $z \rightarrow 0$. Επίσης χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση μία ακόμα φορά, μπορούμε να δείξουμε πως το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στην (8.52) είναι $O(|z|^{-5/2})$. Επομένως η ασυμπτωτική μορφή της $G(z,s,L)$ για μεγάλα z είναι

$$G(z,s,L) \cong \frac{L}{z} H_1^{(1)}(zL) e^{sL^2} + j \frac{2}{z^2} \quad (8.53)$$

Χρησιμοποιώντας την (8.51) μπορούμε να εκφράσουμε την MGF ως εξής:

$$M(s) = \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} dx M_c(x) x G(x,s,L) \right\} \quad (8.54)$$

αφού $\text{Re}\{H_0^{(1)}(t)\} = J_0(t)$ για $t \in \mathfrak{R}$. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την (8.54) και όχι άμεσα την (8.22) είναι ότι το πλάτος των διακυμάνσεων της συνάρτησης προς ολοκλήρωση της (8.54) μπορεί να μειωθεί εάν αλλάξουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης ώστε να βρίσκεται πάνω από τον πραγματικό άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7-3.

Το ολοκλήρωμα επομένως γράφεται

$$M(s) = \text{Re} \left\{ \int_{C_2+C_3}^{+\infty} dx M_c(x) x G(x,s,L) \right\} \quad (8.55)$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 7-2, το νέο μονοπάτι ολοκλήρωσης είναι η ένωση των μονοπατιών C_2 , που βρίσκεται στο φανταστικό άξονα μεταξύ του σημείου $0+j0$ και του σημείου $0+jq$ και του C_3 το οποίο είναι παράλληλο με τον πραγματικό άξονα και ξεκινάει από το σημείο $0+jq$. Θα δείξουμε στη συνέχεια πως η συνεισφορά του C_2 στο πραγματικό μέρος της (8.55) είναι

μηδενική. Πράγματι η συνάρτηση $jtH_0^{(1)}(jt\rho)=2tK_0(t\rho)/\pi$ είναι πραγματική για $t \in \mathfrak{R}$ και επομένως η $G(z,s,\rho)$ που δίνεται από την (8.51) θα είναι πραγματική κατά μήκος του C_2 . Άρα το ολοκλήρωμα κατά μήκος του C_2 είναι καθαρά φανταστικό οπότε η συνεισφορά του στο πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος της (8.55) είναι μηδέν και η $M(s)$ μπορεί να γραφεί

$$M(s) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{C_3}^{+\infty} dx M_c(x) x G(x, s, L) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} dx M_c(x + jq)(x + jq) G(x + jq, s, L) \right\} \quad (8.56)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι για ποιες τιμές του q η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι αρκετά ομαλή ώστε να μπορεί να ολοκληρωθεί με ακρίβεια. Μία αρκετά καλή επιλογή του q είναι το σημείο $q=q_0$ για το οποίο το $|M_c(jq)G(jq,s,L)|$ είναι ελάχιστο οπότε οι διακυμάνσεις της συνάρτησης προς ολοκλήρωση αρχίζουν με το ελάχιστο δυνατό πλάτος και η αριθμητική ολοκλήρωση της (8.56) μπορεί να πραγματοποιηθεί πιο εύκολα. Οι παραπάνω παρατηρήσεις παρουσιάζονται πιο καθαρά στο σχήμα 8-4. Στο σχήμα 8-4(a) έχουμε αναπαραστήσει γραφικά το $\log_{10}|M_c(jq)G(jq,s,L)|$ για $s=3$, $c_0=0$, $c_1=\dots=c_{16}=0.25$, και φαίνεται πως η τιμή του $q=q_0$ που ελαχιστοποιεί το $|M_c(jq)G(jq,s,L)|$ είναι το $q_0 \approx 10$. Στο σχήμα 8-4(b) και 8-5(c), έχουμε απεικονίσει το πραγματικό μέρος των συναρτήσεων $F_1(x)=xM_c(x)G(x,s,L)$ και $F_2(x)=zM_c(z)G(z,s,L)$ (όπου $z=j10+x$). Είναι προφανές πως το πλάτος των διακυμάνσεων της $F_2(x)$ είναι πολύ μικρότερο από εκείνο της $F_1(x)$. Επομένως, αφού το ολοκλήρωμα της $M(s)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε από το ολοκλήρωμα της $F_1(x)$ είτε της $F_2(x)$, επιλέγουμε να την υπολογίσουμε από το ολοκλήρωμα της $F_2(x)$ που είναι πιο ομαλή.

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της $M(s)$ για θετικά ορίσματα και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τις συνήθεις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης (π.χ. τραπεζίου, Newton-Ralphson κτλ). Η ακρίβεια της είναι ικανοποιητική για αριθμό καναλιών διαφωνίας $M < 100$. Για $M > 100$ μπορούμε όπως θα δείξουμε και παρακάτω, να χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$ όταν $M \rightarrow +\infty$ που δίνεται από την (8.36).

8.4.3 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ $M(S)$ ΓΙΑ $S \rightarrow \infty$

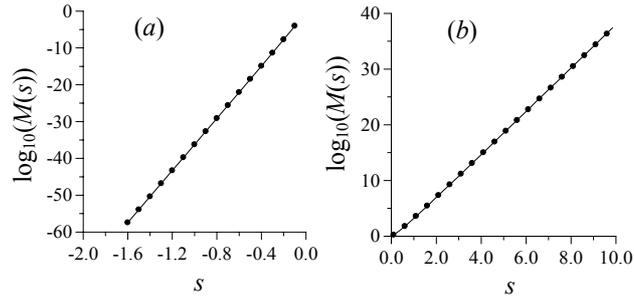
Προτού εξετάσουμε την ακρίβεια της μεθόδου αυτής, είναι χρήσιμο να καταλήξουμε σε μία ασυμπτωτική μορφή για την MGF όταν $s \rightarrow \infty$ ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης της (8.56) με την ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα της (8.7) και τη μέθοδο ασυμπτωτικής ανάπτυξης πολλαπλών ολοκληρωμάτων που παρουσιάζεται στην [BH86]. Ας ορίσουμε τη συνάρτηση Q από την εξίσωση

$$Q(\phi_1, \dots, \phi_M) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M c_m c_n \cos(\phi_m - \phi_n) \quad (8.57)$$

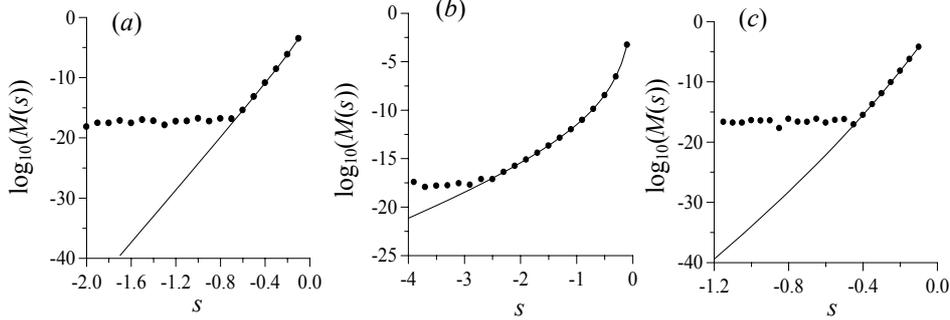
με $\phi_0=0$. Τότε η (8.7) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$M(s) = \frac{1}{(2\pi)^M} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_M \exp(sQ(\phi_1, \dots, \phi_M)) \quad (8.58)$$

Για να βρούμε την ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$ για μεγάλα s θα πρέπει να υπολογίσουμε τα κρίσιμα σημεία της Q , δηλαδή τα σημεία για τα οποία $\nabla Q=0$. Το πιο σημαντικό κρίσιμο σημείο είναι το σημείο $\phi_1=\dots=\phi_M=0$ για το οποίο η Q παίρνει τη μέγιστη τιμή της $Q(0, \dots, 0)=L^2$. Αν αγνοήσουμε τη συνεισφορά των υπόλοιπων κρίσιμων σημείων τότε η ασυμπτωτική μορφή της $M(s)$ θα δίνεται από την



Σχήμα 8-5: Αριθμητικά υπολογισμένη (με συνεχείς γραμμές) και ακριβής (με κουκίδες) MGF για a) $s > 0, c_0=10, c_1=1$ και b) $s < 0, c_1=1$ and $c_2=1$.



Σχήμα 8-6: Οι MGFs που υπολογίζονται από τη μέθοδο saddle point (συνεχής γραμμές) και βάση αριθμητικής ολοκλήρωσης (με κουκίδες) για $c_0=10$, και a) $c_0=c_2=c_3=1$, b) $c_1=\dots=c_{16}=0.5$, c) $c_1=\dots=c_{64}=0.1$

$$M(s) \cong \frac{1}{(2\pi s)^{M/2}} \exp(sL^2) \frac{1}{|J|^{1/2}} \quad (8.59)$$

όπου $|J|$ η ορίζουσα του πίνακα $J=[J_{kl}]$ του οποίου τα στοιχεία δίνονται από την $J_{kl}=\partial^2 Q/\partial \phi_k \partial \phi_l$ στο σημείο $\phi_1=\dots=\phi_M=0$. Ας σημειωθεί πως η (8.59) περιέχει μονάχα τη συνεισφορά του σημαντικότερου κρίσιμου σημείου και αγνοεί τα υπόλοιπα (όπως για παράδειγμα τα σημεία για τα οποία υπάρχει ένα k με $0 \leq k \leq M$ τέτοιο ώστε $\phi_k=\pi$ αν $\phi_p=0$ για $p \neq k$, κτλ). Ωστόσο αυξανόμενου του M το πλήθος των κρίσιμων σημείων που παραλείπονται αυξάνει εκθετικά και επομένως η σύγκλιση της $M(s)$ στην ασυμπτωτική της μορφή είναι πιο αργή.

8.5 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΜΕΝΗΣ MGF

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την ακρίβεια της MGF που υπολογίζεται με τη βοήθεια της μεθόδου που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 7.4. Μία πρώτη δοκιμή είναι να εξετάσουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου στην περίπτωση όπου υπάρχουν δύο μονάχα μη μηδενικά πλάτη c_a και c_b , οπότε η μεταβλητή απόφασης γράφεται ως $D=c_a^2+c_b^2+2c_a c_b \cos(\phi_a-\phi_b)$. Επειδή η αναμενόμενη τιμή του $\exp(2sc_a c_b \cos(\phi_a-\phi_b))$ είναι $I_0(2sc_a c_b)$ είναι εύκολο να δείξουμε πως στην περίπτωση αυτή, η MGF δίνεται από την

$$M_D(s) = e^{s(c_a^2+c_b^2)} I_0(2c_a c_b s) \quad (8.60)$$

Στο σχήμα 8-5(a) έχουμε αναπαραστήσει γραφικά την τιμή της MGF της μεταβλητής απόφασης για $s < 0$ που λαμβάνουμε από την (8.60) και από τη μέθοδο saddle point, για $c_0=c_a=10$ και $c_1=c_b=1$. Στο σχήμα 8-5(b) έχουμε αναπαραστήσει την MGF για $s > 0$ την οποία λαμβάνουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης με αλλαγή μονοπατιού που περιγράψαμε

προηγούμενων, μαζί με την MGF (8.60) για $c_1=c_a=2$, $c_2=c_b=1$. Παρατηρούμε πως η ακρίβεια είναι εξαιρετική και στις δύο περιπτώσεις.

Για $s < 0$ και στην περίπτωση όπου ο αριθμός των μη μηδενικών πλατών είναι μεγαλύτερος από 2, μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου saddle point με την αριθμητική ολοκλήρωση της (8.26). Η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης που επιλέγουμε είναι μία παραλλαγή της μεθόδου Gaussian Quadrature [Hil73, §8.4]. Καταρχήν το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[0, +\infty)$ προσεγγίζεται από το ολοκλήρωμα σε ένα πεπερασμένο διάστημα $[0, x_{max}]$, όπου το x_{max} έχει επιλεγεί ώστε το εκθετικό $\exp(x_{max}^2/4/s)$ στην (29) έχει τιμή μικρότερη από 10^{-40} . Τούτο διασφαλίζει πως το $[x_{max}, +\infty)$ είναι αμελητέο και πως το ολοκλήρωμα στο $[0, +\infty)$ μπορεί όντως να προσεγγισθεί από το ολοκλήρωμα $[0, x_{max}]$. Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τα μηδενικά της συνάρτησης προς ολοκλήρωση πάνω στον πραγματικό άξονα στο διάστημα $[0, x_{max}]$. Τα μηδενικά που προσδιορίζονται $\{x_i\}$ ορίζουν διαστήματα $X_i = [x_i, x_{i+1}]$ στα οποία η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι ομαλή και στα οποία η μέθοδος της Gaussian Quadrature μπορεί να εφαρμοσθεί με μεγάλη ακρίβεια. Ας σημειωθεί πως η αριθμητική ολοκλήρωση είναι πιθανόν να αποτύχει αν το s λάβει μεγάλες τιμές, οπότε ο ρυθμός απόσβεση του $\exp(x^2/4/s)$ είναι αργός και το ολοκλήρωμα της (8.6) αλλάζει πολλές φορές πρόσημο μέσα στο $[0, x_{max}]$. Κατά τον υπολογισμό του BER με τη μέθοδο saddle point που παρουσιάζουμε στο παράρτημα, η MGF μπορεί να λάβει τιμές πολύ μικρές (ακόμα και μικρότερες από 10^{-20}). Επομένως ένα σφάλμα στην αριθμητική ολοκλήρωση της τάξεως του 10^{-16} θα προκαλέσει μία σημαντική απόκλιση μεταξύ των τιμών της πραγματικής και της αριθμητικά υπολογιζόμενης τιμής της $M(s)$ αν η πρώτη είναι αρκετά χαμηλή.

Τα παραπάνω φαίνονται πιο καθαρά στο σχήμα 8-6, όπου τα αποτελέσματα της μεθόδου saddle point και της Gaussian Quadrature συγκρίνονται για $c_0=10$ και $c_1=c_2=c_3=1$, στο σχήμα 8-6(a), $c_1=\dots=c_{16}=0.5$ στο σχήμα 8-6(b) και για $c_1=\dots=c_{64}=0.1$ στο σχήμα 8-6(c). Όπως φαίνεται και από το σχήμα 8-6, για τιμές της MGF άνω του 10^{-14} τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την αριθμητική ολοκλήρωση και τη μέθοδο saddle point συμφωνούν πολύ καλά. Για χαμηλότερες τιμές, η MGF που λαμβάνουμε με αριθμητική ολοκλήρωση της (8.26) συμπεριφέρεται αρκετά περίεργα και υπάρχει σημαντική απόκλιση για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω. Επομένως είναι προτιμητέο να χρησιμοποιείται η μέθοδος saddle point για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της MGF για $s < 0$.

8.6 ΣΥΝΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ASE ΚΑΙ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ

Στην παράγραφο αυτή θα συμπεριλάβουμε το θόρυβο ASE και τον ηλεκτρικό θόρυβο στον υπολογισμό της MGF της μεταβλητής απόφασης. Για λόγους απλοποίησης θα θεωρήσουμε πως το οπτικό φίλτρο μετά τον οπτικό ενισχυτή έχει ορθογώνια συνάρτηση μεταφοράς και πως η κβαντική απόδοση της φωτοδιόδου είναι 1. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, η MGF της μεταβλητής απόφασης D_a του συστήματος με οπτική προενίσχυση, δεδομένης της μεταβλητής απόφασης D θα δίνεται από την σχέση

$$M_{a|D}(s) = \left(\frac{1}{1 - N_0 s} \right)^L \exp\left(\frac{DGs}{1 - N_0 s} \right) \quad (8.61)$$

όπου $N_0 = n_{sp}(G-1)$ η φασματική πυκνότητα του θορύβου ASE, G και n_{sp} το κέρδος και ο παράγοντας αυθόρμητης εκπομπής του οπτικού ενισχυτή αντίστοιχα, ενώ $L+1$ είναι το γινόμενο BT του εύρους B του οπτικού φίλτρου με την διάρκεια του bit T (θεωρούμε πως το L είναι

ακέραιος). Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή του $M_{a|D}(s)$ ως προς το D , είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την MGF $M_a(s)$ της D_a ανεξάρτητα από τη D :

$$M_a(s) = E\{M_{a|D}(s)\} = \left(\frac{1}{1-N_0s}\right)^L M\left(\frac{Gs}{1-N_0s}\right) \quad (8.62)$$

Είναι λοιπόν προφανές πως η MGF $M_a(s)$ ενός συστήματος με οπτική προενίσχυση μπορεί να υπολογιστεί από την MGF ενός συστήματος χωρίς οπτική προενίσχυση $M(s)$ βάσει μίας αλλαγής μεταβλητή $s \rightarrow Gs/(1-N_0s)$ και πολλαπλασιασμό με $(1-N_0s)^{-L}$. Αξίζει να σημειωθεί πως η (8.62) ισχύει μόνο στην περίπτωση ενός ορθογώνιου φίλτρου. Στη γενική περίπτωση όπου το φίλτρο δεν είναι απαραίτητα ορθογώνιο, η (8.61) έχει πιο πολύπλοκη μορφή, αλλά είναι ωστόσο εύκολο, ακολουθώντας μία ανάλογη διαδικασία να καταλήξουμε σε μία παρόμοια σχέση που θα συνδέει την MGF του συστήματος χωρίς οπτική προενίσχυση με την MGF του συστήματος με οπτική προενίσχυση.

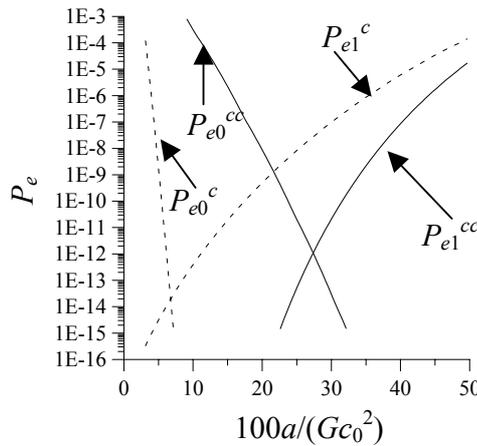
Ο ηλεκτρικός θερμικός θόρυβος τον οποίο έχουμε αγνοήσει μέχρι τώρα, μπορεί εύκολα να συνυπολογιστεί. Εφόσον ο θόρυβος αυτός είναι προσθετικός, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την MGF του συστήματος με $\exp(\sigma_{th}^2 s^2 / 2)$ που είναι η MGF του προσθετικού θορύβου (σ_{th}^2 είναι η ισχύς του θερμικού θορύβου).

8.7 ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ-ΔΙΑΦΩΝΙΑΣ

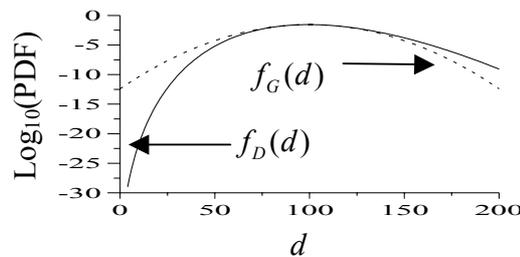
Το μοντέλο που έχουμε παρουσιάσει στις προηγούμενες παραγράφους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποτιμήσουμε τις επιπτώσεις του θορύβου διαφωνίας-διαφωνίας σε ένα WDM σύστημα. Θα θεωρήσουμε ένα απλό σύστημα NRZ (Non Return to Zero) με διαμόρφωση ON/OFF. Βάσει αυτών των προϋποθέσεων, η ενέργεια του σήματος πριν την οπτική ενίσχυση στην περίπτωση όπου το bit του σήματος b_s ισούται με 1, θα δίνεται από τη σχέση $c_0^2 = P_{in}T/(hf_0)$, όπου P_{in} είναι η ισχύς του οπτικού σήματος στην είσοδο του οπτικού ενισχυτή, h η σταθερά του Planck, T η διάρκεια του bit και f_0 η κεντρική συχνότητα του σήματος. Στην περίπτωση όπου το bit του σήματος b_s είναι 0 θα έχουμε $c_0=0$ (θεωρώντας πως ο λόγος σβέσης είναι άπειρος). Η ισχύς του θερμικού θορύβου δίνεται από την $\sigma_{th}^2 = 2k_B T_K T / (q_e^2 R_L)$ όπου k_B η σταθερά Boltzmann, R_L η αντίσταση φόρτου του δέκτη και T_K η θερμοκρασία σε Kelvin ενώ q_e είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Στο σχήμα 8-7, έχουμε αναπαραστήσει γραφικά με συνεχείς γραμμές τις πιθανότητες σφάλματος $P_{e,i}^{cc}$ όταν συμπεριλαμβάνουμε την επίδραση του θορύβου διαφωνίας-διαφωνίας στην περίπτωση όπου $b_s=i$ (όπου $i=0,1$) σε συνάρτηση με το κατώφλι a του δέκτη (εκφρασμένο ως ποσοστό της εκατό της ενέργειας Ge_0^2 του σήματος που προσπίπτει στη φωτοδίοδο, στην περίπτωση $b_s=1$). Έχουμε θεωρήσει πως $M=32$, $P_{in}=-30\text{dBm}$, $G=30\text{dB}$, $n_{sp}=1$, $T=100\text{ps}$ (που αντιστοιχεί σε ρυθμό 10Gb/s), $B=10/T=100\text{GHz}$, $R_L=100\Omega$ και $(S/N)_{opt}=20\text{dB}$ όπου

$$(S/N)_{opt} = c_0^2 / \sum_{m \geq 1} c_m^2 \quad (8.63)$$



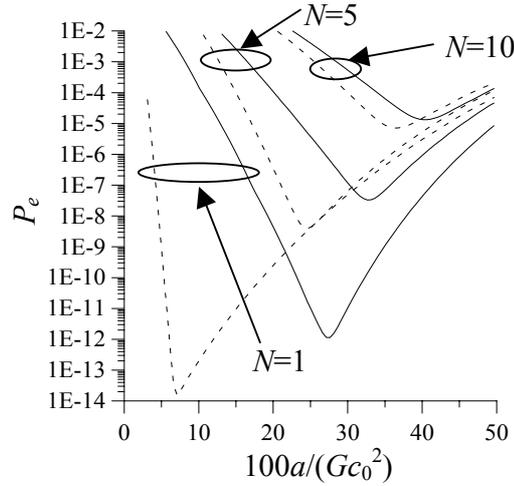
Σχήμα 8-7: Οι πιθανότητες σφάλματος $P_{e,i}^{cc}$ όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας συμπεριλαμβάνεται (συνεχείς γραμμές) και $P_{e,i}^c$ όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας αγνοείται (διακεκομμένες γραμμές) σε συνάρτηση με το κατώφλι a (εκφρασμένο ως ποσοστό επί της εκατό της ισχύος του σήματος που προσπίπτει στην φωτοδίοδο, Gc_0^2 στην περίπτωση $b_s=1$).



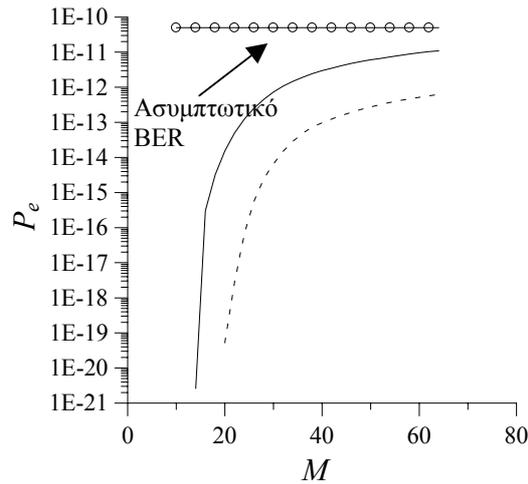
Σχήμα 8-8: Οι πυκνότητες πιθανότητας $f_D(d)$ (συνεχείς γραμμές) και $f_G(d)$ (διακεκομμένες) όταν $c_0=10$, $(S/N)_{opt}=100$

είναι λόγος του σήματος προς το θόρυβο διαφωνίας στο οπτικό επίπεδο και ορίζεται ως ο αριθμός των φωτονίων του σήματος προς τον αριθμό των φωτονίων του θορύβου διαφωνίας. Έχουμε επίσης παραστήσει γραφικά με διακεκομμένες γραμμές τις πιθανότητες σφάλματος $P_{e,i}^c$ που λαμβάνουμε όταν αγνοούμε το θόρυβο διαφωνίας-διαφωνίας.

Παρατηρούμε πως οι πιθανότητες σφάλματος που υπολογίζονται είναι αρκετά διαφορετικές για τα δύο μοντέλα στην περίπτωση όπου $b_s=0$, αφού στην περίπτωση αυτή ο θόρυβος σήματος-διαφωνίας απουσιάζει και ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας αποτελεί μια κυρίαρχη συνεισφορά. Η διαφορά είναι σημαντική και στην περίπτωση όπου $b_s=1$. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί πως στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα σφάλματος όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας συμπεριλαμβάνεται είναι μικρότερη από ότι όταν αγνοείται. Τούτο μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα στην περίπτωση όπου $M=\infty$. Όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας συμπεριλαμβάνεται, η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από τη σχέση (8.41). Όταν αγνοείται, η μεταβλητή απόφασης (που δίνεται από την (8.5) χωρίς το δεύτερο διπλό άθροισμα) τείνει ασυμπτωτικά σε μία Gaussian τυχαία μεταβλητή με MGF $M_G(s)$ και πυκνότητα πιθανότητας $f_G(d)$ που δίνονται από τις:



Σχήμα 8-9: Η μεταβολή του BER σε σχέση με το κατώφλι του δέκτη (εκφρασμένο ως ποσοστό της εκατό της ισχύος του σήματος που προσπίπτει στην φωτοδίοδο, Gc_0^2 στην περίπτωση $b_s=1$) όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας συμπεριλαμβάνεται (συνεχείς γραμμές) και όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας αγνοείται (διακεκομμένες γραμμές). N είναι ο αριθμός των οπτικών ενισχυτών.



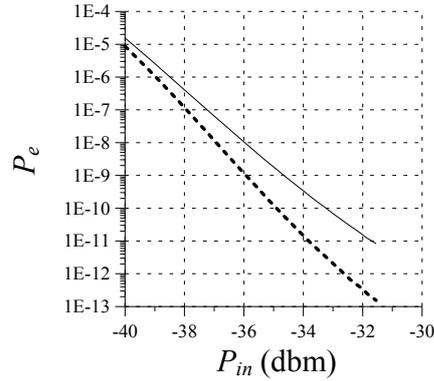
Σχήμα 8-10: Μεταβολή του BER σε συνάρτηση με τον αριθμό M των καναλιών παρεμβολής για $(S/N)_{opt}=20\text{dB}$ όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας συμπεριλαμβάνεται (συνεχείς γραμμές) και όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας αγνοείται (διακεκομμένες γραμμές). Απεικονίζεται επίσης η τιμή που λαμβάνεται με την ασυμπτωτική MGF.

$$M_G(s) = \exp\left(c_0^2 s + \sigma_g^2 s^2 / 2\right) \quad (8.64)$$

$$f_G(d) = \exp\left(-\frac{(d - c_0^2)^2}{2\sigma_g^2}\right) \quad (8.65)$$

όπου

$$\sigma_g^2 = 2c_0^2 \sum_{m \geq 1} c_m^2 \quad (8.66)$$



Σχήμα 8-11: Μεταβολή του ελάχιστου BER με την ισχύ εισόδου P_{in} όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας λαμβάνεται υπόψη (συνεχής γραμμές) και όταν δεν λαμβάνεται υπόψη (διακεκομμένες γραμμές) για $M=32$ και $(S/N)_{opt}=20\text{dB}$

είναι η ισχύς του θορύβου σήματος-διαφωνίας. Στο σχήμα 8-8 έχουμε αναπαραστήσει γραφικά την πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής απόφασης στην περίπτωση όπου $c_0=10$, $(S/N)_{opt}=100$, $M \rightarrow \infty$, όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας αγνοείται και όταν συμπεριλαμβάνεται. Παρατηρούμε πως η πυκνότητα πιθανότητας στην περίπτωση όπου ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας αγνοείται έχει υψηλότερες αριστερές ουρές από ότι όταν συμπεριλαμβάνεται. Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος στην περίπτωση όπου $b_s=1$ που καθορίζεται από το ολοκλήρωμα των ουρών της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας θα είναι χαμηλότερη στην δεύτερη περίπτωση από ότι στην πρώτη.

Στο σχήμα 8-9, έχουμε απεικονίσει την τιμή του μέσου BER του συστήματος το οποίο υπολογίζεται ως το ημίαθροισμα των πιθανοτήτων σφάλματος στην περίπτωση όπου $b_s=1$ και $b_s=0$. Με N έχουμε συμβολίσει τον αριθμό των οπτικών ενισχυτών που τόσο το σήμα όσο και ο θόρυβος διαφωνίας περνούν προτού φτάσουν στο φωτοδέκτη. Η φασματική πυκνότητα του θορύβου ASE στην περίπτωση αυτή είναι $N_0=Ng_{sp}(G-1)$. Θεωρούμε πως ο τελευταίος ενισχυτής είναι αυτός του δέκτη και στην περίπτωση $N=1$, μόνο αυτός ο ενισχυτής υπάρχει στο σύστημα. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με εκείνες του σχήματος 8-9. Για $N=1$, το βέλτιστο κατώφλι (δηλαδή το κατώφλι που οδηγεί στο ελάχιστο BER) είναι αρκετά διαφορετικό στις δύο περιπτώσεις. Επίσης η ελάχιστη τιμή του BER διαφέρει κατά δύο τάξεις μεγέθους. Ωστόσο όσο το N αυξάνει τόσο συσσωρεύεται ο θόρυβος ASE και επομένως ο θόρυβος διαφωνίας γίνεται λιγότερο σημαντικός. Για παράδειγμα, η διαφορά στο ελάχιστο BER είναι μία τάξη μεγέθους για $N=5$ οπτικούς ενισχυτές. Ωστόσο, το βέλτιστο κατώφλι παραμένει αρκετά διαφορετικό. Για $N=10$, ο θόρυβος ASE κυριαρχεί με αποτέλεσμα τα δύο μοντέλα να δίνουν τα ίδια σχεδόν αποτελέσματα.

Η μεταβολή του BER, όταν συμπεριλαμβάνεται ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας (συνεχείς γραμμές) και όταν αγνοείται (διακεκομμένες γραμμές), με τον αριθμό των καναλιών M που παρεμβάλλονται για σταθερό $(S/N)_{opt}$ και ίσο με 20dB έχει αναπαρασταθεί στο σχήμα 8-10. Παρατηρούμε πως για $M>20$ η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων είναι περίπου δύο τάξεις μεγέθους. Στο σχήμα έχουμε συμπεριλάβει με μικρούς κύκλους την τιμή του BER όταν ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας συμπεριλαμβάνεται η οποία υπολογίζεται από την ασυμπτωτική MGF ($M \rightarrow \infty$) και ισούται με 5.0×10^{-11} . Παρατηρούμε πως το BER τείνει αργά προς την ασυμπτωτική τιμή του. Για $M=64$ το BER είναι 1.3×10^{-11} κάτι που υποδηλώνει ότι για $M>64$, το BER θα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το ασυμπτωτικό BER και επομένως το ασυμπτωτικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για $M>64$.

Η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων φαίνεται και στο σχήμα 8-11, όπου το BER έχει παρασταθεί σε συνάρτηση με την ισχύ εκπομπής για $M=32$ και $(S/N)_{opt}=100$. Συγκρίνοντας τις τιμές της P_{in} που χρειάζονται για να έχουμε ένα BER ίσο με 10^{-9} συνάγουμε πως ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας προσθέτει επιπλέον επιβάρυνση ισχύος ίση με 1.3dB. Επομένως ο θόρυβος διαφωνίας-διαφωνίας πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά το σχεδιασμό του συστήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ AWG

Στο παρόν παράρτημα θα υπολογίσουμε τη διακύμανση $\sigma^2(v) = \langle (T(v) - \langle T(v) \rangle)^2 \rangle$ της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος $T(v)$ του AWG που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο 4. Η $T(v)$ δίνεται από την

$$T(v) = \sum_{m,n} \bar{C}_m \bar{C}_n^* \exp(j(\delta_m - \delta_n)) \quad (A1)$$

όπου

$$\bar{C}_m = C_m \exp(j2\pi m v) \quad (A2)$$

Υψώνοντας την (A1) στο τετράγωνο και λαμβάνοντας τη μέση τιμή θα έχουμε:

$$\langle T^2(v) \rangle = \sum_{m,n,k,l} \bar{C}_m \bar{C}_n \bar{C}_k^* \bar{C}_l^* \langle \exp(j(\delta_m + \delta_n - \delta_k - \delta_l)) \rangle \quad (A3)$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $\langle \exp(j(\delta_m + \delta_n - \delta_k - \delta_l)) \rangle$ θα πρέπει να θεωρήσουμε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των m, n, k και l . Πράγματι έστω ότι $m \neq n$, $m \neq k$ and $m \neq l$. Τότε η $\langle \exp(j(\delta_m + \delta_n - \delta_k - \delta_l)) \rangle$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\langle \exp(j(\delta_m + \delta_n - \delta_k - \delta_l)) \rangle = \langle \exp(j\delta_m) \rangle \langle \exp(j(\delta_n - \delta_k - \delta_l)) \rangle \quad (A4)$$

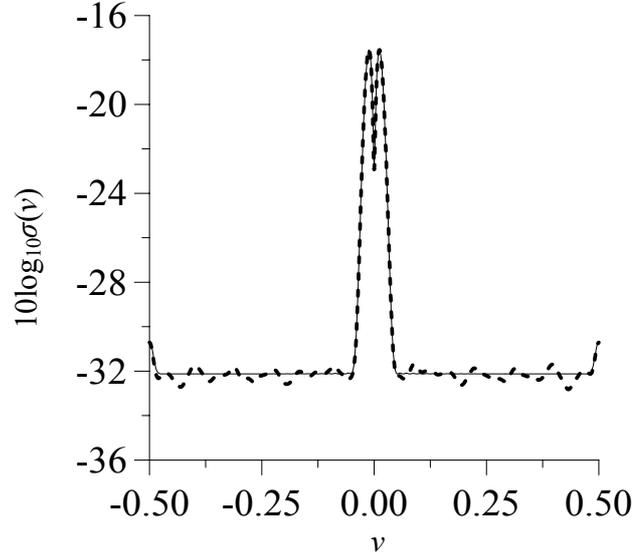
Αν $m=n$, $m \neq k$ and $m \neq l$ τότε

$$\langle \exp(j(\delta_m + \delta_n - \delta_k - \delta_l)) \rangle = \langle \exp(2j\delta_m) \rangle \langle \exp(j(-\delta_l - \delta_k)) \rangle \quad (A5)$$

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό είμαστε σε θέση να εκφράσουμε την (A3) ως άθροισμα όρων που είναι γινόμενο αθροισμάτων που περιέχουν μονάχα το $\langle \exp(j(q_m \delta_m + q_n \delta_n + q_k \delta_k)) \rangle$ όπου q_m, q_n and q_k είναι ακέραιοι. Έχουμε μειώσει λοιπόν κατά μια τις τυχαίες μεταβλητές στα εκθετικά των οποίων τη μέση τιμή πρέπει να υπολογίσουμε. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\langle \exp(jq_m \delta_m) \rangle = \exp(-q_m^2 \sigma_m^2 / 2) \quad (A6)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την $\langle T^2(v) \rangle$ σε κλειστή μορφή. Πραγματοποιώντας τις πράξεις βρίσκουμε τις εξής σχέσεις:



Σχήμα A-1: Θεωρητική (συνεχείς γραμμές) και αριθμητική τιμή (διακεκομμένες) ενός AWG με $M=65$, $a=0.0039$ και $\langle \delta_m^2 \rangle = \pi/20$

$$\langle T^2(v) \rangle = S_4(\{\bar{C}_m\}, \{\bar{C}_m^*\}, \{\sigma_n\}) \quad (A7)$$

όπου η συνάρτηση S_4 εκφράζεται μέσω τριών άλλων συναρτήσεων S_1, S_2, S_3 που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} S_4(\{c_m\}, \{d_m\}, \{\sigma_n\}) &= S_3(\{d_m^2\}, \{c_m\}, \{c_m\}, \{\sigma_n\}, 2) - S_3(\{d_m^2 f(\sigma_m, 1)\}, \{c_m\}, \{c_m\}, \{\sigma_n\}, 1) \\ &+ 2S_1(\{d_m c_m\}) S_2(\{d_m\}, \{c_m\}, \{\sigma_m\}, 1, -1) - 2S_3(\{d_m\}, \{d_m c_m f(\sigma_m, 1)\}, \{c_m\}, \{\sigma_n\}, 1) \\ &- 2S_2(\{d_m^2 c_m\}, \{c_m\}, \{\sigma_m\}, 1, -1) + 2S_1(\{d_m^2 c_m f(\sigma_m, 1)\}) S_1(\{c_m f(\sigma_m, -1)\}) \\ &- S_2(\{d_m c_m^2\}, \{c_m\}, \{\sigma_m\}, 1, -1) + S_2(\{d_m c_m^2 f(\sigma_m, 1)\}, \{d_m\}, \{\sigma_m\}, -2, 1) \\ &+ S_1(\{d_m^2 c_m^2 (1 - f(\sigma_m, 1))^2\}) + S_1(\{d_m f(\sigma_m, 1)\}) S_3(\{d_m\}, \{c_m\}, \{c_m\}, \{\sigma_n\}, 1) \end{aligned} \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} S_3(\{x_m\}, \{y_m\}, \{z_m\}, \{\sigma_m\}, p) &= S_1(\{x_m f(p, \sigma_m)\}) S_2(\{y_m\}, \{z_m\}, \{\sigma_m\}, -1, 1) \\ &+ S_2(\{x_m y_m\}, \{z_m\}, \{\sigma_m\}, p, -1, -1) - S_2(\{x_m y_m f(p, \sigma_m)\}, \{z_m\}, \{\sigma_m\}, p, -1, -1) \\ &+ S_2(\{x_m z_m\}, \{y_m\}, \{\sigma_m\}, p, -1, -1) - S_2(\{x_m z_m f(p, \sigma_m)\}, \{y_m\}, \{\sigma_m\}, p, -1, -1) \\ &- S_1(\{x_m y_m z_m (f(\sigma_m, p - 2) - f(\sigma_m, p) f(\sigma_m, -2))\}) \end{aligned} \quad (A9)$$

$$S_2(\{x_m\}, \{y_m\}, \{\sigma_m\}, p, q) = S_1(\{x_m y_m f(\sigma_m, p + q)\}) - S_1(\{x_m y_m f(\sigma_m, p) f(\sigma_m, q)\}) + S_1(\{x_m f(\sigma_m, p)\}) S_1(\{x_m f(\sigma_m, q)\}) \quad (A10)$$

$$S_1(\{x_m\}) = \sum_m x_m \quad (A11)$$

$$f(x, p) = \exp(-(px)^2) \quad (A12)$$

Έχοντας την $\langle T^2(v) \rangle$ είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη $\sigma(v)$ από τη σχέση

$$\sigma^2(v) = \langle T^2(v) \rangle - \langle T(v) \rangle^2 \quad (A13)$$

όπου η $\langle T(v) \rangle$ έχει υπολογιστεί στο κεφάλαιο 4.

Για να ελέγξουμε αν έχουμε υπολογίσει σωστά τη $\sigma(v)$ υπολογίζουμε 1000 δείγματα της συνάρτησης μεταφοράς με μέση διακύμανση σφαλμάτων φάσης $\langle \delta_m^2 \rangle^{1/2} = \pi/20$, αριθμό κυματοδηγών $M=65$ και συντελεστής μείωσης της ισχύος των κυματοδηγών $a=16/M^2=0.0039$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διακύμανση της συνάρτησης μεταφοράς ισχύος από τα δείγματα και τη συγκρίνουμε με την (A13) στο σχήμα A-1

B. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BER ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ SADDLE POINT

Στα κεφάλαια 5 και 8, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο saddle point για να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος (BER) από τη γεννήτρια συνάρτηση ροπών (MGF) του θορύβου. Στο παρόν παράρτημα θα αποδείξουμε τις σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε.

Η MGF της μεταβλητής απόφασης D ορίζεται από τη σχέση

$$M(s) = E\{\exp(sD)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_D(x) dx \quad (B1)$$

όπου $f_D(x)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της D . Επομένως η $M(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f_D(x)$. Εξαιτίας της (B1) μπορούμε να γράψουμε

$$f_D(d) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(-sx) M(s) ds \quad (B2)$$

που αποτελεί τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Η σταθερά c έχει επιλεγεί, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της (B2) να συγκλίνει.

Η πυκνότητα πιθανότητας στην περίπτωση του bit 1 δίνεται από τη σχέση

$$P_{e1}(a) = \int_{-\infty}^a f_D(x) dx = \int_{-\infty}^a dx \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} ds \exp(-sx) M(s) \quad (B3)$$

όπου a το κατώφλι του δέκτη. Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης στη (B3) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$P_{e1}(a) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} ds M(s) \int_{-\infty}^a dx \exp(-sx) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} ds M(s) \exp(-sa) / s \quad (B4)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi(s) = \ln(M(s)) - as + \log s \quad (B5)$$

οπότε η (B4) γράφεται:

$$P_{e1}(a) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} ds \exp(\psi(s)) \quad (B6)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.140) βρίσκουμε:

$$P_{e1}(a) \cong \frac{\exp(\psi(s_1))}{\sqrt{2\pi |\psi''(s_1)|}} \quad (\text{B7})$$

όπου το s_1 είναι το saddle point της $\psi_1(s)$ το οποίο βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα.

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι η πιθανότητα σφάλματος για το bit 0 δίνεται από την

$$P_{e0}(a) \cong \frac{\exp(\psi(s_0))}{\sqrt{2\pi |\psi''(s_0)|}} \quad (\text{B8})$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή ασχοληθήκαμε με τις ιδιότητες των AWG και τις επιδόσεις των οπτικών δικτύων που τα χρησιμοποιούν. Μετά από μία εισαγωγή στις βασικές έννοιες που σχετίζονται με τα σύγχρονα οπτικά δίκτυα και μία επισκόπηση των τεχνολογιών που επιτρέπουν την υλοποίηση δικτύων WDM, στα κεφάλαια 1 και 2 αντίστοιχα, επιχειρήσαμε μια ηλεκτρομαγνητική ανάλυση του AWG με αφετηρία της εξισώσεως Maxwell στο κεφάλαιο 3. Δείξαμε πως η θεωρία των ανομοιογενών διηλεκτρικών μέσων μπορεί να εφαρμοσθεί για να υπολογιστεί η συνάρτηση Green στο εσωτερικό των συζευκτών αστέρα του AWG μέσω ενός ολοκληρώματος Sommerfeld. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Saddle Point, υπολογίσαμε την ασυμπτωτική τιμή της συνάρτησης Green και δείξαμε πως η κύρια συνεισφορά προέρχεται από τους πόλους της συνάρτησης προς ολοκλήρωση που ταυτίζονται με τις σταθερές διάδοσης των τρόπων TE και TM του συζεύκτη αστέρα. Η ασυμπτωτική μορφή της συνάρτησης Green επιτρέπει την αναγωγή του τρισδιάστατου προβλήματος σε ένα πρόβλημα δύο διαστάσεων βάση του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην έξοδο του AWG.

Η συνάρτηση Green που υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 3, χρησιμοποιείται στο κεφάλαιο 4 για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του AWG. Αποδεικνύεται πως ο κύριος λοβός της συνάρτησης μεταφοράς έχει Gaussian μορφή και πως θεωρητικά οι δευτερεύοντες λοβοί έχουν πολύ χαμηλή τιμή. Η Gaussian προσεγγίζει την πραγματική συνάρτηση μεταφοράς με μεγάλη ακρίβεια εντός του εύρους 3dB αλλά εκτός αυτού δεν πετυχαίνει ικανοποιητική ακρίβεια. Χρησιμοποιώντας το Gaussian μοντέλο παρουσιάζεται μία διαδικασία σχεδίασης ενός αποπολυπλέκτη AWG. Η επίδραση της σύζευξης των κυματοδηγών φράγματος στη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς αναλύεται με τη βοήθεια της θεωρίας των συζευγμένων τρόπων. Αποδεικνύεται πως η σύζευξη δεν επηρεάζει σημαντικά τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς.

Στο κεφάλαιο 5, αναλύεται η επίδραση των κατασκευαστικών ατελειών του AWG στις επιδόσεις του. Οι κατασκευαστικές ατέλειες των κυματοδηγών του φράγματος δημιουργούν σφάλματα φάσης. Παρουσιάζουμε μία απλή μέθοδο, βασισμένη στην προσέγγιση του ενεργού δείκτη διάθλασης, βάσει της οποίας οι κατασκευαστικές ανοχές συνδέονται με τα σφάλματα φάσης. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη στατιστική συμπεριφορά των σφαλμάτων φάσης για να υπολογίσουμε την επίδραση τους στη συνάρτηση μεταφοράς του AWG. Παρουσιάζονται διαγράμματα που επιτρέπουν τον υπολογισμό των επιδόσεων κάθε AWG από τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά και από τις κατασκευαστικές τους ανοχές.

Στο κεφάλαιο 6, υπολογίζουμε την επίδραση των σφαλμάτων φάσης του AWG σε ένα απλό $N \times N$ δίκτυο που χρησιμοποιεί έναν $N \times N$ δρομολογητή. Η συνάρτηση μεταφοράς του AWG χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πλάτους και της φάσης των συνιστωσών του θορύβου διαφωνίας. Η MGF της μεταβλητής απόφασης στο δέκτη υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη την έλλειψη συγχρονισμού μεταξύ των bit, το θόρυβο φάσης, τις μεταβολές της πόλωσης, το θόρυβο βολής και το θερμικό θόρυβο. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Saddle Point, υπολογίζουμε την πιθανότητα σφάλματος από τη MGF και αποδεικνύουμε πως ο θόρυβος διαφωνίας δεν μπορεί να θεωρηθεί Gaussian, όπως συνέβαινε συχνά στη βιβλιογραφία. Η σημασία των διαφόρων παραγόντων που επηρεάζουν τη στατιστική του θορύβου διαφωνίας (έλλειψη συγχρονισμού bit,

Συμπεράσματα

θόρυβο φάσης, μεταβολές της πόλωσης) αναδεικνύεται συγκρίνοντας την επίδραση τους στην τιμή της πιθανότητας σφάλματος στο δέκτη. Τέλος, υπολογίζουμε τις επιδόσεις του οπτικού δικτύου σε συνάρτηση με τη μέση διαφωνία του AWG. Αποδεικνύεται πως για μεγάλες τιμές του N (π.χ. $N=128$) η μέση διαφωνία του AWG πρέπει να είναι της τάξης των -35dB .

Στο κεφάλαιο 7, παρουσιάζουμε μια μέθοδο για το σχεδιασμό ενός AWG με ομαλή φασματική απόκριση. Δείχνουμε πως επιλέγοντας κατάλληλα τα μήκη των κυματοδηγών φράγματος του AWG η συνάρτηση μεταφοράς του τείνει να γίνει ορθογώνια. Η μέθοδος δεν εισάγει σημαντικές απώλειες, ούτε οδηγεί σε σημαντική αύξηση του ύψους των δευτερευόντων λοβών του AWG.

Τέλος στο κεφάλαιο 8, αναλύουμε την επίδραση του θορύβου διαφωνίας-διαφωνίας στη πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη. Χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες της μεταβλητής απόφασης, αποδεικνύουμε πως η MGF μπορεί να γραφεί ως ένα διπλό ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης που είναι γνωστή σε κλειστή μορφή. Παρουσιάζουμε μία μέθοδο ακριβούς αριθμητικού υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος. Χρησιμοποιώντας τη MGF υπολογίζουμε τη πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη. Αποδεικνύεται πως η πιθανότητα σφάλματος επηρεάζεται σημαντικά από το θόρυβο διαφωνίας-διαφωνίας ο οποίος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά το σχεδιασμό ενός WDM δικτύου.

ΛΙΣΤΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΩΝ

- [1] T. Kamalakis, T. Sphicopoulos and D. Syvridis “Estimation of Performance Degradation due to Phase Errors in AWGs”, IEEE Journal of Lightwave Technology, September 2002
- [2] T. Kamalakis and T. Sphicopoulos “Application of the Saddle Point Approximation for the Estimation of the BER in an Arrayed Waveguide Grating Interconnection”, IEEE Journal of Lightwave Technology, August 2002
- [3] T. Kamalakis and T. Sphicopoulos “Asymptotic Behavior of In-band Crosstalk Noise in WDM Networks”, IEEE Photonics Technology Letters, March 2003
- [4] T. Kamalakis, T. Sphicopoulos and M. Sagriotis “Accurate Estimation of the Error Probability in the Presence of In-band Crosstalk Noise in WDM Networks” IEEE Journal of Lightwave Technology, October 2003
- [5] T. Kamalakis and T. Sphicopoulos “An Efficient Technique for the Design of an Arrayed Waveguide Grating with Flat Spectral Response”, IEEE Journal of Lightwave Technology, November 2001
- [6] T. Kamalakis and T. Shicopoulos “Design of an Arrayed Waveguide Grating with Flat Spectral Response”, SPIE’s Optoelectronics 2002 Conference, San Jose, California USA, January 2002

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [Agr89] G. P. Agrawal, *Non-linear Fiber Optics*, Academic Press, 1989.
- [AS72] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972.
- [ASL96] M.R. Amersfoort, J.B.D. Soole, H.P. LeBlance, N.C. Andreadakis, A. Rajhel and C. Caneau “Passband Broadening of integrated arrayed waveguide filters using multimode interference couplers”, *Electronics Letters*, vol. 23, 1996, pp 449-451.
- [Awd99] D. Awduche “Multiprotocol Lambda Switching: Combing MPLS Traffic Engineering Control with Optical Crossconnects”, *draft-awduche-mpls-te-optical-01.txt*, Nov 99.
- [Bal82] C. A. Balanis *Antenna Theory Analysis and Design* Harper and Row Publishers 1982
- [BH86] N. Bleistein and R. A. Handelsman *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover Publications 1986.
- [BMM95] H. Binssesur, B. Martin, R. Mestric and F. Gaborit “Small-size, polarization independent phased array demultiplexers on InP”, *IEE Electronics Letters* Vol. 31, No. 24, pp.2118-2120.
- [BOR00] D.J. Blumenthal, B. E. Olsson, G. Rossi et al “All-optical Label Swapping Networks and Technologies” *IEEE Journal Lightwave Technology*, Vol. 18, No. 12, December 2000, pp 2058-2075.
- [Bra90] C. A. Brackett “Dense Wavelength Division Multiplexing Networks: Principles and Applications”, *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, Vol. 8, No. 6, August 1990, pp. 948-963.
- [Bru81] N.G. de Bruijn *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover Publications 1981.
- [BW80] M. Born and E. Wolf *Principles of Optics*, Pergamon Press, Sixth Edition, 1980.
- [CD97] J.C. Chen and C. Dragone “A Study of Fiber-to-Fiber Losses in Waveguide Grating Routers” *IEEE Journal Lightwave Technology* Vol. 15 No. 10 pp 1898-1899 October 1997.
- [Chew95] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press 1995.
- [CHM98] V. W. Chan, K. L. Hall, E. Modiano and K. A. Rauschenbach, “Architectures and Technologies for High-Speed Optical Data Networks”, *IEEE Journal of Lightwave Technology* Vol. 16, No. 12, December 1998, pp 2148-2168.
- [Col60] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw Hill 1960
- [CPS93] A. Chipouras, A. G. Papastergiou, T. Spicopoulos, “Fabrication tolerance analysis of an OEIC passive duplexer”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol 5, No. 7, July 1993, pp 800 –803.

- [CZ69] R.E. Collin and F.J. Zucker, *Antenna Theory Part I*, McGraw Hill 1969.
- [CZZ02] Y. Chu; X. Zheng; H. Zhang; X. Liu; Y. Guo, “The impact of phase errors on arrayed waveguide gratings”, *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 8, No. 6, November/December 2002, pp 1122- 1129.
- [DEK91] Dragone, C.; Edwards, C.A.; Kistler, R.C. “Integrated optics N×N multiplexer on silicon”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 3 No. 10, October 1991, pp 896 – 899.
- [DGB01] D. Mechin, P. Grosso, D. Bosc, “Add-Drop Multiplexer With UV-Written Bragg Gratings and Directional Coupler in SiO₂-Si Integrated Waveguides”, *IEEE Journal of Lightwave Technology* Vol. 19, No. 9, September 2001, pp. 1282-1285.
- [DJ97] C.R. Doerr and C.H. Joyner “Double Chirping of the Waveguide Grating Router”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol.9, no. 6, June 1997.
- [Dra89] C. Dragone, “Efficient N×N star couplers using Fourier optics”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 7 No. 3 , March 1989, pp 479-489.
- [Dra97] C. Dragone “Crosstalk caused by fabrication errors in a generalized Mach Zehnder interferometer”, *Electronics Letters* vol. 33 no. 15 pp 1328-1328, July 1997.
- [DTB97] C. Dragone, T. Strasser, G.A. Bogert, L.W. Stulz and P. Chou “Waveguide grating router with maximally flat channel passband produced by spatial filtering” *Electronics Letters*, vol. 33, no. 15 pp. 1312-1314 July 1997.
- [Ehr75] Cinlar Ebran, *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall 1975.
- [Ein95] G. Einarsson, *Principles of Lightwave Communications*, New York: Wiley 1995
- [Erd97] T. Erdogan “Fiber grating sTHAtra”, *IEEE Journal Lightwave Technology*, Vol. 15 No. 8, Aug 1997, pp 1278-1294.
- [FM73] L. B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice Hall 1973.
- [For00] E. Forestieri, “Evaluating the error probability in lightwave systems with chromatic dispersion, arbitrary pulse shape and pre- and postdetection filtering”, *IEEE Journal Lightwave Technology* Vol. 18 No 11, Nov 2000, pp 1493–1503.
- [GC98] C. Guillemot and F. Clerot, “Optical Packet Switching for WDM IP Gigabit Routers”, *ECOC’98*, Madrid Spain, September 1998, pp. 433.
- [GMB99] T. Gyselings, G. Morthier and Baets “Crosstalk Analysis of Multiwavelegth Optical Cross Connects” *IEEE Journal of Lightwave Technology* vol. 17 no. 8 Aug. 1999 pp 1273-1283
- [GR80] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik *Table of Integrals Series and Products*, Sixth Edition, Academic Press, 1980.
- [Gre94] P. E. Green, *Δίκτυα Οπτικών Ινών* (μετάφραση: Κ. Καρούμπalos) Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1994.

- [GSS97] T. Goh, S. Suzuki and A. Sugita “Estimation of Waveguide Phase Error in Silica-Based Waveguides”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, vol. 15 no. 11 pp.2108-2213, November 1997.
- [GWK99] S. M. Gemelos, D. Wonglumsom and L. G. Kazovsky, “Impact of Crosstalk in an Arrayed- Waveguide Grating Router on an Add-Drop Multiplexer”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 8 No 3, March 1999, pp 349–351.
- [HC97] Y.P. Ho, H. Li and Y. Chen, “Flat channel passband wavelength multiplexing and demultiplexing devices by multiple Rowland circle design”, *IEEE Photonics Technology Letters* Vol. 9 pp 342-344, Mar. 1997.
- [HFJ78] K. O. Hill, Y. Fujii, D. C. Johnson, B. S. Kawasaki, "Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication", *Applied Physics Letters*, vol.32, pp.648-649, 1978.
- [HH89] H.A. Haus and W.P. Huang “Mode coupling in Tapered Structures”, *Journal of Lightwave Technology* Vol. 7 No. 4, April 1989, pp. 729-730.
- [Hib02] Y. Hibino, “Recent Advances in High-Density and Large Scale AWG Multi/Demultiplexers With Higher Index Contrast-Based PLCs”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* Vol. 8, No. 6, November 2002, pp. 1090-1101.
- [Hil73] F.B. Hildebrand *Introduction to Numerical Analysis*, Dover Publication 1973.
- [HM97] K.O. Hill,; G. Meltz, “Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview”, *IEEE Journal Lightwave Technology*, Vol. 15, No 8, Aug 1997, pp 1263-1276.
- [Ho99] K.P. Ho “Analysis of Homodyne Crosstalk in Optical Networks Using Gram–Charlier Series”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 17, No. 2, February 1999, pp 149-154.
- [HRM02] Hamilton B.S. Robinson, T.E. Murphy, S.J. Savage, E.P Ippen, “100 Gb/s optical time-division multiplexed networks”, *IEEE Journal of Lightwave. Technology* Vol. 20, No 12, December 2002, pp. 2088- 2100
- [IOK94] Y. Inoue, Y. Ohmori, M. Kawachi, S. Ando, T. Sawada and H. Takahashi, “Polarization mode convertor with polyimide half waveplate in silica-based planar lightwave circuits”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 6, May 1994, pp. 628-628.
- [ISA99] E. Iannone, R. Sabella, M. Avattaneo, G de Paolis “Modeling of In-band Crosstalk in WDM Optical Networks”, *IEEE Journal of Lightwave Technology* Vol. 17 No. 7 July 1999 pp 1138-1141.
- [Isl02] M. N. Islam “Raman Amplifiers for Telecommunications”, *IEEE Journal Selected Topics in Quantum Electronics* Vol. 8, No. 3 May/June 2002, pp548-559
- [ITS94] O. Ishida, H. Takahashi, S. Suzuki and Y. Inoue, “Multichannel Frequency-Selective Switch Employing an Arrayed-Waveguide Grating Multiplexer with Fold-Back

- Optical Paths”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 6, No. 10, October 1994, pp. 1219-1222
- [JGB96] J. L. Jackel, M. S. Goodman, J. E. Baran, W.J. Tomlison, G. K. Chang, M. Z. Iqbal, G.H. Song, K. Bala, C. A. Brackett, D. A. Smith, R. H. Chakravarthy, R. H. Hobbs, D. J. Fritz and K. M. Kissa, “Acousto-Optic Tunable Filters (AOTF’s) for Multiwavelength Optical Cross-Connects: Crosstalk Considerations”, *IEEE Journal Lightwave Technology* Vol. 14 No.6 ,June 1996, pp 1056–1066.
- [JR01] X. Jiang and I. Roudas “Asymmetric Probability Density Function of a Signal with Interferometric Crosstalk”, *Photonics Tech. Letters* Vol 13, No.2 February 2001, pp 160-162.
- [KHH99] R. Khosravani M.I. Hayee. B. Hoanca and A.E. Willner “Reduction of Coherent Crosstalk in WDM Add/Drop Multiplexing Nodes by Bit Pattern Misalignment” *IEEE Photonics Technology Letters* Vol. 11 No. 1 Jan 1999 pp 138-136.
- [KSO02] N. Kikuchi, Y. Shibata, H. Okamoto, Y. Kawaguchi, S. Oku, H. Ishi, Y. Yoshikuni and Y. Tohmori, “Monolithically integrated 68-channel WDM channel selector with novel configuration”, *IEE Electronics Letters* Vol. 38, pp. 331-332, 2002.
- [Lau02] J. P. Laude *DWDM: Fundamental, Components and Applications*, Artech House 2002.
- [Lau80] J. P. Laude “High Brightness Monochromatic Using Optical Fibers”, *Conference Opto Proc*, Paris: ESI Ed. 1980, p.60.
- [LWC01] C.D Lee, W. Chen, Q.Wang, Y.J. Chen W.T. Beard, D. Stone, R.F. Smith, R. Mincher and I.R. Stewart, “The Role of Photomask Resolution on the Performance of Arrayed-Waveguide Grating Devices”,*IEEE Journal of Lightwave Technology* Vol. 19 no 11, November 2001, pp 1728-1733
- [Mar93] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press 1993.
- [Mar94] R. Marz, *Integrated Optics: Design and Modeling*, Artech House, 1994.
- [MF53] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics Part I*, McGraw Hill 1953
- [Min91] W. J. Miniscalco “Erbium-doped glasses for fiber amplifiers at 1500nm”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 9, No. 2, 1991, pp 238-250.
- [MM97] K. A. Michalski and J.R. Mosig, “Multilayered Media Green’s Functions in Integral Equation Formulations”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 48, No. 3, March 1997, pp.508-519.
- [MOM02] K. Maru M. Okawa, K. Matsui, H. Uetsuka, “Statistical analysis of correlated phase error in transmission characteristics of arrayed-waveguide gratings”, *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 8, No. 6, November/December 2002, pp 1142- 1148
- [MPC02] P. Munoz, D. Pastor, J. Capmany, S. Sales, “Analytical and numerical analysis of phase and amplitude errors in the performance of arrayed waveguide gratings”, *IEEE*

- Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 8, No. 6, November/December 2002, pp 1130- 1141
- [MRB96] R. Mestric, M. Renaud, M. Bachmann, B. Martin and F. Gaborit “Design and Fabrication of 1.31-1.55 μ m Phased Array Duplexer on InP”, *IEEE Journal Selected Topics in Quantum Electronics* Vol . 2, No. 2 pp 251-256, June 1996.
- [MT98] Mashkov, V.A. and Temkin, H, “Propagation of eigenmodes and transfer amplitudes in optical waveguide structures”, *IEEE Journal of Quantum Electronics* Vol. 34, No. 10, October 1998, pp 2038-2047.
- [MT98] I.T. Monroy and E. Tanglionga “Performance Evaluation of Optical Crossconnects by Saddlepoint Approximation” *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol 16 No. 3 March 1998.
- [Muk00] B. Mukherjee, “WDM Optical Communication Networks: Progress and Challenges”, *IEEE J. Select Areas in Communications* Vol. 18, No 10, October 2000, pp. 1810-1824.
- [Muk97] B. Mukherjee, *Optical Communication Networks*, McGraw Hill 1997.
- [NTI87] K. Nosu, H. Toba, Iwashita “Optical FDM transmission technique”, *IEEE Journal Lightwave Technology*, Vol. 5, No. 9, September 1987, pp. 1301-1308.
- [NWL99] C. K. Nadler, E. K. Wildermuth, M. Lanker, W. Huziker and H. Melchior “Polarization insensitive, low-loss low-crosstalk wavelength multiplexer modules”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 5, September 1999, pp. 1408-1412.
- [OAR99] T. Otani, N. Antoniadis; I. Roudas , T.E Stern, “Cascadability of passband-flattened arrayed waveguide-grating filters in WDM optical networks”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 11 No 11, November 1999, pp 1414–1416.
- [OMS95] K. Okamoto, K. Moriwaki and S. Suzuki, “Fabrication of 64x64 arrayed-waveguide grating multiplexer on silicon”, *IEE Electronics Letters*, Vol. 31, No. 3, pp.188-186.
- [OST96] K. Okamoto, K. Syuto, H. Takahashi and Y. Ohmori, “Fabrication of 128-channel arrayed-waveguide grating with 25GHz channel spacing”, *IEE Electronics Letters* Vol. 32, No. 16, pp.1478-1476.
- [OTO96] K. Okamoto, K. Takiguchi and Y. Ohmori, “Eight-Channel Flat STHAtral Response Arrayed-Waveguide Grating Multiplexer with Asymmetrical Mach-Zehnder Filters”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 8 No 3, March 1996, pp 375–377.
- [OY95] K. Okamoto and H. Yamada “Arrayed waveguide grating multiplexer with flat response”, *Optics Letters*, Vol 20, No.1, January 1995, pp 43-45.
- [PW99] M.C. Parker and S.D. Walker “Design of Arrayed Waveguide Gratings Using Hybrid Fourier-Fresnel Transform Techniques”, *IEEE Journal of Selected Areas Quantum Electronics*, vol. 5, no. 5, pp 1379-1384, September/October 1999.
- [Ram01] B. Ramamurthy Design of Optical WDM Networks, Kluwer Academic Publishers, 2001.

- [RBB00] A. M. Rodriguez, O. Bonenfant, S. Baroni and R. Wu “Optical Data Networking: Protocols, Technologies and Architectures for Next Generation Optical Networks and Optical Internetworks”, *IEEE Journal Select Areas in Communications* Vol. 18, No 10, October 2000, pp. 1858-1871.
- [RS98] R. Ramaswami και K. N. Sivarajan, *Optical Networks: A Practical PersTHAtive*, Morgan Kaufman, 1998.
- [RVC00] E. Rosen, A. Viswanathan and R. Callon “Multiprotocol Label Switching Architecture”, *draft-ietf-mpls-arch-07.txt*, July 2000
- [SAL96] J. B. D. Soole, M. R. Amesfoort, H. P. LeBlanc, N. C. Andreadakis, A Rajhel, C. Caneau, M. A. Koza, R. Bhat, C. Youtsey and I. Adesida, “Polarization-Independent InP Arrayed Waveguide Filter using cross-section waveguides”, *IEE Electronics Letters*, Vol. 32, no. 4, pp. 323-324.
- [Sam79] K. Sam Shanmugam *Digital and Analog Communications Systems* (μετάφραση: K. Καρούμπαλου), Εκδόσεις Πνευματικού 1979.
- [SBJ90] D.A. Smith, J.E. Baran, J.J. Johnson and K. W. Cheung, “Integrated-optic acoustically-tunable filters for WDM networks”, *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, Vol. 8 No. 6 , Aug 1990,pp. 1151 –1159.
- [SD96] M. K. Smit and C. Dam “PHASAR-Based WDM-Devices: Principles and Applications”, *IEEE Journal Selected Topics in Quantum Electronics* Vol. 2, No. 2, June 1996, pp. 238-250.
- [SGP00] R. Scarmozino, A. Gopinath, R. Pregla and S. Helfert “Numerical Techniques for Modeling Guided-Wave Photonic Devices”, *IEEE Journal Selected Topics in Quantum Electronics* Vol. 6, No. 1, January/February 2000, pp 150-161.
- [SHI98] S. Suzuki, A. Himeno, M. Ishii “Integrated Multichannel Optical Wavelength Selective Switches Incorporating an Arrayed-Waveguide Grating Multiplexer and Thermo-optic Switches”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 16 No. 4 , April 1998, pp 650-655.
- [SHT94] S. Suzuki, A. Himeno, Y. Tachikawa and Y. Yamada “Multichannel optical wavelength selective switch with arrayed-waveguide grating multiplexer”, *IEE Electronics Letters* Vol. 30, No. 13, June 1994, pp. 1091-1092.
- [SIA92] Y. Suematsu, K. Iga and S. Arai, “Advanced Semiconductor LASERS”, *IEEE Proceedings* 80, 1992, pp. 383-397.
- [Sin96] J. Singh, *Optoelectronics*, Mc-Graw Hill 1995.
- [SL83] A. W. Snyder and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall 1983.
- [Smi88] M. K. Smit, “New focusing and dispersive planar component based on an optical phased array” *IEE Electronics Letters*, Vol. 24 No. 7 , March 1988, pp 385 -386
- [Smi93] Phd thesis.

- [SMK01] M.E.V. Segatto, G.D Maxwell. R. Kashyap, J.R. Taylor, “High-speed transmission and dispersion characteristics of an arrayed waveguide grating”, *Optical Communications* 195(2001) pp 151-157.
- [Sph86] T. Sphicopoulos, *Cavités Compactes pour etalons de frequence atomiques*, PhD thesis, EPFL 1986.
- [SS96] M. A. Scobey and D. E. Spock, “Passive DWDM components using microplasma optical interference filters”, *OFC96 Technical Digest*, San Jose Feb. 1996 pp. 242-243.
- [Stu00] K. E. Stubkjaer, “Semiconductor Optical Amplifier-Based All-Optical Gates for High-Speed Optical Processing”, *IEEE Journal Selected Topics In Quantum Electronics*. Vol. 6, No. 6, Nov/Dec 2000, pp. 1428-1434.
- [SYH94] S. Suzuki, M. Yanagisawa, Y. Hibino, K. Oda “High-Density Integrated Planar Lightwave Circuits Using SiO₂ – GeO₂ Waveguides with a High Refractive Index Difference”, *IEEE Journal of Lightwave Technology* Vol. 12 No. 5, May 1994, pp 790-796.
- [TAS02] K. Takada, M. Abe, T. Shibata and K. Okamoto “Low-loss 10-GHz-spaced tandem multi/demultiplexer with more than 1000 channels using a 1×5 interference multi/demultiplexer as a primary filter”, *IEEE Photonics Technology Letters* Vol. 14 No. 1, Jan 2002, pp 59 –61.
- [THN92] H. Takashi, Y. Hibino and I. Nishi “Polarization-insensitive arrayed-waveguide grating wavelength multiplexer on silicon”, *Optics Letters* vol. 17 pp 499-501 1992.
- [TII96] Y. Tachikawa, Y. Inoue, M. Ishii and T. Nozawa, “Arrayed-Waveguide Grating Multiplexer with Loop-Back Optical Paths and Its Applications”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 14 No. 6 , June 1996, pp 978-984.
- [TIK93] Y. Tachikawa, Y. Inoue, M. Kawachi, H. Takahashi and K. Inoue, “Arrayed-waveguide grating add-drop multiplexer with loop-back optical paths”, *IEE Electronics Letters* Vol. 29, No. 24, November 1993, pp. 2133-2134.
- [TIO94] H. Takahashi, O. Ishida, K. Oda and H. Toba, “Anticrosstalk arrayed waveguide add-drop multiplexer with foldback paths for penalty free transmission”, *IEE Electronics Letters* Vol. 30, No. 24, November 1994, pp. 2053-2054.
- [TKS90] N. Takato, T. Kominato; A. Sugita, K. Jinguji, H. Toba, M. Kawachi, “Silica-based integrated optic Mach-Zehnder multi/demultiplexer family with channel spacing of 0.01-250 nm”, *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, Vol. 8 No. 6 , Aug 1990,pp. 1120 –1127
- [TOT95] H. Takahashi, K. Oda, H. Toba, Y. Inoue, “Transmission Characteristics of Arrayed Waveguide NxN Wavelength Multiplexer”, *IEEE Journal of Lightwave Technology* Vol. 13, No. 3, March 1995, pp 448-455.
- [TOT96] H. Takahashi, K. Oda, H. Toba “Impact of Crosstalk in an Arrayed-Waveguide Multiplexer on NxN Optical Interconnection” *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 14 no. 6 June 1996, pp 1098-1105.

- [TOT99] H. Tsuda, K. Okamoto, T. Ishii, K. Naganuma, Y. Inoue, H. Takenouchi and T. Kurokawa, “Second and Third-Order dispersion compensator using a high-resolution Arrayed-Waveguide Grating”, *IEEE Photonics Technology Letters* Vol. 11, No. 5, May 1999.
- [TYI95] K. Takada, H. Yamada and Y. Inoue “Origin of channel crosstalk in 100GHz spaced silica-based arrayed waveguide grating multiplexer”, *IEE Electronics Letters*, vol. 31 No. 14, July 1995, pp 1178-1178.
- [TZT01] A. V. Tran, W. D. Zhong, R. S. Tucker and K. Song, “Reconfigurable Multichannel Optical Add-Drop Multiplexers Incorporating Eight-Port Optical Circulators and Fiber Bragg Gratings”, *IEEE Photonics Tecnology Letters* Vol. 13, No. 10, October 2001, pp. 1100-1103.
- [Wei02] J. Y. Wei “Advances in the Management and Control of Optical Internet”, *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, Vol. 20, No.4, May 2002, pp. 768-785
- [Yoo96] S. J. B. Yoo “Wavelength Conversion Technologies for WDM Network Applications”, *IEEE Journal Lightwave Technology*, Vol. 14 No. 6, June 1996, pp 958-965.
- [Yos02] Y. Yoshikuni, “Semiconductor Arrayed Waveguide Gratings for Photonic Integrated Devices”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* Vol. 8, No. 6, November 2002, pp. 1102-1114.
- [YTI95] H. Yamada, K. Takada, Y. Inoue, and M. Horiguchi “Measurement of the phase error distribution in silica based arrayed waveguide grating multiplexers by using Fourier transform sTHAtrosopy”, *Electronics Letters* vol. 31 No. 14 pp 360-361, 1995.
- [ZJG94] M. Zirngibl, C. H. Joyner and B. Grance, “Digitally tunable channel dropping filter/equalizer based on waveguide grating router and optical amplifier integrarion”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 6, 1994, pp. 513-515.
- [OKK96] H. Okayama, M. Kawahara and T. Kamijoh, “Reflective Waveguide Array Demultiplexer in LiNbO3”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 14 No. 6 , June 1996, pp 988-990.
- [YOK00] H. Yamada, K. Okamoto, A. Kaneko and A. Sugita, “Dispersion resulting form phase and amplitude errors in arrayed-waveguide grating multiplexers-demultiplexers”, *Optics Letters*, Vol. 25, No. 8, April 2000, pp. 569-561.